Índice

Breve historia de la Trigonometría

CAPÍTULO I Sistemas de medición angular y longitud de arco

CAPÍTULO II Razones trigonométricas de un ángulo agudo

CAPÍTULO III Razones trigonométricas de un ángulo en posición normal

CAPÍTULO IV Circunferencia trigonométrica

CAPÍTULO V Identidades trigonométricas

CAPÍTULO VI Relaciones fundamentales en el triángulo oblicuángulo

CAPÍTULO VII Funciones trigonométricas

CAPÍTULO VIII Ecuaciones trigonométricas

CAPÍTULO IX Números complejos en el análisis trigonométrico

CAPÍTULO X Elementos de cálculo: Límites y derivadas

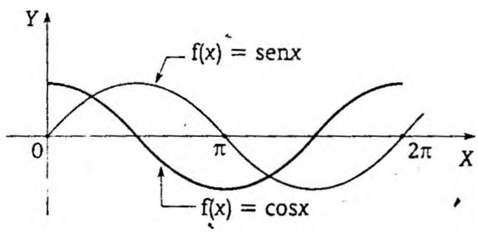
CAPÍTULO XI Traslación y rotación de ejes

CAPÍTULO XII Trigonometría esférica

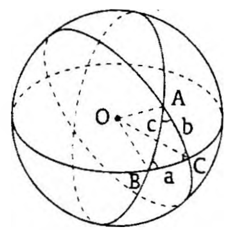
Breve historia de la Trigonometria

LA TRIGONOMETRÍA

La palabra trigonometría significa etimológicamente medida de los triángulos. Actualmente la Trigonometría es considerada una disciplina matemática que estudia los diferentes procedimientos para determinar distancias inaccesibles o difíciles de medir de modo directo. El campo de estudio de esta disciplina se ha ido enriqueciendo progresivamente. Así, abarca también el estudio tanto de las funciones circulares –y su aplicación en la vida cotidiana, en las telecomunicaciones, la mecánica, la astronomía, etc.– como del modelamiento matemático, de gran utilidad en la explicación de fenómenos naturales como las ondas o vibraciones.



Trigonometría plana



Trigonometría esférica

DESARROLLO DE LA TRIGONOMETRÍA

La Trigonometría es una de las disciplinas matemáticas más antiguas. Al igual que otras ramas de la matemática, la Trigonometría no es fruto de la inteligencia de un solo hombre, ni aun de una sola civilización, sino es producto de la experiencia y síntesis teórica de diversas sociedades como Egipto, Babilonia y Grecia.

Ya en el papiro de Ahmes (1550 a.n.e.) se encuentran alusiones a características de un ángulo análogas a nuestras razones trigonométricas actuales. En Babilonia, China y otras civilizaciones antiguas se realizaban, entre uno y dos milenios antes de nuestra era, cálculos con triángulos en muchos casos en conexión con problemas de agrimensura y astronomía.

APORTES DURANTE EL ESCLAVISMO

Las condiciones económicas y políticas de la sociedad esclavista permitieron un nuevo impulso del conocimiento científico. El desarrollo agrícola y ganadero generó una mayor disponibilidad de tiempo para la investigación y observación sistemática de la naturaleza. Asimismo, ante el surgimiento de la propiedad privada y del Estado esclavista se hizo necesario optimizar los mecanismos para delimitar la propiedad territorial y controlar tanto la producción como los impuestos que debía pagar el pueblo. Es así como surge la necesidad de un mayor desarrollo del conocimiento matemático y, en particular, de la Trigonometría.

IV milenio a.n.e

En la Mesopotamia antigua los primeros signos de matemática aparecieron como respuesta a necesidades prácticas. Así, fueron utilizados para contabilizar las cabezas de ganados o los sacos de cereales, calcular distancias, etc.

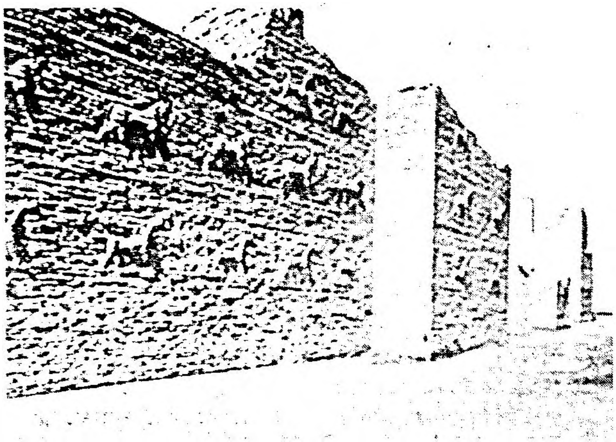
Parece que la numeración caldeo–asiria ha tenido doble origen: una numeración sexagesimal y otra decimal de origen *semítico*. En efecto, en documentos que se remontan al tercer milenio antes de nuestra era, aparece completamente desarrollado el sistema sexagesimal.

Las unidades principales de las diferentes órdenes eran 1, 60, 3 600 (el sar), 216 000 (el gran sar), los dos últimos corresponden respectivamente al cuadrado y al cubo de 60 posiblemente; el origen de la numeración sexagesimal debe buscarse en observaciones astronómicas. El mes sideral sumerio de 30 días y el año de 360 días son bastante significativos.

Tres instrumentos de importancia permitieron a los caldeos elaborar su Astronomía: la clepsidra, el gnomon y el polos. La primera era un reloj de agua, el segundo consistía en un instrumento que representaba el cuadrante solar; iba previsto de una varilla que proyectaba su sombra sobre éste según la posición del sol, el cual marcaba las horas del día, los solsticios y los equinoccios. El denominado polos era una semiesfera que representaba, invertida, la bóveda celeste. Sobre aquello, en el centro, se colgaba una bola, y la sombra que proyectaba en la semiesfera mostraba, de forma invertida, el movimiento solar en los cielos.

Los babilonios

Luego de la decadencia de Sumeria, Babilonia, que tenía una notable importancia estratégica comercial y cultural, logra su independencia e inicia su extraordinaria ascención hacia los años 1830 antes de nuestra era. La mayor atención que tenían los hombres de ciencia en Babilonia era hacia la astronomía, ciencia que les daba datos cada vez más precisos para un conocimiento de la astrología, a la cual le daban importancia porque pensaban equivocadamente en la influencia de los astros en la vida del hombre. Es realmente digno de admirar el desarrollo que alcanzó su astronomía, desarrollo logrado a partir de un importante conocimiento trigonométrico.

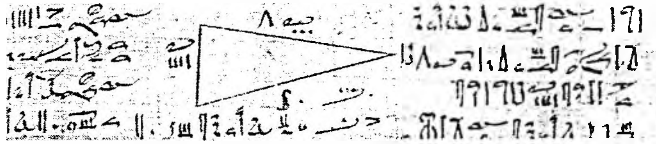


Babilonia, capital de un vasto territorio, fue centro cultural de oriente a partir del siglo XVII (a.n.e). Resulta destacable el aporte de los babilonios en matemática, en especial en la Trigonometría.

Los egipcios

El problema 56 del papiro Rhind, presenta un interés especial porque contiene lo que podríamos llamar uno de los rudimentos de Trigonometría y de una teoría de triángulos semejantes. En la construcción de las pirámides, un problema esencial era el de mantener una pendiente uniforme en las cuatro caras, por ende puede haber sido este problema el que llevó a los egipcios a introducir un concepto equivalente al de la cotangente de un ángulo.

La mayor parte de nuestro conocimiento acerca de la matemática egipcia proviene del papiro de Ahmes o de Rhind, el documento más extenso que se tiene del antiguo Egipto. Una relación matemática contenida en el papiro es: la razón del perímetro de la base es a la altura de la pirámide de Keops como 44/7 (ciertamente muy próxima), que es el doble de 22/7, aproximación de π muy usada modernamente, pero hay que recordar que el valor que se deduce de π de los cálculos de Ahmes es algo menor que $3\frac{1}{6}$ y no $3\frac{1}{7}$.



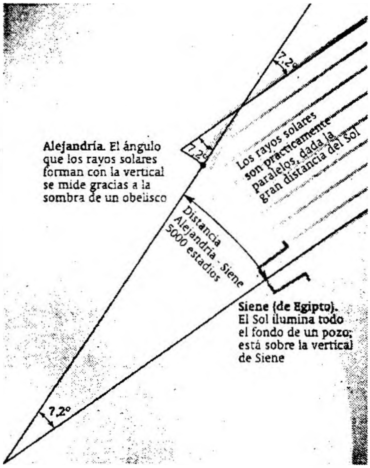
Papiro egipcio. Evidencia del aporte de este pueblo al conocimiento matemático.

Los griegos

En plena crisis de su sistema esclavista, Grecia inicia al siglo IV (a.n.e), su expansión sobre el este (Persia). Este proceso de expansión, que fue liderado por Alejandro Magno, trajo como consecuencia el Helenismo (contacto cultural occidente – oriente) representado por la ciudad de Alejandría en Egipto, ciudad que se convertiría pronto en la punta de lanza de la investigación científica y en sede de los mejores pensadores.

Eratóstenes (275 – 194 a.n.e.)

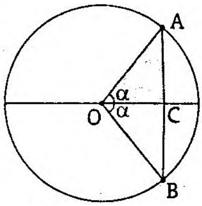
Matemático griego, educado en Atenas y Alejandría, llamado también el medidor de la Tierra, ya que fue el primero en hacer mediciones de la circunferencia de nuestro planeta. En Alejandría los rayos solares con la vertical forman un ángulo de 7,2° y es igual al ángulo que se forma en el centro de la Tierra con la prolongación de los rayos de Siene como 7,2° es 1/50 de 360°, la distancia Alejandría – Siene 5 000 estadios (1 estadio = 0,1575 km) es 1/50 de la circunferencia de la Tierra por lo que al multiplicar por 50 a dicha distancia obtenemos la longitud de la circunferencia de la Tierra, así como podemos deducir su diámetro. Sus resultados aproximados fueron 250 000 estadios (o sea, 39 375 km) para la circunferencia de la Tierra. Los cálculos fueron impresionantemente certeros, si tenemos en cuenta el nivel técnico de la época; hoy se calcula en 40 008 km.



Hiparco de Nicea (aprox. 190 a 125 a.n.e.)

La Trigonometría aparece como necesidad de la Astronomía, a fin de resolver problemas de la esfera celeste. Hiparco de Nicea es justamente considerado la autoridad máxima entre los astrónomos griegos, y el astrónomo más grande de la antigüedad (tuvo un observatorio astronómico en Rodas entre los años 128 – 127 a.n.e.) A partir de observaciones sistemáticas, hechas con los recursos disponibles en esa época, solo era posible deducir racionalmente que la Tierra era el centro del universo, e Hiparco cometió ese error, difundido posteriormente por Ptolomeo. Hiparco fue el primero en determinar con precisión el aparecer y el ocaso de varias estrellas, usando para ello una tabla de cuerdas por él calculada. El resultado fue una obra de doce volúmenes. Según Teón de Alejandría, ese tratado contenía una teoría general de la Trigonometría y algunas tablas. Estas tomaban como base la división del círculo en 360° y daban grado por grado el valor de las cuerdas de los diversos arcos.

En cuanto a la Trigonometría rectilínea se refiere, conoció la fórmula que, con nuestra notación, sería $\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$.

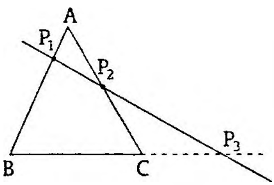


$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{AC}{OA} = \frac{\frac{1}{2}\text{cuerda AB}}{OA} = \frac{1\text{ cuerda AB}}{120}$$

Los matemáticos griegos no usaban el seno de un ángulo sino usaban la cuerda del arco duplo AB. También consideraban el radio OA con longitud 60 y dividían el círculo en 360 partes iguales.

Menelao de Alejandría (100 a.n.e.)

Compone un trabajo en seis libros sobre los cálculos de cordones de arcos (presentado como Geometría esférica). Menelao demuestra teoremas sobre los triángulos esféricos; probó, por ejemplo, que si dos triángulos esféricos tienen ángulos correspondientes iguales, entonces los triángulos son iguales o congruentes. Introdujo un teorema, que lleva su nombre, a fin de probar el resultado correspondiente para triángulos esféricos.



Teorema de Menelao. Si el triángulo ABC es cortado por una recta que interseca sus tres lados en P_1, P_2 y P_3 entonces

$$\frac{P_1A \cdot P_2C \cdot P_3B}{P_1B \cdot P_2A \cdot P_3C} = 1$$

Claudio Ptolomeo (180 d.n.e.)

Hizo progresar la Trigonometría y la enriquece con nuevas fórmulas no conocidas por Hiparco. Los trabajos de Ptolomeo están contenidos en su obra inmortal denominada por los árabes *Magiste* (El mayor). De ese vocablo, al cual se le agregó el artículo Al, surgió el nombre *Almagesto* (Al–magiste) con el que hoy conocemos la obra, que significa ***sintaxis matemática***. El *Almagesto* describe matemáticamente el funcionamiento del sistema solar. Señalaba que la Tierra era el centro del sistema solar, es decir defendía la teoría geocéntrica. Posteriormente, dicha teoría fue sustituida en el siglo XV por Nicolás Copérnico (1473–1543) quien propone que era el Sol y no la Tierra el verdadero centro (teoría heliocéntrica). En un segundo libro Ptolomeo difunde una tabla de cuerdas y conceptos rudimentarios de Trigonometría esférica.

En Geometría demuestra el teorema que hoy lleva su nombre: *El producto de las diagonales de un cuadrilátero inscrito en una circunferencia es igual a la suma de los productos de los lados opuestos.*

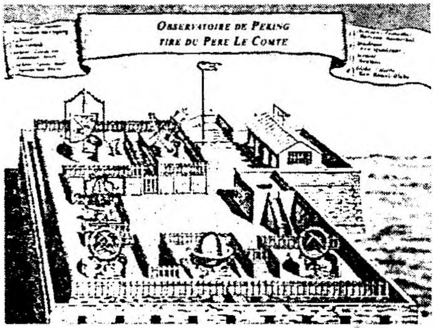


El interés de Ptolomeo por la astronomía impulsó el desarrollo de la Trigonometría. En la imagen, Ptolomeo observando las estrellas.

Este teorema, en el caso particular de que uno de los lados del cuadrilátero sea el diámetro, conduce a las identidades trigonométricas de seno y coseno de la suma y diferencia de dos arcos.

$$\text{sen}(\alpha \pm \beta) = \text{sen}\alpha \cos\beta \pm \cos\alpha\, \text{sen}\beta$$

Aportes de China



Observatorio chino de un grabado de historia desvoyages, 1747.

El primer texto que aparece sobre matemática fue gracias a los aportes de Chou Pei Suan Ching (400 a.n.e. aproximadamente). En esta obra encontramos las propiedades de los triángulos rectángulos así como una demostración geométrica del Teorema de Pitágoras.

Es preciso indicar que el matemático chino Tsu Chung Chi (hacia el año 450) había conseguido idear, por el método del perímetro, la siguiente desigualdad:

$$3{,}1415926 < \pi < 3{,}1415927$$

APORTES DURANTE EL FEUDALISMO

En Europa occidental, el conocimiento científico y por tanto matemático, no logra un desarrollo considerable. Esto se debió al predominio de la escolástica, que priorizaba el estudio de la biblia antes que el uso de la experiencia y la razón para interpretar la realidad. Además por la organización económica del feudalismo (autarquía), escaso comercio, no había incentivos para desarrollar el conocimiento científico. Sin embargo, en Oriente los árabes, herederos de la ciencia oriental, conocedores de las obras griegas, y en contacto con el Imperio Bizantino y la India, fueron los que más aportaron al progreso y difusión de la ciencia.

La antigua India

En los siglos V – XII d.n.e. tenemos eminentes científicos indios, matemáticos y astrónomos: Aryabhata (finales del siglo V), Brahmagupta (nace en el año 598); Mahavira (siglo IX), Braskara Akaria (nace en el año 1114).

De Aryabhata, que vivió en el noreste de la India, quedaron sus obras en versos de contenido matemático y astronómico. En ellas están formuladas las reglas de la matemática elemental: la Aritmética, la Geometría y la Trigonometría. La matemática Hindú avanzó considerablemente, en método y precisión, más allá de la Trigonometría griega, dando una tabla de senos calculada para cada 3,75° de arco hasta 90°. Es innegable al aporte de los hindúes en funciones trigonométricas: seno, coseno, senoverso $(\text{vers}\,\alpha = 1 - \cos\alpha)$.

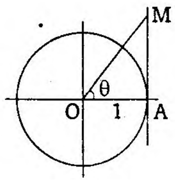
Los árabes

A la edad media del mundo occidental corresponde la edad de oro del mundo musulmán que desde el siglo VII al XII se extendió desde la India hasta España.

Durante esa época, el árabe fue la lengua internacional de la matemática. Los matemáticos árabes conservaron el patrimonio matemático de los griegos, divulgaron los conocimientos matemáticos de la India, asimilaron ambas culturas e hicieron avanzar tanto la Trigonometría como el Álgebra.

Abu Al–Wafa (940 – 997)

De origen iraní, fue un destacado astrónomo y matemático. Entre sus aportes en Trigonometría tenemos el cálculo del segmento AM como la $\tan\theta$ en un círculo unitario. Asimismo, logra estudiar las identidades trigonométricas.



$$\csc\theta = \frac{1}{\operatorname{sen}\theta} \; ; \; \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} = \tan\theta$$

$$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} \; ; \; \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta} = \cot\theta$$

Al Battani (Albatenus 858 – 929)

Tiene el mérito de haber empleado por primera vez, después de los hindúes, los senos en vez de las cuerdas. Además, en la traducción latina de sus obras hace su primera aparición sinus (senos). El Teorema de los senos $\frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{b}{\operatorname{sen} B} = \frac{c}{\operatorname{sen} C}$ aparece aplicado por Al Battani; y años más tarde, por el persa Abn–Nasr. Al Battani tenía una motivación especial para el estudio de la astronomía, demostró que la distancia más lejana del Sol de la Tierra varía y, consecuentemente, los eclipses del Sol son posibles así como los eclipses totales.



Al Battani aplica conocimientos propios de Trigonometría para sus estudios astronómicos.

Al–Biruni (Irán 973 – 1048)

Filósofo, astrónomo y matemático. Su contribución más grande a la matemática probablemente está en Trigonometría (once libros) donde, tomando y corrigiendo los resultados de Ptolomeo, establece tablas muy precisas: los cálculos de medio cordón (los senos futuros).

Aplica a la Astronomía los métodos geoclésicos de triangulación (los cálculos de distancias y áreas).

Nasir Al – Tusi (Irán 1201 – 1274)

Científico, matemático, astrónomo. Escribe diversos tratados sobre asuntos variados de Álgebra, Aritmética, Geometría, Trigonometría, Lógica, Medicina, etc. Construye un observatorio en Meragha, incluso utilizó el *Astrolabio* e introdujo una tabla muy exacta de los movimientos planetarios. Aportó a la Trigonometría esférica, aporte que incluye seis fórmulas fundamentales para la solución de triángulos esféricos.

Al – Kashani (Irán 1350 – 1439)

Uno de los matemáticos más grandes de aquellos tiempos. Desarrolla el uso del sistema de numeración en base 60, que fue utilizado por los astrónomos babilonios.

Se debe a Al–Kashani la generalización del Teorema de Pitágoras, posteriormente expresado por Vieta bajo la forma

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

Si la $m\measuredangle A = 90°$ se recupera la fórmula de Pitágoras $a^2 = b^2 + c^2$

APORTES DURANTE EL CAPITALISMO

Será durante el Capitalismo, el periodo en que la matemática, las ciencias naturales y la ciencia en general alcanza el mayor desarrollo. Esto se explica porque ya predomina una nueva forma de ver el mundo que nos rodea, desarrollada por la emergente burguesía. La lógica imperante consistía en sacar el mayor provecho de la naturaleza, producto de ver en toda ella una fuente de mercancía.

El Humanismo, que sostenía el conocimiento basado en la razón y el estudio de la cultura greco–latina, sirve de base para lograr nuevos conocimientos, no solo en Matemática, sino en todos los campos del saber. Se avanza no solo en la observación sino en la preparación de herramientas (telescopio) y en la experimentación.

Georg Von Peurbach (1423 – 1461)

Astrónomo austríaco, fundador de la astronomía alemana y profesor en la Universidad de Viena, se ocupó de la teoría del movimiento de los planetas. Enseñó durante algunos años en Italia. Entre sus alumnos se encontró el famoso Johann Müller. Admirador de Ptolomeo. Abandonando el cartabón del maestro, dejó de considerar las cuerdas y compuso una tabla de valores del seno. Tradujo el Almagesto de Ptolomeo directamente del griego.

Johan Müller (1436 – 1476)

Astrónomo y matemático alemán, nacido en Konigsberg y fallecido en Roma, conocido por **Regiomontano**, presentó en 1464 una obra titulada *Triangulis omnimondis libre quinque*, primer libro tratado de Trigonometría plana y esférica escrito por un europeo. Esta obra además es interesante desde el punto de vista matemático pues en ella se expusieron sistemáticamente los métodos de resolución de triángulos. Los aportes de Peurbach y Regiomontano no pasarían inadvertidos a un joven que estudiaba en la Universidad Jagiellonsky de Cracovia: se trata de Nicolás Copérnico. Regiomontano, considerado padre de la Trigonometría moderna, desarrolla a la Trigonometría como una rama independiente de la Astronomía. Entre los problemas que planteó Regiomontano se puede citar ¿a qué distancia debe ubicarse un observador para que una estatua situada en un pedestal le parezca lo mayor posible?



Müller aporta significativamente a la Trigonometría, en especial a través de una teoría sistemática sobre métodos de resolución de triángulos.

Jorge Joaquín Rético (1514 – 1567)

Astrónomo y matemático austríaco. Es conocido por la publicación de cálculo de tablas de los valores del seno, de la tangente y de la secante; para tal efecto empleó las identidades siguientes

$$\text{sen } ma = a \text{ sen } (m-1)\, a \,.\, \cos a - \text{sen}(m-2)\, a$$

$$\cos ma = a \cos (m-1)\, a \,.\, \cos a - \cos(m-2)\, a$$

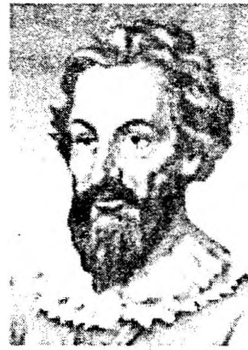
El texto que muestra las tablas de funciones trigonométricas fue completado y publicado en 1596.

Ludolph Van Ceulen (1540 – 1610)

Matemático holandés que introduce las identidades para un arco mitad, a saber

$$\text{sen}\frac{a}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos a}{2}} \quad \text{y} \quad \cos\frac{a}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos a}{2}}$$

Francisco Vieta (1540 – 1610)



Los trabajos de Vieta permitieron ampliar y profundizar los estudios trigonométricos.

Matemático francés. Publica su primer trabajo de matemática en París en 1571 (Canónigo Mathematicus). Sistematiza la Trigonometría y presenta las tablas trigonométricas; es el primer autor de las fórmulas analíticas que sirven para la resolución de los triángulos, expone reglas para la construcción de los senos, de las tangentes y de las secantes. Para sus tablas aplica las fórmulas

$$\cos^2\alpha = r^2 - \operatorname{sen}^2\alpha$$

$$r - \cos\alpha = 2\operatorname{sen}^2\frac{\alpha}{2}$$

$$4\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) = (\operatorname{sen}\alpha - \operatorname{sen}\beta)^2 + (\cos\beta - \cos\alpha)^2$$

Para el cálculo de los valores de las tangentes y secantes emplea las fórmulas

$$\tan\left(45° + \frac{\alpha}{2}\right) = 2\tan\alpha + \tan\alpha\left(45° - \frac{\alpha}{2}\right)$$

$$\sec\alpha = \frac{1}{2}\tan\left(45° + \frac{\alpha}{2}\right) + \frac{1}{2}\tan\left(45° - \frac{\alpha}{2}\right)$$

Para la resolución de triángulos evita hacer trazos como el de una altura y aplica la ley de los senos

$$\frac{a}{\operatorname{sen}A} = \frac{b}{\operatorname{sen}B} = \frac{c}{\operatorname{sen}C}$$

Presenta la ley de tangentes

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\tan\left(\frac{A+B}{2}\right)}{\tan\left(\frac{A-B}{2}\right)}$$

Para la resolución de los triángulos oblicuángulos en que se conocen los tres lados, Vieta descompone el triángulo dado en dos triángulos rectangulares y para el cálculo del ángulo aplica la ley de los cosenos, que él presenta en la forma

$$\frac{2a}{a^2 + b^2 - c^2} = \frac{1}{\operatorname{sen}(90° - c)}$$

Asimismo, Vieta sistematiza la trigonometría esférica que hasta entonces era un conjunto de fórmulas inconexas, y demuestra que

$$\operatorname{sen}\alpha - \operatorname{sen}\beta = 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

También dedujo fórmulas para $\operatorname{sen}(n\theta)$ y $\cos(n\theta)$.

Durante el gobierno del rey de Francia Enrique IV, específicamente en 1593 el matemático belga Adriano Roonen propone un problema de ecuación de grado 45.

$$x^{45} - 45x^{43} + 945x^{41} - \ldots - 3795x^3 + 45x = K$$

Para entonces el embajador de los Países bajos hizo el desafío a Enrique IV que la calidad de los matemáticos franceses era pobre y que ningún francés podrá resolver el problema de Roonen. Enrique IV, que era amigo de Vieta convocó a este que lo percibió y resolvió rápidamente la ecuación dada indicando que es el desarrollo de $\text{sen}45\theta$ en términos de $\text{sen}\theta$ con $K = \text{sen}45\theta$ y $x = 2\,\text{sen}\theta$. Vieta sabía que la ecuación podía ser descompuesta en una de grado 5 y dos de grado 3 por lo que él las resolvió, para sorpresa de todos.

Tycho Brahe (1546–1601)

Astrónomo danés. Considerado el observador más grande del periodo anterior a la invención del telescopio. Construye instrumentos cada vez mayores y más precisos. El rey de Dinamarca Federico I cede a Brahe en 1576 la pequeña isla de Hven (hoy territorio sueco). Aquí Tycho Brahe hizo construir el observatorio más grande de la época al que llamó Uraniborg, "ciudad del cielo"; construyó cuadrantes, sextantes, esferas armilares, escuadras y gnomones con gigantescas escalas graduadas. Más adelante estos datos recopilados fueron utilizados por Kepler (1571 – 1630).

Thomas Finck (1561–1656)

De origen danés. En el libro 14 de su *Geometría Rotundi* introduce las palabras tangente y secante, que fueron adoptadas prontamente por el inglés. Quizás fue el primero que usó las abreviaturas para la razones trigonométricas.

Edmundo Gunter (1581–1626)

Aparece la expresión co–sinu, abreviación de complemento del seno; la palabra cotangente cuyo origen es análogo al del coseno; y finalmente la palabra cosecante, probablemente por complemento de secante.

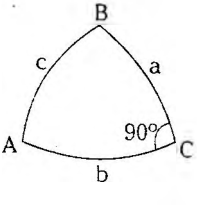
Bartolome Pitiscus (1561–1613)

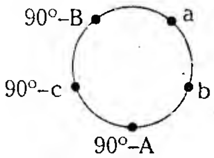
Matemático alemán. El término trigonometría aparece por primera vez como título de su obra ***Trigonometría***, publicada en Heidelberg en 1595. La misma que consistía de 5 libros sobre trigonometría plana y esférica.

Jhon Napier o Neper (1550–1617)

Matemático escocés. Usó la expresión del seno en un círculo; elabora fórmulas simplificadas para cálculos trigonométricos en Astronomía. Neper inventa los logaritmos. Destaca por definir el logaritmo de seno (para seno entre 0 y 1).

Neper es más conocido en Trigonometría porque presentó 10 fórmulas prácticas para la resolución de triángulos esféricos rectángulos, conocidas como *Reglas de Neper*, las cuales se obtienen a partir del siguiente esquema





Henry Briggs (1561–1631)

Matemático inglés, amigo de J. Napiers. Se unieron para la construcción de una tabla logarítmico-trigonométrica, publicada por Henry Gellibrand (1597 – 1637), en su obra *Trigonometría Británica*.

Un primer ejemplo de grado centesimal se halla en un manuscrito del año 1446. La subdivisión centesimal fue usada por Briggs. En tiempo de la Revolución Francesa se intentó implantar el sistema centesimal para la medida de los ángulos. Y trabajaron en ello los grandes matemáticos franceses Lagrange y Callet.

Leonardo Euler (1707 – 1783)



Resulta innegable la contribución de Euler al desarrollo de la matemática. Sus estudios sobre trigonometría esférica y rectilínea son fundamentales.

Suizo, aportó en la Astronomía (las órbitas globales, trayectorias de los cometas), en las ciencias físicas (los campos de naturaleza magnética, aerodinámica, óptica, ondulatoria de luz, etc.) y en la matemática. En esta última, contribuyó en todas las ramas de la Aritmética, en la Geometría del diferencial, análisis numérico y funcional.

Realiza importantísimos trabajos en Trigonometría, investiga la trigonometría esférica, aunque también tuvo aportes en trigonometría rectilínea. Considera el radio del círculo trigonométrico igual a 1, define las seis razones trigonométricas como funciones del ángulo y las designa en forma en que aparece como una dependencia funcional. Sólo con este matemático comienza a tenerse una idea exacta de la variación de las funciones seno, coseno. Utilizó **At** para el arco tangente en *Scientia sive del motus Mechanica*.

En 1770, Euler publica en alemán una introducción completa del Álgebra, donde explica plenamente los números negativos y realiza un estudio definitivo del número real.

A Euler se le debe la notación de π, **i** para $\sqrt{-1}$ ó $i^2=-1$ (desde 1727, el tenía sólo 20 años). La fórmula de Euler, que establece el lazo entre la Trigonometría, el exponencial y el análisis complejo, es

$$e^{ix} = \cos x + i\,\text{sen}\,x$$

El famoso número **e**, también conocido como número de Euler tal que $\text{Ln}\,e=1$, se establece también en la serie

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots \frac{x^n}{n!}$$

Vincenzo Riccati (1707 – 1775)

Introdujo las funciones hiperbólicas, utilizó **sh** y **ch** para el seno y el coseno hiperbólico. También **sc** y **cc** para las funciones circulares.

George Simon Klügen (1739 – 1812)

Matemático alemán. Introduce la denominación de funciones trigonométricas y posteriormente se usa la expresión funciones circulares.

Abraham de Moivre (1667 – 1754)

De origen francés, pero nacionalizado inglés. Era miembro de la Sociedad Real desde 1697. Publica los trabajos en el libro *Cálculo de las probabilidades*. Era el introductorio de la trigonometría de las cantidades imaginarias. En 1730 introduce los números imaginarios en Trigonometría y establece la fórmula de De Moivre

$$(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)^n = \cos n\theta + i\,\text{sen}\,n\theta$$

Otro importante avance del análisis fue el estudio desarrollado por Joseph Fourier (1768–1830). Fourier en 1812 presenta las sumas infinitas de expresiones con funciones trigonométricas. Estas se conocen hoy como series de Fourier y son herramientas muy útiles tanto en las matemáticas puras como en las aplicadas.

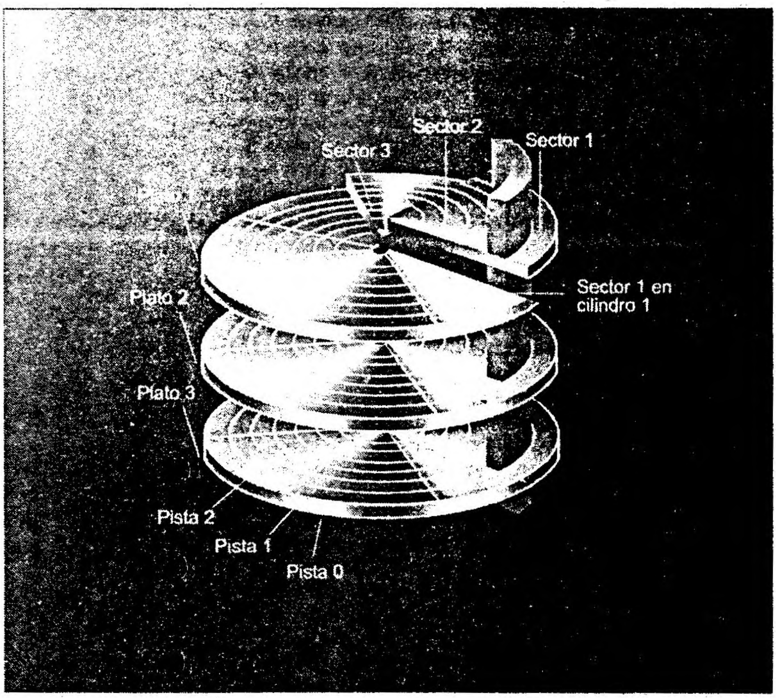
Durante los siglos XVI, XVII y XVIII la Trigonometría se configura prácticamente como es hoy. Por otra parte, el desarrollo de los estudios astronómicos, geodésicos, etc. y sus aplicaciones en la navegación y la técnica la convierten en una materia de alto interés práctico.

CAPÍTULO

I

Sistemas de medición angular y longitud de arco

TRIGONOMETRÍA



Tecnología en discos duros

El diseño de los discos que almacenan información está compuesto por uno o más platos, hechos de aluminio recubiertos por una sustancia magnética por ambas caras y un radio aproximado de 4 cm. Cada disco se encuentra dividido en 8 sectores circulares de igual área, por lo que a cada sector le corresponde un ángulo central de $\pi/4$ rad (sistema radial). La información será registrada en las llamadas pistas, las cuales son anillos circulares concéntricos.

MÉTODOS ANTIGUOS DE MEDIR LÍNEAS Y ÁNGULOS EN UNA CIRCUNFERENCIA

Los egipcios y los babilonios inventaron métodos para medir los ángulos determinados por varias estrellas. En ese tiempo, alrededor de dieciséis siglos antes de nuestra era, el escriba Ahmes escribió su famoso papiro en el que se evidencia que los egipcios conocían, entre otras muchas cosas, que la circunferencia de un círculo es un número fijo de veces su propio diámetro.

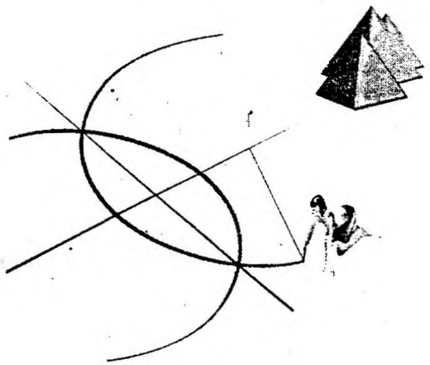
Es un número inconmensurable que desde el siglo XVII es designado con la letra griega π.

La medida de los ángulos que hoy nos es común, se remonta al tiempo de la Escuela de Alejandría en los principios de nuestra era. Los matemáticos griegos de dicha escuela dividieron la circunferencia en 360 partes iguales, posiblemente copiando a los babilonios, llamando a cada una de dichas partes una moira. Esta palabra griega se tradujo en latín medioeva como de *gradus*, "un grado o paso a partir de". Así pues, nuestra palabra "grado" significa el primer paso para determinar la medida de un giro o revolución completa, es decir $\frac{1}{360}$ de una revolución.



Representación de Euclides quien, bajo el reinado de Tolomeo I, fundó la Escuela de Alejandría hacia el año 300 antes de nuestra era.

La siguiente etapa fue dividir cada grado en sesenta partes iguales, a cada una de las cuales se le dio el nombre de pars minuta prima, "primera parte menor". De dicho nombre se deduce nuestra palabra "minuto" (abreviado) con un significado doble de "primera parte menor de un grado" o "primera parte menor de una hora". Dicha pars minuta prima se dividió nuevamente en 60 partes iguales, cada una de las cuales recibió el nombre de pars minuta secunda, "segunda parte menor". De ahí se deriva nuestra palabra "segundo", (abreviado) con un doble significado de "segunda parte menor de un grado" o "segunda parte menor de una hora". Sexagesimus es la palabra latina correspondiente a sesentavo, por tal razón esta medida angular se conoce como sexagesimal. En la práctica, se toma por unidad de arco el cuarto de la circunferencia, o bien la 360va. parte de la circunferencia o grado. Desde luego los ángulos pueden también medirse de dos maneras: en ángulos rectos o fracciones de ángulos rectos, o en grados, minutos y segundos, pudiendo fácilmente pasarse de una a otra de estas medidas.



Las bases de 200 metros de las pirámides eran exactas hasta una o dos pulgadas. Los hombres que supervisaban las operaciones de la construcción lograban esta exactitud usando estaquillas y lienzas para calcular un ángulo recto preciso. Logrado esto se clavan postes en la tierra para señalar el área del lugar de la construcción.

Sistemas de medición angular y longitud de arco

OBJETIVOS

- Diferenciar el ángulo como figura geométrica y el ángulo generado por la rotación de un rayo alrededor de un punto fijo (vértice), todo ello en un mismo plano.
- Conocer las principales unidades de medición angular.
- Aplicar la medida en radianes de un ángulo para calcular la longitud de un arco y el área de un sector circular.
- Establecer una relación para el número de vueltas y el ángulo girado por una rueda, disco, polea, engranaje, etc.

INTRODUCCIÓN

En la vida cotidiana, es común ver el movimiento de las manecillas de un reloj, el radio de la rueda de una bicicleta, la hélice de un helicóptero, etc., los cuales nos dan la idea de ángulo generado que presenta características dinámicas. Dicho concepto será aplicado en capítulos posteriores, como por ejemplo, en la representación de ángulos en posición normal, arcos en la circunferencia trigonométrica y rotación de ejes. Sin embargo, para indicar la medida de un ángulo, es necesario asignarle ciertas unidades, ya sea grados o radianes. Los grados tienen utilidad diversa en la resolución de triángulos, topografía, coordenadas geográficas, etc.; pero en física, matemática superior e ingeniería, es insuficiente tener ángulos en grados, de allí la importancia de expresarlos en radianes. La lectura de la página **24** explica aquello y a la vez nos invita a formularnos preguntas tales como ¿Qué es un sector circular?, ¿qué es un ángulo central?, ¿qué es sistema radial?, etc. Para averiguar la respuesta a estas y otras interrogantes le invitamos a que nos acompañe en el desarrollo del presente capítulo.

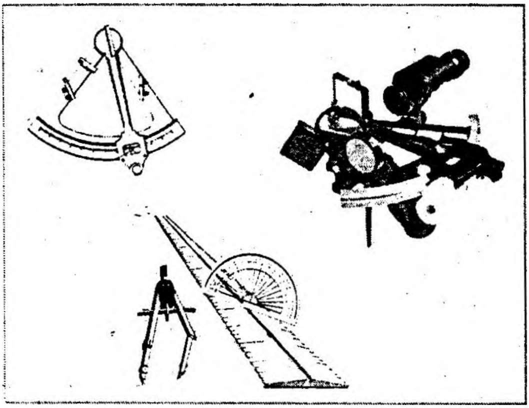


Figura 1.1
Instrumentos náuticos. De arriba hacia abajo: un compás, reglas paralelas para trazar líneas direccionales sobre la carta, compás de división, transportador para medir ángulos y sextante.

ÁNGULO TRIGONOMÉTRICO

Con la finalidad de estudiar el ángulo trigonométrico es necesario conocer el concepto de rayo. El rayo es una parte de la recta limitada de un extremo por un punto llamado origen e ilimitada en el otro extremo. A continuación sugerimos que observe la figura 1.2.

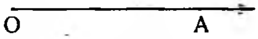


Figura 1.2

Notación: $\overrightarrow{OA}$
(lo cual usted leerá como rayo OA)

Es conveniente indicar el ángulo trigonométrico, tomando en cuenta su amplitud y orientación. El ángulo trigonométrico es generado por la rotación de un rayo en un plano alrededor de un punto fijo, denominado vértice, desde una posición inicial (lado inicial) a una posición final (lado final).

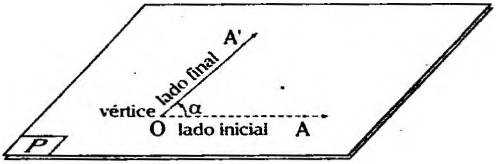


Figura 1.3

En la figura 1.3 el rayo OA gira hasta la posición OA' en el sentido mostrado generando así el ángulo trigonométrico α , no debe olvidar que esta rotación de giro se realiza en el plano P.
La letra P que se halla en la parte inferior izquierda indica que la región sombreada representa a un plano de nombre P.

Ángulos Positivos y Ángulos Negativos

Por convención se generan ángulos positivos cuando el rayo gira en sentido contrario del movimiento de las manecillas del reloj (sentido antihorario); el giro del rayo en el sentido del movimiento de las manecillas del reloj (sentido horario) generará ángulos negativos. En la figura 1.4 se grafica lo mencionado.

a) Giro Antihorario *b) Giro Horario*

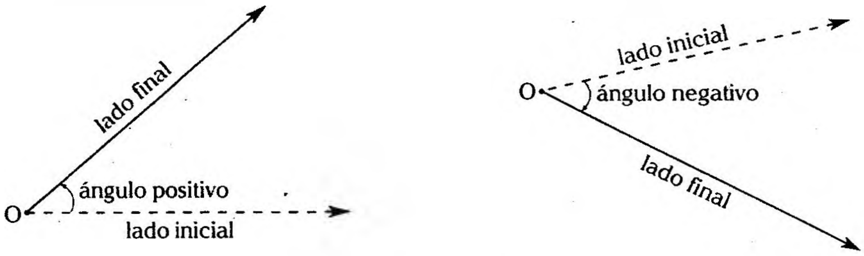


Figura 1.4

La magnitud tomada en cualquier dirección de rotación del rayo que genera un ángulo trigonométrico, asume cualquier valor numérico puesto que dicho rayo puede ser rotado en sentido positivo o negativo tal como se quiera.

Antes de hacer girar un rayo, la medida del ángulo es cero, a medida que éste gira en sentido antihorario (figura 1.5) se generan ángulos cada vez mayores. Para entender aquello, observe con detalle la secuencia de cuánto ha rotado cada ángulo, notando que va en aumento al pasar de α a β, de β a θ y finalmente de θ a γ, aunque esto puede seguir aumentando.

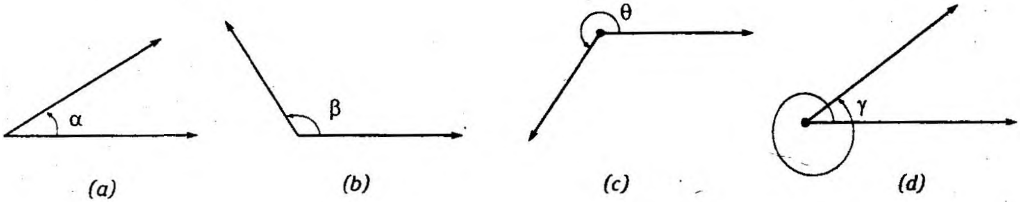


Figura 1.5

Luego de observar estas gráficas podemos entender ahora la siguiente desigualdad: $0 < \alpha < \beta < \theta < \gamma$
Y al girar en el sentido horario (figura 1.6) se generan ángulos cada vez menores.

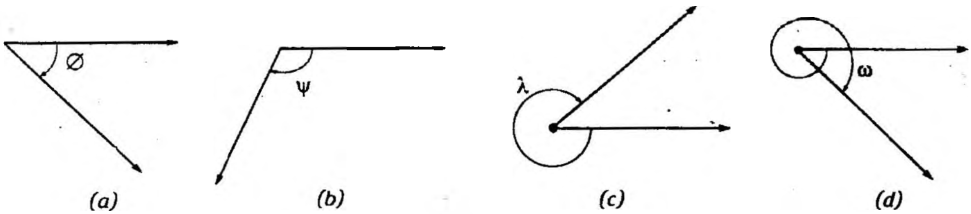


Figura 1.6

De igual forma que en el caso anterior, dada la secuencia de los gráficos podemos entender la desigualdad: $0 > \varnothing > \psi > \lambda > \omega$

Observación

Como el ángulo trigonométrico se genera por la rotación de un rayo, entonces desde este punto de vista, el ángulo de una vuelta ($\sphericalangle$1V) es aquel que se genera cuando la posición final y posición inicial coinciden por primera vez (figura 1.7)
En la presente obra consideramos al ángulo de una vuelta en sentido antihorario por su aplicación de sistemas de medición angular.



Figura 1.7

SISTEMAS DE MEDIDAS ANGULARES

Los sistemas de medidas angulares más usados son tres: sexagesimal, centesimal y radial. A continuación explicaremos los pormenores de cada sistema.

El Sistema Sexagesimal

Tiene como unidad de medida al grado sexagesimal (1°), el cual es igual a 1/360 del ángulo de una vuelta, así:

$$m\sphericalangle \text{ vuelta} = 360^\circ$$

Las subunidades de este sistema son el minuto sexagesimal ($1'$) y el segundo sexagesimal ($1''$), los cuales cumplen

$$1^\circ = 60' \;\wedge\; 1' = 60''$$

Entonces $1^\circ = 60\times 1' = 60\times 60''$

Por lo tanto

$$1^\circ = 3600''$$

El Sistema Centesimal

Tiene como unidad de medida al grado centesimal (1^g), el cual es igual a 1/400 del ángulo de una vuelta, así

$$m\sphericalangle 1\text{vuelta} = 400^g$$

Las subunidades de este sistema son el minuto centesimal (1^m) y el segundo centesimal (1^s), los cuales cumplen

$$1^g = 100^m \;\wedge\; 1^m = 100^s$$

Entonces $1^g = 100\times 1^m = 100\times 100^s$

Por lo tanto

$$1^g = 10000^s$$

Nota Histórica

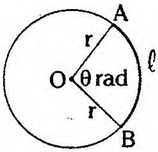
El sistema centesimal intentó desplazar al sistema sexagesimal, pero no resultó práctico, porque para su empleo era necesario modificar las tablas, cartas geográficas, naúticas, astronómicas, y cambiar la graduación de muchos aparatos. Este sistema fue ideado por el geodesta francés J. C. Borda, y aún se usa en el ejército del país de este científico.

El Sistema Radial, Circular o Internacional

Tiene como unidad de medida al radián (1 rad.). En la matemática, como en otras ciencias (física, ingeniería, astronomía, etc), se utiliza ampliamente la medición de ángulos en radianes.

Definición

Si un ángulo central mide en radianes θ en un círculo de radio r y subtiende un arco de longitud ℓ (figura 1.8), entonces θ se halla con la fórmula



$$\theta = \frac{\ell}{r}$$

Figura 1.8

Por ejemplo, si $\ell = 2r$, se tiene que $\theta = 2$, entonces la medida del ángulo central es 2 rad. (ver figura 1.9)

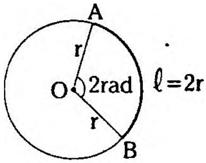


Figura 1.9

Nota

Un radián (1 rad) es la medida del ángulo central que determina sobre una circunferencia un arco de igual longitud al radio de la circunferencia que lo contiene.

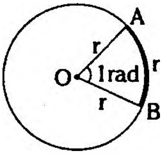


Figura 1.10

En una circunferencia, la relación entre las medida de su ángulo central, la longitud de una circunferencia y su radio se determina así

$$\theta = \frac{\ell_{circunferencia}}{radio}$$

$$\theta = \frac{2\pi \not{r}}{\not{r}} = 2\pi$$

Entonces

$$m\sphericalangle 1 vuelta = 2\pi \text{ rad}$$

Nota Histórica

El físico e ingeniero inglés James Thomson (1822 – 1892) presenta el 5 de junio de 1873 por primera vez la palabra **radián** usado en Funciones Trigonométricas y en octubre de 1960, la Décima Primera Conferencia General (Internacional) sobre pesas y medidas redefinió algunas de las unidades métricas originales y amplió el sistema con el fin de incluir otras unidades físicas y de ingeniería. A este sistema ampliado se le dio el nombre de Sistema Internacional de Unidades, y la unidad de medida angular, de dicho sistema es el radián (1 rad).

Observación

- Usualmente en el lenguaje matemático no se escribe "radianes" pues ya se sobreentiende; por ejemplo, se escribe $m\sphericalangle AOB = 2$ en lugar de la notación completa $m\sphericalangle AOB = 2\text{ rad}$, $\tan\left(\frac{\pi}{6}\right)$ en lugar de $\tan\left(\frac{\pi\text{ rad}}{6}\right)$.

- El número π experimentalmente se obtiene dividiendo la longitud de cualquier circunferencia por su respectivo diámetro y al efectuar dicha división se obtiene :

$$\pi = 3{,}14159265\ldots,$$

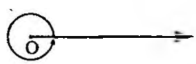
o sea, $\pi = \dfrac{\text{longitud de circunferencia}}{2r} \Rightarrow \text{longitud de circunferencia} = 2\pi r$

- Como $1°$ es la 360ava parte del ángulo de una vuelta, 1^g es la 400ava parte del ángulo de una vuelta, y 1rad es 2π ó $6{,}28\ldots$ ava parte del ángulo de una vuelta, entonces

$$1\text{ rad} > 1° > 1^g$$

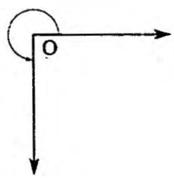
- Es necesario mostrar las equivalencias entre los sistemas de medidas mencionados, veamos los siguientes ángulos trigonométricos y sus respectivas medidas.

$\sphericalangle 1\text{ vuelta} = 360° = 400^g = 2\pi\text{ rad}$



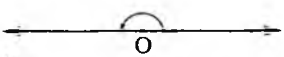
(a)

$\frac{3}{4}\sphericalangle 1\text{ vuelta} = 270° = 300^g = \frac{3\pi\text{ rad}}{2}$



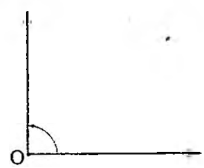
(c)

$\frac{1}{2}\sphericalangle 1\text{ vuelta} = 180° = 200^g = \pi\text{ rad}$



(b)

$\frac{1}{4}\sphericalangle 1\text{ vuelta} = 90° = 100^g = \frac{\pi\text{ rad}}{2}$



(d)

Figura 1.11

Ejemplos de Conversión entre Sistemas

Ejemplo 1
Exprese en radianes el ángulo 30°

Resolución

$$30^\circ = 30^\circ \times \underbrace{\left(\frac{\pi \text{ rad}}{180^\circ}\right)}_{\substack{\text{Equivale a 1} \\ \text{dado que } 180^\circ = \pi \text{ rad}}} = 30 \times \cancel{1^\circ} \times \frac{\pi \text{ rad}}{180 \times \cancel{1^\circ}} = \frac{\pi}{6} \text{rad}$$

Nótese que en el factor de conversión $\frac{\pi \text{rad}}{180^\circ}$ del ejemplo 1 se tiene que en el numerador está la unidad deseada (radianes) y en el denominador, la unidad del ángulo a convertir (grados sexagesimales).
Con este razonamiento podemos desarrollar más ejemplos.

Ejemplo 2
Exprese en radianes cada uno de los ángulos siguientes

a. 20° b. 55^g c. $\left(\frac{9}{2}\right)^\circ$

Resolución

a. $20^\circ = 20^\circ\left(\frac{\pi \text{ rad}}{180^\circ}\right) = \frac{\pi \text{ rad}}{9}$

b. $55^g = 55^g\left(\frac{\pi \text{ rad}}{200^g}\right) = \frac{11\pi \text{ rad}}{40}$

c. $\left(\frac{9}{2}\right)^\circ = \left(\frac{9}{2}\right)^\circ \times \left(\frac{\pi \text{ rad}}{180^\circ}\right) = \frac{\pi \text{ rad}}{40}$

Esta forma de convertir (método del factor unitario) también puede ilustrarse con el siguiente ejemplo:
¿Cuál será la estatura de una persona en pies, si la persona tiene una estatura de 1,68 m?

Como 1pie = 0,3048 m

$\Rightarrow 1{,}68 \text{ m} = 1{,}68 \text{ m} \times \left(\frac{1 \text{ pie}}{0{,}3048 \text{ m}}\right)$

$\Rightarrow 1{,}68 \text{ m} = 5{,}518 \text{ pies}$

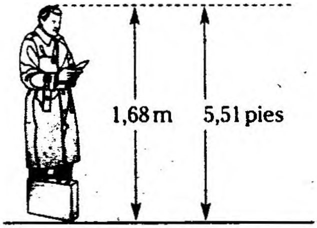


Figura 1.12

Observación

Para convertir grados sexagesimales a grados centesimales y viceversa, es conveniente que tengamos en cuenta que $90^\circ = 100^g$. Entonces $9^\circ = 10^g$

Ejemplo 3
Exprese 81° en grados centesimales, y 45^g en grados sexagesimales.

Resolución

a. $81^\circ = 81^\circ\left(\frac{10^g}{9^\circ}\right) = 90^g$

b. $45^g = 45^g\left(\frac{9^\circ}{10^g}\right) = \frac{405^\circ}{10} = 40{,}5^\circ$

Ejemplo 4
Exprese en grados sexagesimales cada uno de los ángulos siguientes.

a. $\frac{\pi \text{ rad}}{50}$

b. $\frac{2\pi \text{rad}}{3}$

Resolución

a. $\dfrac{\pi\text{ rad}}{50}=\dfrac{\pi\text{ rad}}{50}\left(\dfrac{180^\circ}{\pi\text{rad}}\right)=\dfrac{180^\circ}{50}=(3,6)^\circ$

b. $-\dfrac{2\pi\text{ rad}}{3}=-\dfrac{2\pi\text{ rad}}{3}\left(\dfrac{180^\circ}{\pi\text{ rad}}\right)=-120^\circ$

Nota

Cuando se escribe grados, se refiere a los grados sexagesimales. Observar que se están realizando mayor cantidad de ejemplos con ángulos en radianes y sexagesimales.
Modernamente se ha propuesto al sistema centesimal, pero este sistema ha prosperado poco, no ha sido muy usado en la matemática.

Ejemplo 5

Exprese en grados, minutos y segundos $\dfrac{\pi\text{rad}}{32}$.

Resolución

Como usted podrá entender se presentan dos casos:

a. Sistema sexagesimal
b. Sistema centesimal

Así tenemos

a. $\dfrac{\pi\text{rad}}{32}=\dfrac{180^\circ}{32}$ ...(1) (porque $180^\circ=\pi\text{rad}$)

$$\frac{\pi\text{rad}}{32}=5{,}625^\circ$$

$$\frac{\pi\text{rad}}{32}=5^\circ+0{,}625^\circ$$

$$\frac{\pi\text{rad}}{32}=5^\circ+0{,}625\not{^\circ}\times\left(\frac{60'}{1\not{^\circ}}\right)$$

(convirtiendo los decimales de grados a minutos, note que $\dfrac{60'}{1^\circ}=1$)

$\dfrac{\pi\text{rad}}{32}=5^\circ+37,5'$ $\qquad$ $\dfrac{\pi\text{rad}}{32}=5^\circ+37'+0,5'$

$$\frac{\pi\text{rad}}{32}=5^\circ+37'+0,5'\times\left(\frac{60''}{1'}\right)$$

(convirtiendo los decimales de minuto a segundos sexagesimales)

$$\frac{\pi\text{rad}}{32}=5^\circ+37'+30''$$

Pero por notación $5^\circ+37'+30''=5^\circ37'30''$

en general $\boxed{A^\circ+B'+C''=A^\circ B'C'';\ B,C<60}$

$$\therefore\ \frac{\pi\text{ rad}}{32}=5^\circ\,37'\,30''$$

Otra forma; de (1) se puede verificar

a. $\dfrac{\pi\text{rad}}{32}=\dfrac{45^\circ}{8}$

$$\begin{array}{r|l} 45^\circ & 8 \\ \hline 40^\circ & 5 \\ 5^\circ & \end{array}\qquad \begin{array}{r|l} 300' & 8 \\ \hline 60 & 37' \\ 56 & \\ 4' & \end{array}\qquad \begin{array}{r|l} 240'' & 8 \\ \hline 240'' & 30'' \\ 0 & \end{array}$$

este residuo a minutos $5^\circ=5(60')=300'$ $\quad$ este residuo a segundos $4'=4(60'')=240''$

Para dar la respuesta se sumarán los cocientes obtenidos

$$\frac{45^\circ}{8}=5^\circ+37'+30''=5^\circ37'30''$$

$$\therefore\ \frac{\pi\text{rad}}{32}=5^\circ37'30''$$

b. Se divide hasta obtener 5 cifras decimales

$$\frac{\pi rad}{32}=\frac{200^g}{32}=\frac{25^g}{4}=\underbrace{6}_{g},\underbrace{25}_{m}\underbrace{00}_{s}\overset{\text{Para el redondeo}}{0}...$$

(se agrupa de dos en dos de la coma a la derecha)

$$\Rightarrow \frac{\pi rad}{32}=6^g+25^m+0^s=6^g\,25^m$$

Pero por notación: $6^g+25^m=6^g\,25^m$

en general

$$A^g+B^m+C^s=A^g\,B^m\,C^s;\ B,C<100$$

$$\therefore \frac{\pi}{32}rad=6^g25^m$$

De igual forma usted puede verificar

i) $\frac{20^g}{3}$ a grados, minutos y segundos centesimales

$$\frac{20}{3}=6,6666666\,...$$

(pero sólo se necesitan 5 cifras decimales)

$$\Rightarrow \frac{20^g}{3}=\underbrace{6}_{g},\underbrace{66}_{m}\underbrace{66}_{s}\overset{\text{Para el redondeo}}{⑥}$$

$$\Rightarrow \frac{20^g}{3}=6^g+66^m+67^s$$

$$\therefore \frac{20^g}{3}=6^g66^m67^s$$

ii) $(2,003)^g=\underbrace{2}_{g},\underbrace{00}_{m}\underbrace{30}_{s}=2^g+0^m+30^s$

$$\therefore (2,003)^g=2^g\,30^s$$

iii) $(1,974)^g=\underbrace{1}_{g},\underbrace{97}_{m}\underbrace{40}_{s}=1^g+97^m+40^s$

$$\therefore (1,974)^g=1^g\,97^m\,40^s$$

Ejemplo 6

La medida del ∢ P en la figura 1.13 es de 144°18'35". Convierta dicha medida a grados expresado en decimales.

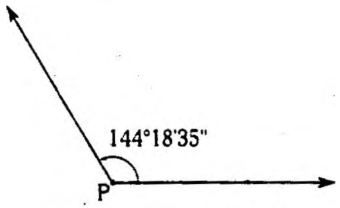


Figura 1.13

Resolución

Expresamos el ángulo dado como una suma de grados, minutos y segundos.

144°18'35" = 144°+ 18' + 35",

convirtiendo los minutos y segundos a grados

$$=148°+18'\left(\frac{1°}{60'}\right)+35''\left(\frac{1°}{3600''}\right)$$

$$=144°+0,3°+0,0097°$$

$$\therefore 144°18'35''=144,3097°$$

Observación

$$1rad=1rad\left(\frac{180°}{\pi rad}\right)=\frac{180°}{\pi}$$

Considerando $\pi=3,14159$

se tiene 1 rad = 57,296°

Ahora 1 rad en grados, minutos y segundos sexagesimales (usando calculadora) sería 1 rad = 57°17'44,8" con error menor de una centésima de segundo.

Ejemplo 7
Exprese el ángulo 1,5 rad a grados (notación decimal)

Resolución
$1{,}5 \text{ rad} = 1{,}5(1 \text{ rad}) = 1{,}5(57{,}296°) = 85{,}944°$

$\therefore 1{,}5 \text{ rad} = 85{,}944°$

Ejemplo 8
Exprese el ángulo 3 rad a grados, minutos y segundos sexagesimales.

Resolución
$3 \text{ rad} = 3(1 \text{ rad}) = 3(57°17'44{,}8")$

$3 \text{ rad} = 3(57°+17'+44{,}8") = 171°+51'+\underbrace{134{,}4"}_{120"+14{,}4"}$

$3 \text{ rad} = 171°+53'+14{,}4"$

$\therefore 3\text{rad} = 171°\,53'14{,}4"$

Ejemplo 9
Exprese α en grados minutos y segundos sexagesimales, siendo $\alpha = 9\left(\frac{1°}{1^g}\right)\text{rad}$

Resolución
Convirtiendo 1° a grados centesimales

$$\alpha = 9\left(\frac{1°}{1^g}\left(\frac{10^g}{9°}\right)\right)\text{rad} = 10 \text{ rad}$$

$$\alpha = 10(57°17'44{,}8") = 10(57°+17'+44{,}8")$$

$$\alpha = 570°+\underbrace{170'}_{120'+50'}+\underbrace{448"}_{420"+28"}$$

$$\alpha = 570°+2°+50'+7'+28" = 572°+57'+28"$$

$$\therefore \alpha = 572°57'28"$$

Observación

- Cuando dos ángulos trigonométricos tienen la misma amplitud de rotación pero orientaciones contrarias, entonces estos ángulos tienen diferente signo.

Ejemplo

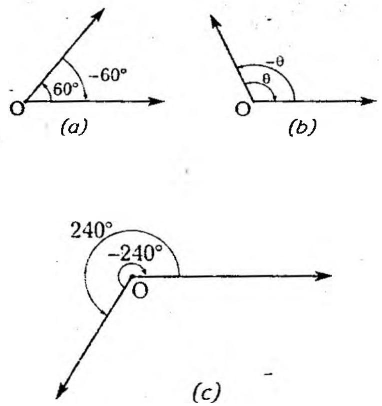


Figura 1.14

- En Geometría existen propiedades para ángulos, entonces para aplicar cualquiera de estas propiedades a los ángulos trigonométricos, estos deberán tener en primer lugar una misma orientación (o un mismo sentido de rotación).

Ejemplo 10
De la figura 1.15, ¿qué alternativa es correcta?

a. $\alpha+\beta=90°$
b. $\alpha-\beta=90°$
c. $\beta-\alpha=90°$
d. $-\alpha-\beta=90°$
e. $\beta=-2\alpha$

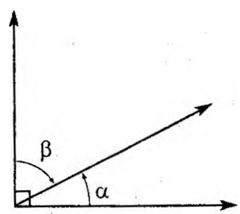


Figura 1.15

Resolución

Cambiando a β a su respectivo sentido opuesto (ver figura 1.16), entonces, en dicha figura se aprecia que los ángulos trigonométricos $\alpha, -\beta$ y $90°$ tienen la misma orientación (antihorario), por lo que podemos plantear que

$\alpha + (-\beta) = 90°$

$$\therefore \ \alpha - \beta = 90°$$

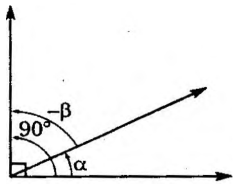


Figura 1.16

Nota Histórica

Para usos militares se utiliza una unidad angular que fue adoptada debido a que permite un cálculo fácil, rápido y preciso de distancias relativamente grandes, como es el caso de blancos para tiro de artillería. Tal unidad es la llamada **milésima o mil** (símbolo: mil) que se consideró ser el ángulo central que subtiende un arco circular de una unidad lineal de longitud a una distancia de 1000 unidades lineales. Tal medida corresponde a 1rev=2 π 1000 unidades de esta clase, pero 1rev=6283,18 .... no es un valor numérico simple ni fácil de utilizar. De modo que se eligió 6400. En consecuencia:

$$1 \text{ mil} = \frac{1}{6400} \text{ de revolución}$$

Por lo tanto

$$6400 \text{ mil} = 2\pi \ ; \ 3200 \text{ mil} = \pi \ ; \ 1600 \text{ mil} = \frac{\pi}{2}$$

La artillería del ejército suizo empezó a utilizar la milésima en 1864. Francia la adoptó en 1879, y el ejército de los Estados Unidos en 1900. El uso militar de esta unidad es para dirigir el fuego de artillería, determinar el alcance y efectuar correcciones de tiro. Los observadores emplean a menudo binoculares con escalas interconstruidas para medir milésimas entre objetos situados en el campo visual.

Ejemplo 11

a. Convierta 800 mil a grados sexagesimales.

b. Convierta 400° a mil.

c. Convierta $\dfrac{3\pi \text{ rad}}{4}$ a mil.

Resolución

a. Como 1600 mil = 90°

$$\Rightarrow 800 \text{ mil} = 800 \times \frac{90°}{1600 \text{ mil}} = 45°$$

b. $$400° = 400° \times \frac{1600 \text{ mil}}{90°}$$

$$400° = \frac{6400}{9} \text{mil} = 7111{,}11 \text{ mil}$$

c. $$\frac{3\pi \text{rad}}{4} = \frac{3\pi \text{rad}}{4} \times \frac{3200 \text{ mil}}{\pi \text{ rad}} = 2400 \text{ mil}$$

Ángulos Coterminales

Es importante observar que hay muchos ángulos diferentes que tienen el mismo lado inicial, lado terminal y mismo vértice. A cualquier par de estos ángulos se les llama ángulos coterminales.

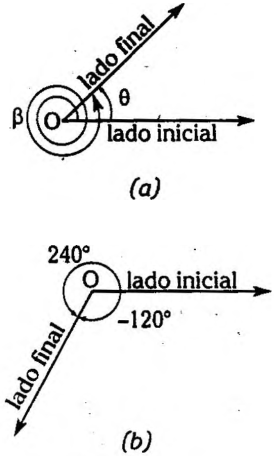


Figura 1.17

Los infinitos ángulos coterminales a θ se obtienen con la expresión $360°K+\theta$, donde K es un número entero cualquiera $(K=0,\ \pm1,\ \pm2,...)$. Por ejemplo, en la figura 1.17(a), β es coterminal con θ y se obtiene cuando K=2. Es decir $\beta=360°\times2+\theta$

Así análogamente los infinitos ángulos α coterminales a $-120°$ se obtienen por la expresión siguiente $360°K+(-120°)$; $K=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \pm3,...$ Por ejemplo 240° es coterminal con (−120°) y se obtiene cuando K=1 (figura 1.17(b))

Aplicación

La palabra **radián** se comprende aun si no aparece escrita. No es el caso con la medida en grados; su unidad siempre se debe incluir. El siguiente ejemplo enfatiza la diferencia entre estas dos medidas angulares.

Ejemplo

Compare el ángulo de 30 (o 30 rad) con el de 30° (considere $\pi=3,14$)

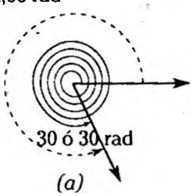
Resolución

Del ángulo 30 ó 30 rad (figura 1.18 (a)) se obtiene cuatro revoluciones consecutivas del lado terminal más 4,88 adicionales.

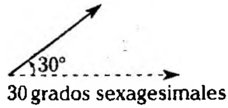
Luego el ángulo de 30 ó 30 rad es coterminal con el ángulo de 4,88 ó 4,88 rad.

$30\ rad = 30 = 4(2\pi)+4,88$

y el ángulo de 30° aparece en la figura 1.18(b)



(a)



(b)

Figura 1.18

Teorema

En la figura 1.19 se muestra un ángulo trigonométrico α, tal que sus medidas en los tres sistemas estudiados son $S°$, C^g y Rrad, las cuales, al representar la medida de un mismo ángulo, resultan ser equivalentes.

Entonces se verifica la siguiente fórmula:

$$\frac{S}{180}=\frac{C}{200}=\frac{R}{\pi}$$

De la fórmula anterior se deduce que

$$\frac{S}{9}=\frac{C}{10}\ ;\ \frac{S}{180}=\frac{R}{\pi}\ ;\ \frac{C}{200}=\frac{R}{\pi}$$

donde

S: número de grados sexagesimales de α.

C: número de grados centesimales de α.

R: número de radianes de α.

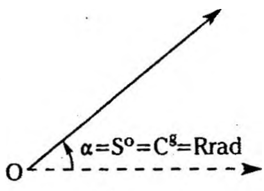


Figura 1.19

Demostración

Como $S°=C^g=R\ rad$

Dividiendo por la $m\sphericalangle 1V$

$$\Rightarrow \frac{S°}{m\sphericalangle 1V}=\frac{C^g}{m\sphericalangle 1V}=\frac{R\ rad}{m\sphericalangle 1V}$$

Luego

$$\Rightarrow \frac{S^{\circ}}{360^{\circ}}=\frac{C^{g}}{400^{g}}=\frac{R\,\text{rad}}{2\pi\,\text{rad}}$$

(ya que $m\sphericalangle IV = 360^{\circ}=400^{g}=2\pi$ rad)

$$\therefore\ \frac{S}{180}=\frac{C}{200}=\frac{R}{\pi}$$

(simplificando unidades y operando)

Ejemplo 1

El ángulo de 90° medido en los otros dos sistemas estudiados resulta ser 100^{g} y $\frac{\pi}{2}$rad (ver figura 1.20)

Entonces de la figura identificamos que

$S=90,\quad C=100\quad y\ R=\frac{\pi}{2}$

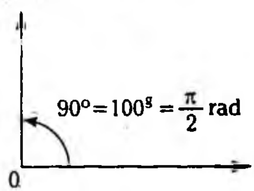


Figura 1.20

Nota

En los ejemplos desarrollados o propuestos que siguen, se considera que S, C y R son los números convencionales para un mismo ángulo (número de grados sexagesimales, número de grados centesimales y número de radianes de un mismo ángulo). Vale aclarar también que las fórmulas vistas en el **teorema anterior** son válidas tanto para ángulos positivos como negativos.

Ejemplo 2

Calcule el valor de cada una de las expresiones dadas.

a. $\gamma=\dfrac{C+S}{C-S}$

b. $\beta=\dfrac{S+2C}{58R}$

c. Si para un mismo ángulo se cumple:

$S=3x^{x}+6\quad y\quad C=7x^{x}-8$

Halle el número de radianes de dicho ángulo.

d. El producto de los números que expresan la medida de un ángulo en los sistemas estudiados es $\frac{\pi}{6}$.

Halle la medida del ángulo en grados sexagesimales.

Resolución

a. Utilizamos

$$\frac{S}{9}=\frac{C}{10}=K\Rightarrow S=9K\ \wedge\ C=10K$$

Luego reemplazamos en γ

$$\gamma=\frac{10K+9K}{10K-9K}=\frac{19K}{K}=19$$

$$\therefore\ \gamma=19$$

Otra forma

De $\frac{S}{9}=\frac{C}{10}$, tenemos $\frac{S}{C}=\frac{9}{10}$,

aplicando propiedad de proporciones

$$\frac{C+S}{C-S}=\frac{10+9}{10-9}$$

$$\therefore\ \frac{C+S}{C-S}=19$$

b. Utilizamos $\dfrac{S}{180}=\dfrac{C}{200}=\dfrac{R}{\pi}=K \Rightarrow \begin{cases} S=180K \\ C=200K \\ R=\pi K \end{cases}$

Luego reemplazamos en β

$$\beta=\frac{180K+2(200K)}{58(\pi K)}=\frac{580K}{58\pi K}=\frac{10}{\pi}$$

$$\therefore \beta=\frac{10}{\pi}$$

Otra forma como

$$\beta=\frac{S+2C}{58R}$$

tenemos

$$\beta=\frac{1}{58}\left(\frac{S+2C}{R}\right)=\frac{1}{58}\left(\frac{S}{R}+\frac{2C}{R}\right)$$

$$\beta=\frac{1}{58}\left[\left(\frac{180}{\pi}\right)+2\left(\frac{200}{\pi}\right)\right]$$

Reduciendo

$$\beta=\frac{1}{58}\left(\frac{580}{\pi}\right)=\frac{10}{\pi}$$

$$\therefore\ \beta=\frac{10}{\pi}$$

c. Como $\dfrac{S}{9}=\dfrac{C}{10} \Rightarrow \dfrac{3x^x+6}{9}=\dfrac{7x^x-8}{10}$

$$10(3x^x+6)=9(7x^x-8)$$

$$30x^x+60=63x^x-72$$

$$33x^x=132$$

$$x^x=4 \Rightarrow x=2$$

como $3x^x+6=3(4)+6=18$

$$\Rightarrow m\sphericalangle=18°=\frac{\pi}{10}\text{rad}$$

$$\Rightarrow m\sphericalangle=18°=\frac{\pi}{10}\text{rad}$$

$$\therefore\ R=\frac{\pi}{10}$$

d. Del enunciado $SCR=\dfrac{\pi}{6}$ ...(I)

como $\dfrac{S}{9}=\dfrac{C}{10}$, también se puede expresar como

$$\frac{S}{9}=\frac{C}{10}=\frac{R}{\left(\frac{\pi}{20}\right)}=k \Rightarrow \begin{cases} S=9k \\ C=10k \\ R=\dfrac{\pi k}{20} \ \ ...(II) \end{cases}$$

Reemplazamos (II) en (I) $\quad 9k.10k.\dfrac{\pi k}{20}=\dfrac{\pi}{6}$

luego $k^3=\dfrac{1}{27}$

$$k=\frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow S=9k=9\left(\frac{1}{3}\right)=3°$$

∴ la medida del ángulo es 3°

EJERCICIOS

I. En los ejercicios del 1 al 4, exprese el ángulo dado en notación decimal de grados.

1. 22°30' **2.** 5°10' **3.** 120°10'2" **4.** 10°25'

II. En los ejercicios del 5 al 8, exprese el ángulo dado en términos de grados, minutos y segundos sexagesimales.

5. 180,20° **6.** –9,25° **7.** 225,15° **8.** 30,81°

III. En los ejercicios del 9 al 11, exprese el ángulo dado en notación decimal de grados centesimales.

9. $30^g20^m15^s$ **10.** 100^g20^m **11.** 1^g02^m

IV. En los ejercicios del 12 al 14, exprese el ángulo dado en grados, minutos y segundos centesimales.

12. $45{,}5^g$ **13.** $63{,}201^g$ **14.** $-33{,}2^g$

V. En los ejercicios del 15 al 24, convierta de grados sexagesimales a radianes.

15. $45°$ **16.** $30°$ **17.** $270°$ **18.** $37°$ **19.** $0°$

20. $-180°$ **21.** $-120°$ **22.** $131°\,36'$ **23.** $-45{,}2°$ **24.** $-540°$

VI. En los ejercicios del 25 al 33, convierta de radianes a grados sexagesimales

25. $\dfrac{2\pi}{3}$ **26.** 7π **27.** $1{,}5$ **28.** 15 **29.** $41\dfrac{\pi}{2}$

30. $\dfrac{3\pi}{8}$ **31.** $\dfrac{\pi}{12}$ **32.** $\dfrac{5\pi}{12}$ **33.** $0{,}25$

VII. En los ejercicios del 34 al 36, convierta de radianes a grados centesimales

34. $\dfrac{\pi}{7}$ **35.** 3 **36.** $\dfrac{\pi}{5}$

VIII. En los ejercicios del 37 al 39, considere que: 1 rad=57°17'44,8" y convierta los ángulos dados a grados, minutos y segundos sexagesimales.

37. 2 rad **38.** 1,5 rad **39.** – 4 rad

IX. De los ejercicios del 40 al 45, calcule el valor numérico de cada expresión (siendo S, C y R l convencional para un mismo ángulo trigonométrico)

40. $\dfrac{S+C}{S-C}$ **41.** $\dfrac{S^2+C^2}{SC}$ **42.** $\dfrac{S+C}{R}$ **43.** $\dfrac{\pi S+\pi C+20R}{R}$

44. $\sqrt[5]{\dfrac{S+C}{S-C}-13}$ **45.** $\left(\dfrac{S+C+R}{380+\pi}\right)\dfrac{\pi}{R}$

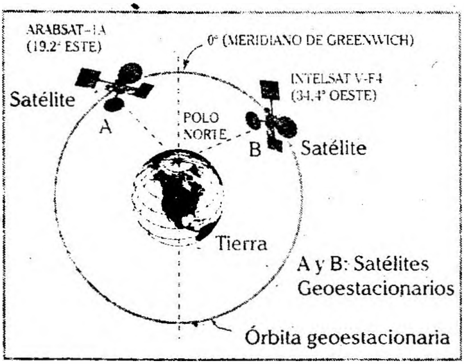
RESPUESTAS

1. $22{,}5°$	**2.** $5{,}1\bar{6}°$	**3.** $120{,}167\bar{2}°$	**4** $10{,}41\bar{6}°$	**5** $180°12'$
6. $-9°{,}15'$	**7.** $225°9'$	**8.** $30°48'36''$	**9** $30{,}2015^g$	**10** $100{,}20^g$
11. $1{,}02^g$	**12.** 45^g50^m	**13.** $63^g20^m10^s$	**14** -33^g20^m	**15** $\pi/4$ rad
16. $\pi/6$ rad	**17.** $\dfrac{3\pi\,\text{rad}}{2}$	**18.** $\dfrac{37\pi\,\text{rad}}{180}$	**19** 0 rad	**20** $-\pi$ rad
21. $-\dfrac{2\pi\,\text{rad}}{3}$	**22.** $\dfrac{329\pi\,\text{rad}}{450}$	**23.** $-\dfrac{113\pi\,\text{rad}}{450}$	**24** -3π rad	**25** $120°$
26 $1260°$	**27.** $270°/\pi$	**28.** $2700°/\pi$	**29** $3690°$	**30** $67{,}5°$
31 $15°$	**32.** $75°$	**33.** $45°/\pi$	**34** $200^g/7$	**35** $600^g/\pi$
36. 40^g	**37.** $114°35'30''$	**38.** $85°56'37''$	**39** $-229°10'59''$	**40** -19
41. $181/90$	**42.** $380/\pi$	**43.** 400	**44** -2	**45** 1

LECTURA

LONGITUD EN UNA ÓRBITA

Un sistema de telemetría desea hallar la distancia que separa (sobre la órbita geoestacionaria) a dos satélites geoestacionarios Arabsat–1A (localizado a 19,2° Este) e Intelsat V–F4 (localizado a 34,4° Oeste) sabiendo que la distancia de la superficie de la Tierra a un satélite geoestacionario es aproximadamente 35 800 km, considere que el radio de la Tierra es aproximadamente 6 400 km.

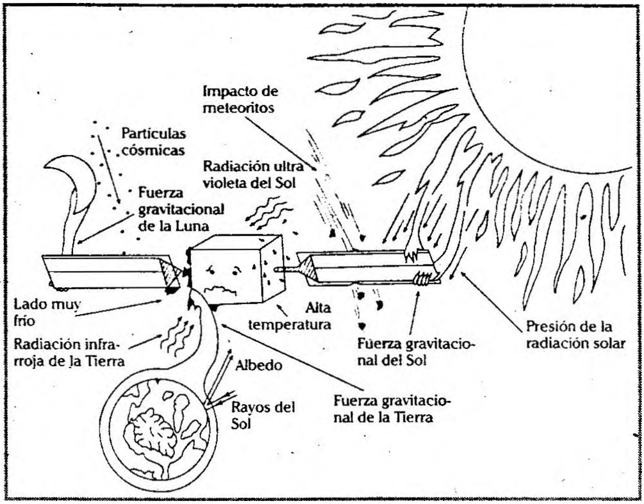


¿Podría usted decir qué distancia halló el sistema de Telemetría?

Haciendo uso de una relación trigonométrica sencilla podemos concluir que dicha distancia es 39477,92 km. Invitamos al lector nos acompañe en el desarrollo teórico para hallar la mencionada relación trigonométrica, la cual se explica en las páginas siguientes, pero antes de eso le hacemos llegar un alcance más.

El sistema Intelsat (Organización Internacional de Telecomunicaciones por Satélite) fue creado en 1964 y actualmente interconecta a 165 países, territorios y dependencias en todo el mundo. Es utilizado principalmente para las comunicaciones internas, al no contar con satélites domésticos propios.

Arabsat (Arab Satellite Communications Organization) es una organización de la Liga de Países Árabes, fundada en 1976, cuya función primordial es adquirir los satélites necesarios y las facilidades de su lanzamiento y control, así como operarlos para la prestación de servicios de comunicaciones a sus 22 países participantes. El Arabsat 1A fue lanzado en febrero de 1985.



Una estación geoestacionaria es en primer lugar un satélite que debe desplazarse en el mismo sentido de rotación que la Tierra; además, para que no perdiese altura poco a poco y completase una vuelta cada 24 horas, debía estar a aproximadamente 36000 km de altura sobre el nivel del mar; para lograrlo el satélite debía tener una velocidad constante de 3075 m/s, siguiendo una órbita circular alrededor de la Tierra.

LONGITUD DE ARCO DE UNA CIRCUNFERENCIA

Si se pidiese medir manualmente la longitud de un arco de curva como la mostrada en la figura 1.21(a), una forma de realizar aquello sería que adapte un hilo a su forma y luego se mida con una regla. Veamos el siguiente gráfico:

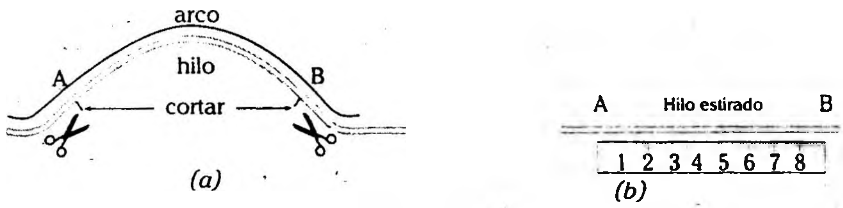


Figura 1.21

Sin embargo, matemáticamente se determina la longitud de un arco utilizando el cálculo integral.

La longitud del arco de la figura 1.22 de $y=f(x)$, entre $x=a$ y $x=b$, se calcula por la fórmula

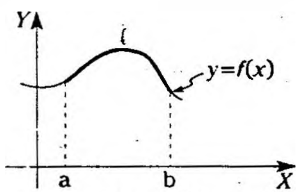


Figura 1.22

$$\ell=\int_a^b \sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx$$

Los arcos de circunferencia se pueden medir en unidades angulares y en unidades de longitud, si consideramos un ángulo central α en circunferencias concéntricas, tal como se ve en la figura 1.23.

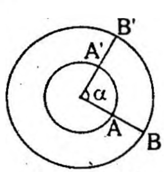
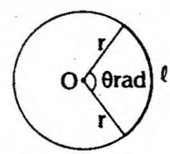


Figura 1.23

La medida de arco en AA' y BB' en unidades angulares son iguales a α. Pero la medida en unidades de longitud del arco AA' es menor que la del arco en BB'.

Cálculo de la Longitud de un Arco de Circunferencia

Para calcular la longitud de un arco de circunferencia partimos de la definición (ver página **29**) que expresa la medida circular de un ángulo central como $\theta=\ell/r$ (ver figura 1.24) de donde se obtiene que



$$\ell=\theta.r$$

Figura 1.24

De esta fórmula, nótese que θ rad puede ser cualquier ángulo positivo menor o igual a una vuelta. $(0<\theta\leq 2\pi)$

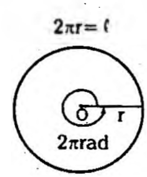


Figura 1.25

Para $\theta=2\pi$ la fórmula anterior nos da la longitud de la circunferencia $\ell=2\pi r$.

Ejemplo 1

Una carretera tiene una curva de 20° con un radio de 630 pies. Calcule la longitud de la curva. (Considere $\pi=22/7$).

Resolución

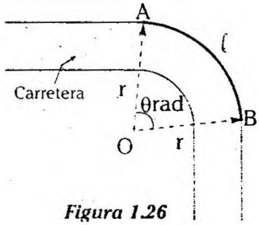
De la figura 1.26

$m\sphericalangle AOB = 20° = \frac{\pi \text{ rad}}{9} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{9}$ (en radianes)

Por fórmula

$\ell = \theta r \Rightarrow \ell = \frac{\pi}{9} \times 630$

$\ell = 70\pi = 70 \times \frac{22}{7} = 220$



∴ La longitud de la curva es 220 pies

Figura 1.26

Ejemplo 2

El péndulo de un reloj tiene 20 cm de longitud y recorre un arco de 25^g por segundo. ¿Cuántos centímetros recorre la punta del péndulo en un segundo? (Dato: $\pi = 3,14$)

Resolución

Datos:

$r = 20$ cm

$\theta = 25^g$ (en grados centesimales)

$\Rightarrow \theta = \frac{\pi}{8}$ en radianes.

En la figura 1.27, ℓ representa la longitud recorrida por la punta del péndulo en un segundo.

Así, por fórmula

$\ell = \theta r$

$\Rightarrow \ell = \frac{\pi}{8} \times 20$ cm

$\therefore \ell = \frac{5\pi}{2}$ cm

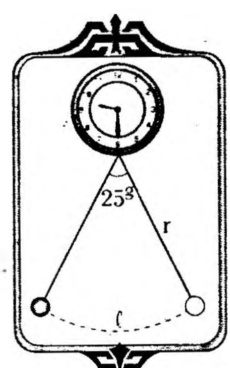


Figura 1.27

Considerando $\pi = 3,14$ se tiene que $\ell = 7,85$ cm

Cálculo del Área de un Sector Circular

Un sector circular viene a ser una porción de círculo tal como AOB (véase figura 1.28) limitada por los radios OA, OB y el arco AB. Así el área S del sector AOB se calcula mediante la siguiente fórmula

$$\boxed{S = \frac{1}{2}\theta r^2}$$

(θ en radianes)

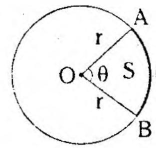


Figura 1.28

Deducción

Área de un círculo de radio r es πr^2

Como S y θ son directamente proporcionales, entonces el área del círculo con el ángulo de una vuelta también lo serán, siendo r constante, así

$$\frac{S}{\theta} = \frac{\text{Área del círculo}}{2\pi} \Rightarrow \frac{S}{\theta} = \frac{\pi r^2}{2\pi} \quad \therefore S = \frac{1}{2}\theta r^2$$

Además como $\ell = \theta r$, expresando S en función de

- Longitud de arco y el radio $\boxed{S = \frac{\ell r}{2}}$
- Longitud de arco y el ángulo central $\boxed{S = \frac{\ell^2}{2\theta}}$

El término círculo y área de sector, es frecuente en elementos de máquina. En la figura 1.29 se observa una mesa divisora circular, que en un torno determina el avance y la velocidad de corte.

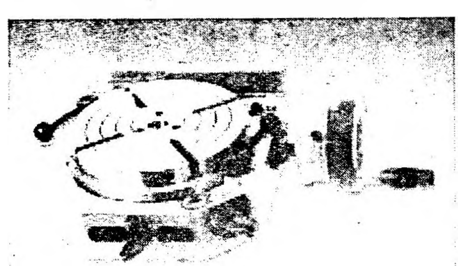


Figura 1.29
Mesa Divisora Circular

Ejemplo 1

Calcule el área de la región que determina el borde inferior de una puerta de "va y ven" al girar un ángulo de 135°, sabiendo que dicho borde mide 112 cm (considere $\pi = 3{,}14$)

Resolución

En la figura 1.30 se ha graficado la puerta en giro.

Datos del sector circular

r = 112 cm

$\theta rad = 135° = \frac{3\pi}{4} rad$

Aplicando la fórmula

$$S = \frac{1}{2}\theta r^2$$

Sustituyendo datos

$$S = \frac{1}{2}\left(\frac{3\pi}{4}\right)(112)^2$$

$$S = \frac{1}{2}\left(\frac{3\times 3{,}14}{4}\right)(112)^2$$

Efectuando $S = 14\,770{,}56 \text{ cm}^2$

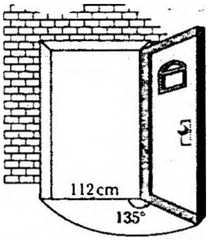


Figura 1.30

Ejemplo 2

Exprese el área de un trapecio circular en función de la longitud de sus áreas y el ángulo central.

Resolución

Considerando θ (en radianes) como el ángulo central de los arcos ℓ_1 y ℓ_2, (ver figura 1.31), tenemos

$$S = S_{\triangleleft AOB} - S_{\triangleleft DOC}$$

$$S = \frac{\ell_1^2}{2\theta} - \frac{\ell_2^2}{2\theta}$$

$$\Rightarrow \boxed{S = \frac{\ell_1^2 - \ell_2^2}{2\theta}}$$

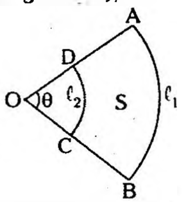


Figura 1.31

Se deja para el lector, la demostración del área de un trapecio en función de sus lados.

De la figura 1.32 se cumple

$$\boxed{S = \left(\frac{\ell_1 + \ell_2}{2}\right)r}$$

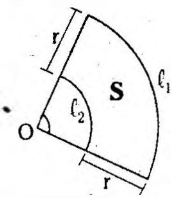
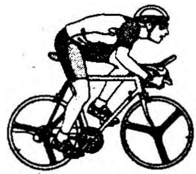


Figura 1.32

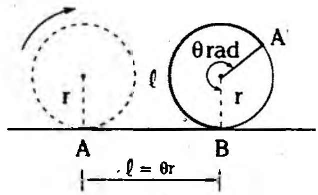
Ángulo Girado o Barrido por una Rueda

¿Cuál es el número de vueltas que da una rueda de la bicicleta?



(a)

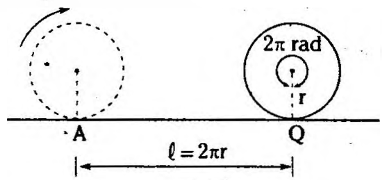
Supóngase que una rueda de radio r gira una trayectoria recta como en la figura 1.33(b). Entonces el centro de la rueda también se mueve en línea recta.



(b)

A medida que la rueda gira, un radio genera un ángulo θ.

Cuando el ángulo generado es de 2π, la rueda también se mueve una distancia igual a su perímetro, es decir $\ell = 2\pi r$.



(c)

Figura 1.33

Entonces observamos que cuando el centro de la rueda avanza una longitud igual a $2\pi r$, la rueda ha dado una vuelta (ver figura 1.33 (c)).

Luego para saber el número (n) de vueltas que dará la rueda de radio r, en una pista horizontal, cuando su centro se desplaza una longitud ℓ, aplicamos una regla de tres simple; así

$$\frac{1 \text{ vuelta}}{2\pi r} = \frac{n \text{ vueltas}}{\ell} \qquad \text{De donde } n = \frac{\ell}{2\pi r}$$

Observación

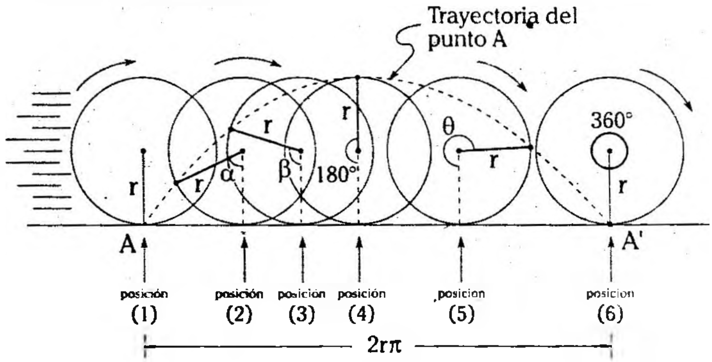


Figura 1.34

En la figura 1.34 se tiene una rueda que se desplaza sobre una pista horizontal, la curva entrecortada es la trayectoria que sigue el punto A de la rueda, que en la posición (1) toca el piso. A medida que la rueda avanza sin resbalar, ésta gira distintos ángulos, así:

- De la posición (1) a la posición (2) la rueda gira un ángulo α.
- De la posición (1) a la posición (3) la rueda gira un ángulo β.
- De la posición (1) a la posición (4) la rueda gira un ángulo 180°.
- De la posición (1) a la posición (5) la rueda gira un ángulo θ.
- De la posición (1) a la posición (6) la rueda gira un ángulo de 360°.

En la posición (4) el punto A alcanza su máxima altura (en esta posición (4) la rueda ha dado media vuelta con respecto a la posición (1)). En la posición (6) el punto A vuelve a tocar el piso otra vez; entonces de la posición (1) a la posición (6) la rueda ha dado una vuelta (porque el ángulo girado por la rueda es 360°).

La cicloide

La cicloide es la curva generada por el movimiento de un punto dado en una circunferencia cuando ésta gira sin deslizarse sobre el eje x. Por ejemplo se pone un pequeño foco en el borde de una llanta de bicicleta, entonces la curva descrita por la luz del foco cuando la bicicleta va desplazándose es la cicloide.

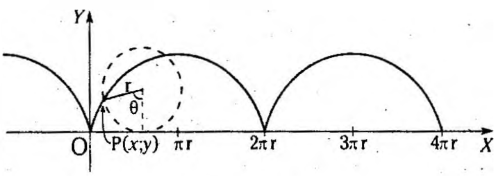


Figura 1.35

Como la posición del punto P depende del ángulo girado θ y la constante r (radio de la rueda), entonces las ecuaciones paramétricas de la cicloide serán:

$$x=r(\theta-\text{sen}\theta) \quad ; \quad y=r(1-\cos\theta)$$

Número de Vueltas

En forma general, el número de vueltas que da una rueda sobre cualquier terreno se calcula mediante la siguiente fórmula

$$n_v=\frac{\ell_C}{2\pi r}$$

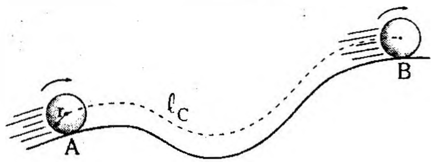


Figura 1.36

Donde:

- n_V : número de vueltas que da la rueda al desplazarse, desde A hacia B.
- ℓ_C : longitud recorrida por el centro de la rueda.
- r : radio de la rueda.

Observación

También podemos plantear que la longitud recorrida por el centro de la rueda ℓ_C al desplazarse de A hacia B (véase figura 1.36) es

$$\ell_C = \theta_g r$$

Donde θ_g es el ángulo girado por la rueda y r es el radio de dicha rueda.
En consecuencia, para cálculo del ángulo girado θ_g por una rueda de radio r tendremos las fórmulas:

$$\theta_g = \frac{\ell_C}{r} \quad \text{ó} \quad \theta_g = n_V \times 2\pi$$

(En ambas fórmulas θ_g está expresado en radianes)

Ejemplo 1

Calcule el número de vueltas que recorre una de las ruedas de un auto, en una pista horizontal, al desplazarse 11 m. Además el radio de una de las ruedas es 25 cm. Considere $\pi = \frac{22}{7}$

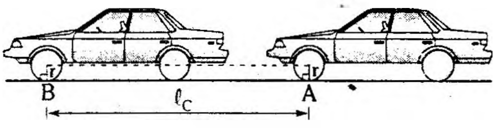


Figura 1.37

La distancia recorrida por cualquier punto en la rueda nos da la longitud del arco recorrido por dicho punto, el cual además es igual a la longitud recorrida por el centro de la rueda. Imaginemos que una cuerda está enrollada alrededor de la rueda y que se desenrrolla a medida que la rueda se desplaza.

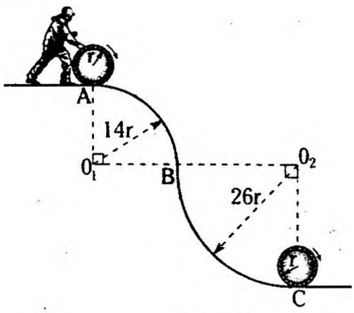
De la figura 1.37 se observa

$\ell_C = 11\text{m} = 1100\text{ cm} \qquad \Rightarrow \quad r = 25\text{ cm}$

Por la fórmula

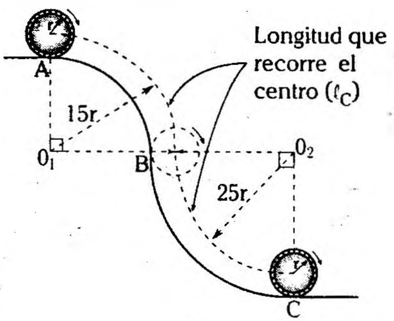
$$n_V = \frac{\ell_C}{2\pi r} = \frac{1100\ \text{cm}}{2\times\frac{22}{7}\times 25\ \text{cm}} \qquad \therefore\ n_V = 7$$

Ejemplo 2



(a)

La figura 1.38(a) muestra un trabajador transportando un barril de pintura que debe desplazarse sin resbalar por la pista desde A hasta C. Si O_1 y O_2 son centros de las pistas circulares, calcule el número de vueltas que da el barril en el trayecto de A hasta C.



(b)

Figura 1.38

Cuando el barril se desplaza sobre la pista AC; se generan sectores circulares con centro en O_1 y O_2 de radios 15r y 25r, respectivamente; luego la longitud (ℓ_C) que describe el centro de la rueda de radio r es

$$\ell_C = \frac{\pi}{2}(15r) + \frac{\pi}{2}(25r)$$

Cálculo del número de vueltas

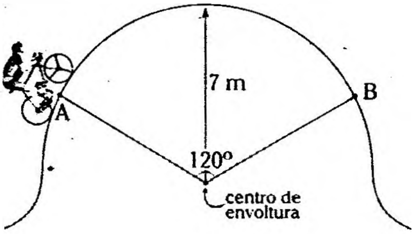
$$n_V = \frac{\ell_C}{2\pi r}$$

$$n_V = \frac{\frac{\pi}{2}(15r) + \frac{\pi}{2}(25r)}{2\pi r}$$

$$n_V = \frac{\frac{\pi}{2}(40r)}{2\pi r}$$

$\therefore n_V = 10$

Ejemplo 3



(a)

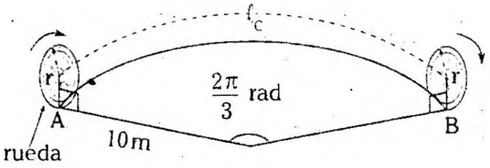
En la figura 1.39 (a) se muestra un ciclista que se desplaza por una autopista de ancho 6 m, desde A hasta B.

Si el ciclista recorre sobre los segmentos direccionales de la autopista, calcule el ángulo girado por la rueda delantera si la longitud de su radio es 30 cm.

Resolución

Si sólo analizamos para la rueda delantera la gráfica correspondiente en la autopista.

Ahora considerando que la rueda es perpendicular a la pista en todo el recorrido (véase figura 1.39(b)), se cumplirá que la longitud recorrida por el centro de la rueda será igual a la longitud del arco AB.



(b)

Figura 1.39

Así $\ell_C = \ell_{\widehat{AB}}$

En el sector circular AOB de la figura 1.39(b), tenemos

$$\ell_{\widehat{AB}} = \frac{2\pi}{3} \times 10\,m = \frac{20\pi}{3}\,m \Rightarrow \ell_C = \frac{20\pi}{3}\,m$$

Cálculo del ángulo girado

$$\theta = \frac{\ell_C}{r} = \frac{\frac{20\pi}{3}\,m}{0{,}3\,m} = \frac{200\pi}{9}$$

lo cual indica que el ángulo girado es

$$\frac{200\pi\,rad}{9} \text{ ó } 4000°$$

Poleas y Engranajes

En los engranajes se denominan ruedas motrices o conductoras a las que transmiten la fuerza, en tanto que las otras se denominan ruedas impulsadas o conducidas.

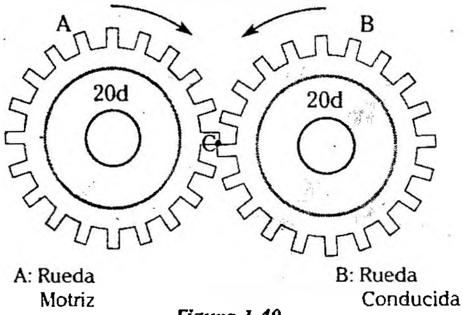


Figura 1.40

Dos ruedas dentadas como A y B (figura 1.40) que tienen el mismo número de dientes giran con la misma rapidez. Supongamos que A es la rueda motriz y B la conducida. Si A gira en el sentido de las agujas del reloj, esto es en la dirección indicada por la flecha; B girará en sentido opuesto.

Supongamos que cada rueda tiene 20 dientes. Cuando gira A, cada uno de sus dientes pasa por el punto C y engrana con un diente de B. Cuando A ha dado una vuelta completa, esto es, cuando sus 20 dientes han pasado por el punto C éstos habrán engranado con 20 dientes de B y éste habrá dado también una vuelta completa

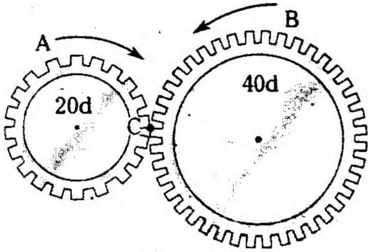


Figura 1.41

Pero si A tiene 20 dientes y B tiene 40 (figura 1.41); en una vuelta completa de A sus 20 dientes habrán pasado por C y habrán engranado con 20 dientes de B. Pero como B tiene 40 dientes, A tendrá que dar dos vueltas completas para que B de una. Con este caso se dice que la relación de velocidades es de 1 a 2; esto es, una revolución de B corresponde a 2 revoluciones de A. Si A tuviera 20 dientes y B tuviera 60, A efectuaría 3 revoluciones mientras B realizaría una, las ruedas tendrían una relación de velocidades de 3 a 1 en cada caso la rueda más pequeña es la que gira con mayor rapidez y la mayor es la más lenta.

Entre las velocidades de las ruedas dentadas y el número de dientes hay una proporcionalidad inversa, esto es, la velocidad de una rueda disminuye al aumentar el número de dientes.

En la figura 1.42 se tiene dos poleas en contacto; si la polea A gira un ángulo θ_1 entonces B girará θ_2.

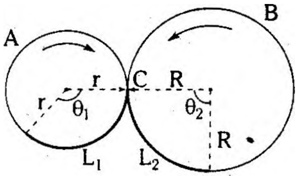


Figura 1.42

Cumpliéndose

$$L_1 = L_2$$

$\Rightarrow \theta_1 r = \theta_2 R$

$\Rightarrow w_1 r = w_2 R$ (w_1 y w_2:velocidades angulares)

$\Rightarrow n_1 r = n_2 R$ (n_1 y n_2:número de vueltas)

Si A y B fueron engranajes, se tendrá que: (número de dientes de A) w_1=(número de dientes de B)w_2.

A: Rueda menor B: Rueda mayor

Ejemplo 1

Dos ruedas que engranan tienen 40 y 60 dientes, respectivamente. Si la rapidez de la rueda más pequeña es de 120rpm (revoluciones por minuto) ¿Cuál será la rapidez de la rueda mayor?

Resolución

Datos:

W_1 = 120rpm de rapidez de la rueda menor

N° de dientes de la rueda menor: 40

N° de dientes de la rueda mayor: 60

por fórmula:

$$\underset{(40)}{\underline{\text{\# de dientes de la rueda menor}}} \times \underset{(120)}{\underline{W_1}} = \underset{(60)}{\underline{\text{\# de dientes de la rueda mayor}}} \times \underset{(W_2)}{\underline{W_2}}$$

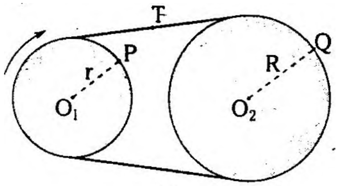
$\therefore W_2 = 80\text{rpm}$

Ejemplo 2

En la figura 1.43 (a) se tiene dos poleas de radios r=30 cm y R=50 cm, además dichas poleas están unidas por una correa (o faja). Si la polea menor gira 30°, en el sentido indicado en la figura, entonces calcule

a. La longitud recorrida por los puntos P, Q y T.

b. El ángulo girado por la polea mayor.



(a)

Resolución

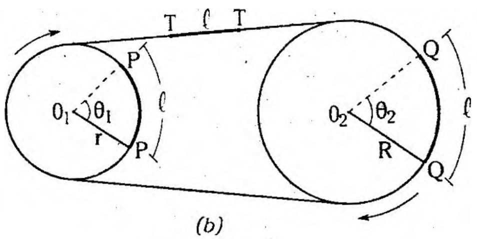


Figura 1.43

La longitud recorrida por P, Q y T es la misma; si dicha longitud es ℓ (vea la figura 1.43 (b)) y como el ángulo girado por la polea menor es $\theta_1 = 30° = \frac{\pi}{6}$ y suponiendo que el ángulo girado por la polea mayor fuese θ_2, tendremos que:

- En la polea menor: $\ell = \theta_1 r$
- En la polea mayor: $\ell = \theta_2 R$

En consecuencia: $\theta_1 r = \theta_2 R$

Reemplazando datos: $\frac{\pi}{6} \times 30 = \theta_2 \times 50$

$\therefore \theta_2 = \frac{\pi}{10} \ldots$ (ángulo girado en radianes por la polea mayor).

La longitud recorrida por P ó Q será:

$$\ell = \theta_1 \times r = \frac{\pi}{6} \times 30 \text{ cm} = 5\pi \text{cm}$$

También se puede calcular como:

$$\ell = \theta_2 R = \frac{\pi}{10} \times 50 \text{ cm} = 5\pi \text{ cm}$$

Ejemplo 3

De la figura 1.43 (a) calcule el número de vueltas que da la polea mayor(n_R) cuando la polea menor da 35 vueltas(R=50 cm ; r=30 cm).

Resolución

Sea n el número de vueltas que da la polea menor. En este caso se cumple

$n_R \times R = n \times r$

$n_R \times 50 = 35 \times 30$

$\therefore n_R = 21$

Esto significa que cuando la polea menor gira 35 vueltas la mayor girará solo 21 vueltas.

Ejemplo 4

En la figura 1.44 se tiene dos ruedas de radios r=15 cm y R=35 cm, dichas ruedas se encuentran unidas por un eje. Calcule las longitudes recorridas por los puntos P y Q cuando

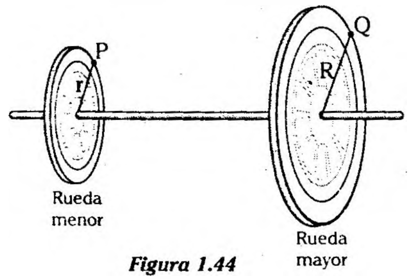


Figura 1.44

a. La rueda menor gira 120°
b. La rueda mayor gira 510°
c. Las ruedas giran 10 vueltas

Resolución

En el caso de la figura 1.44 se debe tener presente que los ángulos girados por las ruedas resultan ser iguales, así si la rueda menor gira 120° la rueda mayor también girará 120°. También el número de vueltas que dan las ruedas es la misma.

a. $\begin{pmatrix}\text{longitud}\\ \text{recorrida por P}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\text{medida en radianes}\\ \text{del} \measuredangle \text{ girado por la rueda}\end{pmatrix} \times (\text{radio})$

$\begin{pmatrix}\text{longitud}\\ \text{recorrida por P}\end{pmatrix} = \left(120° \times \frac{\pi}{180°}\right) 15 \text{ cm}$

$\begin{pmatrix}\text{longitud}\\ \text{recorrida por P}\end{pmatrix} = 10\pi \text{ cm} \approx 31,4 \text{ cm}$

Análogamente,

$(\text{Longitud recorrida por Q}) = \left(120° \times \frac{\pi}{180°}\right) 35 \text{ cm}$

$(\text{Longitud recorrida por Q}) = \frac{70}{3}\pi \text{cm} = 73.3 \text{ cm}$

b. $(\text{Longitud recorrida por P}) = \left(510^\circ \times \frac{\pi}{180^\circ}\right)15 \text{ cm}$

$(\text{Longitud recorrida por P}) \approx 135{,}45 \text{ cm}$

$(\text{Longitud recorrida por Q}) = \left(510^\circ \times \frac{\pi}{180^\circ}\right)35 \text{ cm}$

$(\text{Longitud recorrida por Q}) \approx 311{,}38 \text{ cm}$

c. Si la rueda gira10 vueltas, la mayor también 10 vueltas así:

$(\text{Longitud recorrida por P}) = (10 \times 2\pi) \times (15) \text{ cm}$
$(\text{Longitud recorrida por P}) = 300\pi \text{ cm}$
$(\text{Longitud recorrida por P}) = 9{,}42{,}48 \text{ cm}$

$(\text{Longitud recorrida por Q}) = (10 \times 2\pi) \times (35) \text{ cm}$
$(\text{Longitud recorrida por Q}) = 720\pi \text{ cm}$
$(\text{Longitud recorrida por Q}) = 2199{,}11 \text{ cm}$

Ángulo Girado en Elementos de Máquina

En mecánica, se observa a menudo diversos movimientos que ejercen las máquinas como un torno, fresadora, cepilladora, taladro, etc, cuyo objetivo puede ser generar una pieza que sirva de repuesto a otra máquina. Estas máquinas en su interior poseen un conjunto de elementos, como poleas, fajas de transmisión, engranajes y ejes. En éste capítulo se analizan las relaciones entre sus ángulos de giro (revoluciones por minuto). En el siguiente esquema se muestra parte del funcionamiento de un torno automático.

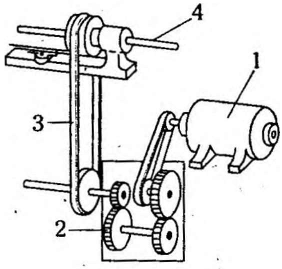


Figura 1.45

(1) motor, (2) caja de cambio, (3) faja de transmisión, (4) barra o eje. La velocidad o ángulo de giro depende de los elementos anteriores.

Ejemplo

En el siguiente esquema, ¿cuál es la velocidad del eje de la máquina si la velocidad del motor es 1740 RPM?

RPM (revoluciones por minuto)

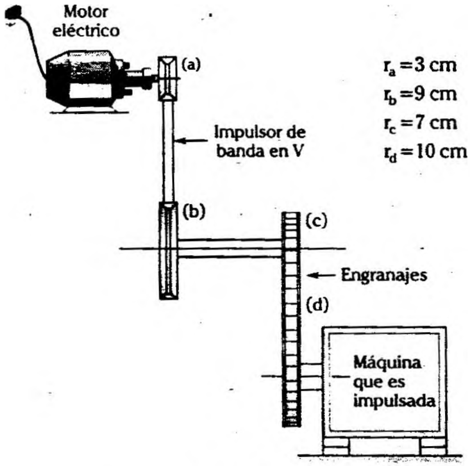


Figura 1.46

Resolución

- Para las poleas a y b, tenemos
  $n_a r_a = n_b r_b$
  $\Rightarrow n_b = n_a \frac{r_a}{r_b} \dots (1)$
  Como los elementos b y c, están unidos por un eje, se tiene: $n_c = n_b \dots (2)$

- Para los engranajes c y d; tenemos:
  $n_d r_d = n_c r_c$
  $n_d = n_c \cdot \frac{r_c}{r_d} \dots (3)$

Reemplazando (1) y (2) en (3)

$$n_d = n_a \frac{r_a}{r_b} \cdot \frac{r_c}{r_d}$$

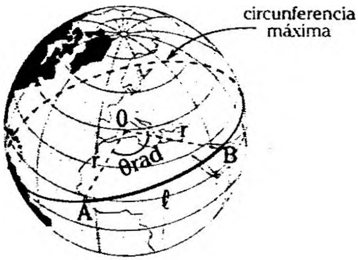
Sustituyendo datos

$$n_d = 1740 \times \frac{3}{9} \times \frac{7}{10}$$

$$\therefore\ n_d = 406 \text{ RPM}$$

Medición de la Distancia entre Dos Puntos Sobre la Tierra

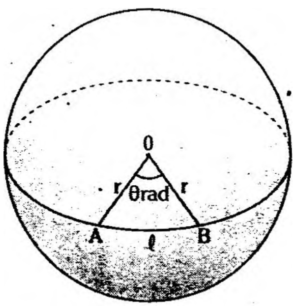
Sean dos puntos A y B sobre la Tierra (ver figura 1.47 (a)). La longitud $\overset{\frown}{AB}$ se mide sobre la circunferencia máxima (su centro coincide con el centro de la Tierra O). Se considera que el radio de la Tierra es igual a 6371 km, aproximadamente.



(a)

Si el ángulo central θ está en radianes se tiene:
$\ell = \theta . r$

Como ejemplo podemos calcular la distancia entre dos ciudades ubicadas en la línea ecuatorial, cuya diferencia horaria es de 2 horas (vea la figura 1.47 (b)).



(b)

Figura 1.47

Nota

La Tierra gira alrededor de su eje 2πrad aproximadamente en 24 horas.

Cálculo del ángulo central, por regla de tres simple

$$2\pi\text{rad} \longrightarrow 24 \text{ horas}$$
$$\theta\text{rad} \longrightarrow 2 \text{ horas}$$

Luego θ rad × 24 horas = 2π rad × 2 horas

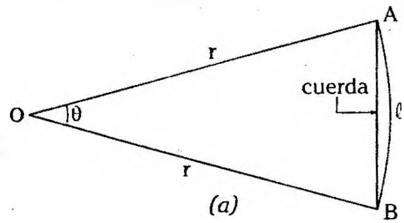
$$\theta = \frac{\pi}{6}$$

En el sector circular AOB $\ell = \frac{\pi}{6} \times 6371$ km

$\therefore \ell = 3335{,}85$ km

Observación

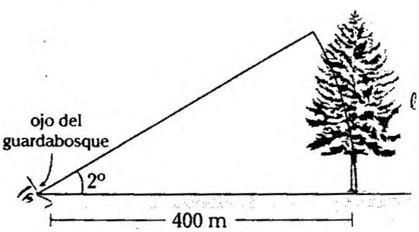
Si el ángulo central es relativamente pequeño, se puede tomar la longitud del arco como un valor aproximado de la longitud de la cuerda correspondiente.
Así en el sector circular AOB tenemos $\ell \approx \overline{AB}$



(a)

Ejemplo
Desde el ojo de un guardabosque, un árbol que se halla a 400 m subtiende un ángulo de 2°, ¿cuál es la altura aproximada del árbol?

Resolución



(b)

Figura 1.48

Del gráfico, tenemos $2° = \frac{\pi\,\text{rad}}{90}$ como el ángulo dado es muy pequeño. Entonces la altura del árbol es aproximadamente a la longitud del arco ℓ.

$n = \ell\frac{\pi}{90} \times 400\,\text{m}$ $\qquad \therefore n = \frac{40\pi}{9}\text{m}$

LECTURA

LOS HUSOS HORARIOS

Debido a la moderna facilidad de comunicaciones se ha acordado unificar las horas en todo el mundo. A tal fin se ha dividido el globo terráqueo en 24 zonas, llamadas husos horarios. Cada huso tiene 15° de amplitud (longitud geográfica).

Este cálculo de 15° de longitud geográfica lo podemos obtener a partir de la siguiente aproximación: Consideremos que la Tierra realiza su movimiento de rotación sobre su propio eje (1 vez: una vuelta completa) en 24 horas, entonces sobre la línea ecuatorial se tendría la siguiente relación

Sobre la línea ecuatorial		Tiempo
1 vuelta	⟶	24 horas
360°	⟶	24 horas
x	⟶	1 hora

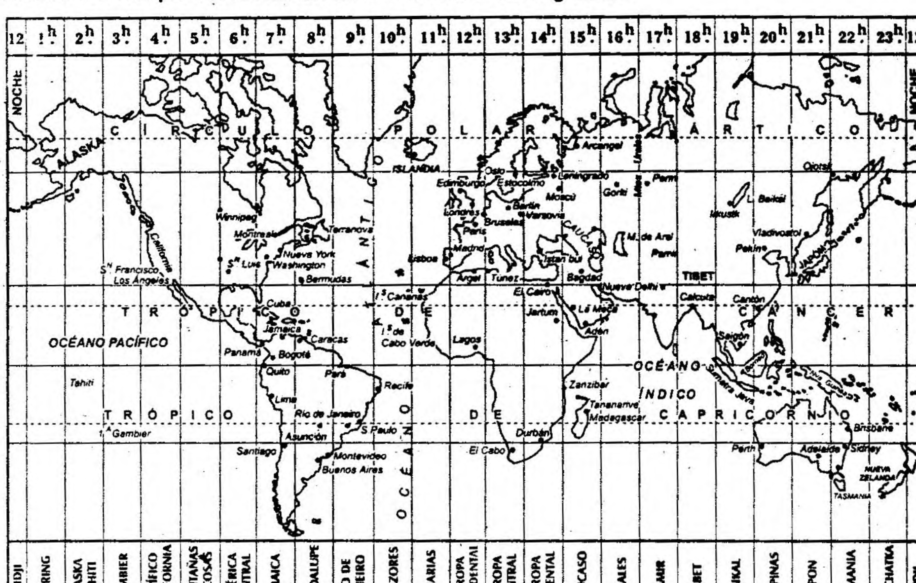
Por regla de 3 simple se tiene

$$360° \times 1 \text{ hora} = x \cdot 24 \text{ horas}$$

Reduciendo

$$x = 15°$$

Donde x representa la cantidad de grados de longitud geográfica para cada hora, y la hora de todo el huso es la de su meridiano central. Entiéndase por huso horario a cada una de las franjas verticales como la resaltada en el gráfico.



EJERCICIOS

I. Un círculo tiene un radio de 6 m, entonces el ángulo central que subtiende un arco para cada uno de los siguientes casos será:

a) $\frac{3\pi}{4}$m b) πm c) 6 m d) 8 m

II. Un círculo tiene un radio de 3 pies. Halle la longitud del arco subtendido por un ángulo central de

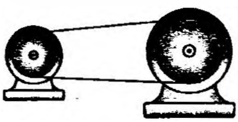
a) 30° b) 120° c) $\frac{4\pi}{3}$rad d) 5rad

III. Obtenga el radio del círculo en el cual un ángulo central de 210° subtiende un arco de

a) 10 m b) 4 m c) 2π m d) $\frac{\pi}{6}$m

IV. Una cuerda esta enrollada alrededor de un cilindro de 4 pulgadas de radio. La cuerda completa 4,25 de circunferencia. ¿Cuál es la longitud de la cuerda?

V. Dos poleas de 20 cm y 60 cm de diámetro, respectivamente, están unidas por una correa, como se observa en la figura. Calcule la velocidad, en revoluciones por minuto, de la polea mayor cuando la más pequeña gira a 240 revoluciones por minuto.



VI. El minutero de un reloj tiene 15 cm de longitud. ¿Cuál es la longitud que recorre su extremo entre las 7:35 am y las 8:00 a.m.?

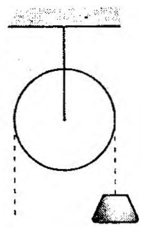
VII. Un péndulo está sujeto a un hilo de 40 cm de longitud y describe un arco de 54°. ¿Cuál es la longitud del arco descrito por el punto medio del hilo?

VIII. Para un círculo de 6 cm de radio, el área de un sector circular es de 9 cm^2. Obtenga en radianes, el ángulo central del sector.

IX. Una polea con un diámetro de 36 cm, como se muestra en la figura, se utiliza para levantar un bloque.

a) ¿Qué distancia recorre el bloque si la polea gira $\frac{7\pi}{3}$?

b) Si la polea gira a una velocidad de $\frac{\pi}{6}$ rad/s ¿A qué velocidad se mueve el bloque?



Nota

En los ejercicios II y IV se utilizan unidades de longitud, a veces no muy familiares para el lector. Por este motivo mostramos las siguientes equivalencias, que le permitirán tener una mejor aproximación. ¿A cuánto equivale una pulgada o un pie?

1 pulgada <> 2,54 cm
1 pie <> 0,3048 m
1 pie <> 12 pulgadas

RESPUESTAS

I. a) $\frac{\pi\,\text{rad}}{8}$ b) $\frac{\pi\,\text{rad}}{6}$ c) 1 rad d) $\frac{4\,\text{rad}}{3}$

II. a) $\frac{\pi\,\text{pies}}{2}$ b) 2π pies c) 4π pies d) 15 pies

III. a) $\frac{60\,\text{m}}{7\pi}$ b) $\frac{24\,\text{m}}{7\pi}$ c) $\frac{12\,\text{m}}{7}$ d) $\frac{1\,\text{m}}{7}$

IV. 34 π pulgadas **V.** 80 rpm

VI. (12,5) πcm **VII.** 6 πcm

VIII. 0,5 rad

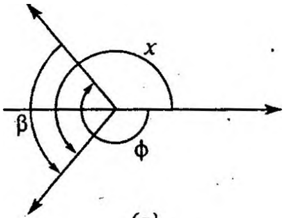
IX. a) 42 πcm b) $\frac{3\pi\,\text{cm}}{\text{s}}$

Problemas Resueltos

Problema 1

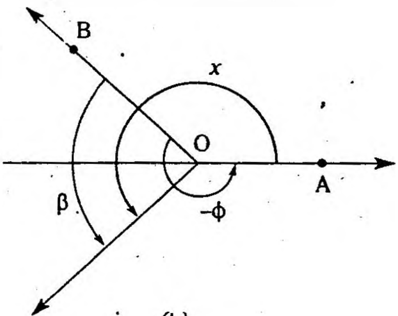
En la figura 1.49(a), se muestra los ángulos trigonométricos x, β y ϕ. Halle x en términos de ϕ y β.

Resolución



(a)

En la figura del problema los ángulos β y x tienen el mismo sentido, mientras ϕ tiene sentido opuesto a estos. Entonces antes de operar sumas o restas para estos ángulos, es necesario que tengan el mismo sentido, así cuando ϕ cambia de sentido se obtiene $-\phi$ según la figura 1.49 (b).



(b)

Figura 1.49

Como x, β y $-\phi$ tienen el mismo sentido, entonces entre ellos podemos sumar y restar, así

$$x = m\measuredangle AOB + \beta \;....\; (1)$$

$$360^\circ = m\measuredangle AOB + (-\phi) \;....(2)$$

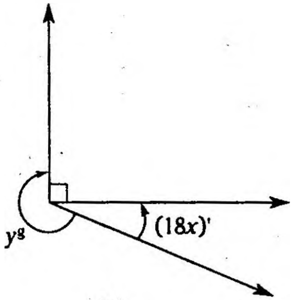
Restando (1) $\wedge$ (2)

$$x - 360^\circ = \beta - (-\phi)$$

$$\therefore\; x = \beta + \phi + 360^\circ$$

Problema 2

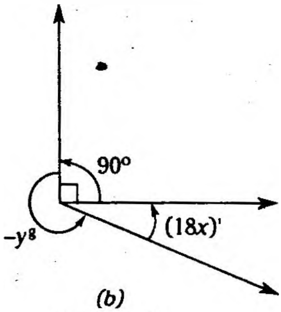
De la figura, determine el valor de $(x-3y)$



(a)

Resolución

Ordenando los sentidos de los ángulos se tiene



(b)

Figura 1.50

De la figura 1.50 (b), tenemos

$$90^\circ + (-y^g) + (18x)' = 360^\circ$$

$$-y^g + (18x)' = 270^\circ$$

convirtiendo a grados

$$-y^g\left(\frac{9^\circ}{10^g}\right) + (18x)'\left(\frac{1^\circ}{60'}\right) = 270^\circ$$

cancelando los grados

$$-\frac{9y}{10} + \frac{3x}{10} = 270$$

$$-9y + 3x = 2700$$

$$-3y + x = 900$$

$$\therefore\; x - 3y = 900$$

Problema 3

Si un grado equis (1^x) equivale a la 480ava. parte de una vuelta, ¿a cuántos grados equis equivale 5/4 de radián?

Resolución

Condición m ∢ 1v = 480^x

Como piden en grados equis 5/4 rad, consideramos

∢ 1 vuelta = 2π rad

así $2\pi\text{rad} = 480^x \Rightarrow 1\text{ rad} = \dfrac{480^x}{2\pi}$

Finalmente

$$\frac{5\text{rad}}{4} = \frac{5}{4}(1\text{ rad}) = \frac{5}{4}\left(\frac{480^x}{2\pi}\right) = \frac{300^x}{\pi}$$

$\therefore\ \dfrac{5\text{rad}}{4}$, equivale a $\dfrac{300}{\pi}$ grados equis.

Problema 4

Los ángulos internos de un pentágono son: $6x^\circ$, $10x^g$, $\dfrac{\pi\text{rad}}{4}$, 30° y 150^g, calcule el valor numérico de x.

Resolución

La suma de los ángulos internos de un pentágono (polígonos de 5 lados) es equivalente a 540°, entonces

$$6x^\circ + 10x^g + \frac{\pi\text{rad}}{4} + 30^\circ + 150^g = 540^\circ$$

Homogenizando unidades (todo a grados sexagesimales)

$$6x^\circ + 10x^g\left(\frac{9^\circ}{10^g}\right) + \frac{\pi}{4}\text{rad}\left(\frac{180^\circ}{\pi\text{rad}}\right) + 30^\circ + 150^g\left(\frac{9^\circ}{10^g}\right) = 540^\circ$$

$$6x^\circ + 9x^\circ + 45^\circ + 30^\circ + 135^\circ = 540^\circ$$

$$15x^\circ + 210^\circ = 540^\circ$$

$$15x^\circ = 330^\circ$$

$$15x = 330$$

$$\therefore\ x = 22$$

Problema 5

El número de grados sexagesimales de un ángulo con el número de grados centesimales de otro ángulo están en la relación de 11 a 9, si además el suplemento de la suma de dichos ángulos es $8{,}1^\circ$. Calcule la medida del ángulo mayor en el sistema circular.

Resolución

Sean los ángulos

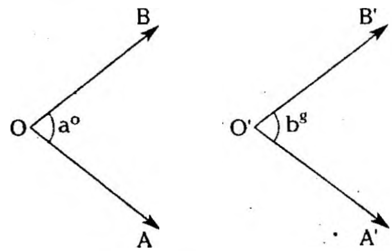


Figura 1.51

medidos en grados sexagesimales y centesimales respectivamente.

Datos

$$\frac{a}{b} = \frac{11}{9} \quad ....(1)$$

Además

el suplemento de la suma $(a^\circ + b^g)$ es $8{,}1^\circ$

$\Rightarrow\ 180^\circ - (a^\circ + b^g) = \dfrac{81^\circ}{10}$; multiplicando por 10 ambos miembros y homogenizando unidades, tendremos

$$1800^\circ - 10a^\circ - 10b^g \times \left(\frac{9^\circ}{10^g}\right) = 81^\circ$$

$$\Rightarrow\ 1800^\circ - 81^\circ = 10a^\circ + 9b^\circ$$

$$1719 = 10a + 9b \quad ...(2)$$

de (1)

$$a = \frac{11b}{9}$$

En (2)

$$1719 = 10\left(\frac{11b}{9}\right)+9b$$

$$\Rightarrow 1719 = \frac{110b + 81b}{9}$$

$$1719 = \frac{191b}{9} \Rightarrow b = 81$$

De (1)

a=99

Luego $m\sphericalangle AOB = 99^\circ$

$m\sphericalangle A'O'B' = 81^g$

Como

$$99^\circ = 99^\circ \times \left(\frac{10^g}{9^\circ}\right) = 110^g$$

$$\Rightarrow m\sphericalangle AOB > m\sphericalangle A'O'B'$$

$$\downarrow \qquad \downarrow$$

$$99^\circ \qquad 81^g$$

Finalmente, el ángulo mayor en el sistema circular se obtendrá, como sigue

$$m\sphericalangle AOB = 99^\circ\left(\frac{\pi\,rad}{180^\circ}\right)$$

$$\therefore\ m\sphericalangle AOB = \frac{11\pi\,rad}{20}$$

Problema 6

Si $\left(\frac{243}{20}\right)^\circ$ se expresa en la forma $x^g y^m$

Calcule $E = \sqrt{\frac{y-37}{x}} - 1$

Resolución

Convirtiendo a grados centesimales.

$$\left(\frac{243}{20}\right)^\circ = \left(\frac{243}{20}\right)^\circ\left(\frac{10^g}{9^\circ}\right) = \left(\frac{27^g}{2}\right) = 13{,}5^g$$

$$\left(\frac{243}{20}\right)^\circ = 13^g + 0{,}5^g\left(\frac{100^m}{1^g}\right) = 13^g + 50^m$$

$$\Rightarrow \left(\frac{243}{20}\right)^\circ = 13^g 50^m$$

Como

$$\left(\frac{243}{20}\right)^\circ = x^g y^m \Rightarrow x^g y^m = 13^g 50^m$$

Se deduce que

$x = 13,\ y = 50$

Finalmente, reemplazando en E

$$E = \sqrt{\frac{50-37}{13}} - 1 = \sqrt{\frac{13}{13}} - 1$$

$$\Rightarrow E = 1 - 1$$

$$\therefore E = 0$$

Problema 7

Si las medidas de los ángulos $x^\circ z'$ y $\left(\frac{6^g 3^m}{9^m}\right)^\circ \left(\frac{5'6''}{17''}\right)'$ son equivalentes. Calcule $x+z$.

Resolución

Del enunciado obtenemos

$$x^\circ z' = \left(\frac{6^g 3^m}{9^m}\right)^\circ \left(\frac{5'6''}{17''}\right)'$$

$$x^\circ z' = \left(\frac{6^g + 3^m}{9^m}\right)^\circ \left(\frac{5' + 6''}{17''}\right)'$$

Expresamos

6^g como 600^m y

5' como 300''

Luego

$$x^\circ z' = \left(\frac{603^m}{9^m}\right)^\circ \left(\frac{306''}{17''}\right)'$$

$$x^\circ z' = 67^\circ 18'$$

Entonces

$x = 67$ y $z = 18$

$\therefore x+z = 85$

Problema 8

Determine el ángulo entre – 180° y –90° que sea coterminal con 1290°.

Resolución

Sea x el ángulo buscado, el cual por ser coterminal a 1290° cumple

$x = n(360°) + 1290°, n \in Z$

Asignando a n valores enteros, se obtienen ángulos coterminales a 1290°, así

Si

$n = -1 \Rightarrow x = 930°$

$n = -2 \Rightarrow x = 570°$

$n = -3 \Rightarrow x = 210°$

$n = -4 \Rightarrow x = -150°$ se encuentra entre –180° y –90°

$n = -5 \Rightarrow x = -510°$

$\therefore$ El ángulo x buscado será –150°

Nota

Usted debe tener en cuenta que para encontrar $x=-150°$, a n se le asigna valores negativos, de otro modo nos alejaremos de lo buscado.

Problema 9

Los números que expresan las medidas de un ángulo en grados centesimales y radianes, están relacionados de la siguiente manera $40R = 8\pi - \frac{C}{3x}$. Calcule x, sabiendo que dicho ángulo mide 13°30'.

Resolución

Graficando el ángulo

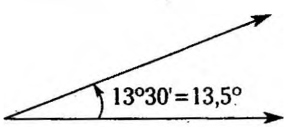


Figura 1.52

Expresando en centesimales y radianes

- $13{,}5° = \frac{27°}{2} \times \frac{10^g}{9°} = 15^g$
- $13{,}5° = \frac{27°}{2} \times \frac{\pi \text{ rad}}{180°} = \frac{3\pi \text{ rad}}{40}$

Identificando los números convencionales para dicho ángulo

$$S = \frac{27}{2} \ ; \ C = 15 \ ; \ R = \frac{3\pi}{40}$$

Como $40R = 8\pi - \frac{C}{3x}$

Reemplazando $40\left(\frac{3\pi}{40}\right) = 8\pi - \frac{15}{3x}$

$\Rightarrow \frac{15}{3x} = 5\pi$

$\therefore x = \frac{1}{\pi}$

Problema 10

Si la diferencia entre un tercio del número de grados sexagesimales y el cuádruple del número de radianes del mismo ángulo es la π ava parte de $(15-\pi)$. Calcule dicho ángulo en radianes.

Resolución

Planteando lo enunciado en el problema, tendremos

$\frac{1}{3}(S) - 4(R) = \frac{1}{\pi}(15-\pi)$ ....(1)

como $\frac{S}{180} = \frac{R}{\pi} \Rightarrow S = \frac{180R}{\pi}$

Reemplazando en (1)

$\frac{1}{3}\left(\frac{180R}{\pi}\right) - 4(R) = \frac{1}{\pi}(15-\pi)$

$\Rightarrow \frac{60R}{\pi} - 4R = \frac{1}{\pi}(15-\pi)$

$\frac{4R}{\pi}(15-\pi) = \frac{1}{\pi}(15-\pi)$

$\therefore R = \frac{1}{4}$

Problema 11

Halle la medida en radianes de un ángulo trigonométrico positivo que satisface la siguiente condición:

$$\sqrt{SC}\left(\frac{C-S}{2}\right)=\frac{40}{19}\sqrt{10}\left(\frac{1}{C}+\frac{1}{S}\right)$$

siendo S y C lo conocido para dicho ángulo.

Resolución

Como en la condición del problema sólo aparecen C y S, entonces podemos utilizar la fórmula

$$\frac{S}{9}=\frac{C}{10}=K \Rightarrow S=9K \ \wedge \ C=10K\,;\,K>0$$

porque se hace mención de que el ángulo debe ser positivo

Reemplazando

$$\sqrt{9K\times 10K}\left(\frac{10K-9K}{2}\right)=\frac{40}{19}\sqrt{10}\left(\frac{1}{10K}+\frac{1}{9K}\right)$$

$$\Rightarrow 3\sqrt{10}\,|K|\frac{K}{2}=\frac{40}{19}\sqrt{10}\times\frac{1}{K}\left(\frac{1}{10}+\frac{1}{9}\right);$$

pero

$|K|=K$ porque $K>0$

$$\frac{3K^2}{2}=\frac{40}{19}\times\left(\frac{19}{90}\right)\left(\frac{1}{K}\right)$$

$$K^3=\frac{8}{27}$$

$$K=\sqrt[3]{\frac{8}{27}} \Rightarrow K=\frac{2}{3}$$

Sustituyendo para valores de S y C

$\Rightarrow S=9K=9(2/3)=6$ y $C=10K=10(2/3)=20/3$

Para hallar R, se puede utilizar

$$\frac{S}{180}=\frac{R}{\pi} \Rightarrow \frac{6}{180}=\frac{R}{\pi}\Rightarrow R=\frac{\pi}{30}$$

$\therefore$ El ángulo medido en radianes resulta ser $\frac{\pi}{30}$

Problema 12

Determine la medida, en el Sistema Internacional, de un ángulo cuyos números convencionales cumplen la relación

$$\sqrt{\frac{\pi}{30R}+\pi}+\sqrt{\frac{20}{3C}+\pi}+\sqrt{\frac{6}{S}+\pi}=\frac{1}{2}$$

Resolución

En este problema, aparecen R, C y S, entonces utilizamos $\frac{S}{180}=\frac{C}{200}=\frac{R}{\pi}$.

de donde

$$S=\frac{180R}{\pi},\ C=\frac{200R}{\pi}$$

reemplazando en la relación

$$\sqrt{\frac{\pi}{30R}+\pi}+\sqrt{\frac{20}{3\left(\frac{200R}{\pi}\right)}+\pi}+\sqrt{\frac{6}{\frac{180R}{\pi}}+\pi}=\frac{1}{2}$$

Se puede observar que todo quedó en términos de R (que viene a ser lo pedido), simplificando tendremos

$$\sqrt{\frac{\pi}{30R}+\pi}+\sqrt{\frac{\pi}{30R}+\pi}+\sqrt{\frac{\pi}{30R}+\pi}=\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow 3\sqrt{\frac{\pi}{30R}+\pi}=\frac{1}{2}\Rightarrow\sqrt{\frac{\pi}{30R}+\pi}=\frac{1}{6}$$

$$\Rightarrow\frac{\pi}{30R}+\pi=\frac{1}{36}$$

$$\Rightarrow\frac{\pi}{30R}=\frac{1-36\pi}{36}$$

$$\therefore R=\frac{6\pi}{5-180\pi}$$

Problema 13

La suma de los números que representan el complemento de un ángulo en los tres sistemas conocidos es igual a la suma de los números que representan las medidas en los tres sistemas. Halle dicho ángulo en radianes.

Resolución

Del enunciado

$$(90-S)+(100-C)+\left(\frac{\pi}{2}-R\right)=S+C+R$$

$$\Rightarrow 190+\frac{\pi}{2}=2(S+C+R)$$

$$\Rightarrow 190+\frac{\pi}{2}=2\left(\frac{180R}{\pi}+\frac{200R}{\pi}+R\right)$$

$$\Rightarrow 190+\frac{\pi}{2}=2\left(\frac{380R}{\pi}+R\right)$$

$$\frac{380+\pi}{2}=\frac{2R}{\pi}(380+\pi)$$

$$\therefore R=\pi/4$$

Problema 14

Si x e y representan a los números de minutos centesimales y minutos sexagesimales respectivamente de un ángulo, además se cumple que $x-y=368$, entonces, ¿cuál es la medida de dicho ángulo en radianes?

Resolución

Antes de solucionar este problema, tomemos en cuenta lo siguiente: Para un ángulo trigonométrico se cumple que su número de minutos sexagesimales es igual a 60 veces su números de grados, en efecto si convertimos a minutos S° tendremos

$$S°=S°\times\frac{60'}{1°}=(60S)'$$

Con este razonamiento, se deduce el siguiente cuadro que se verifica para cualquier ángulo trigonométrico.

	Sexagesimales	Centesimales
Nro. de grados	S	C
Nro. de minutos	60 S	100 C
Nro. de segundos	3600 S	10000 C

Ahora de lo planteado en el problema (14) tendremos

$$x=100C \quad \wedge \quad y=60S$$

reemplazando en la condición

$$100C-60S=368$$

$$100\left(\frac{200R}{\pi}\right)-60\left(\frac{180R}{\pi}\right)=368$$

$$\Rightarrow \frac{20000R}{\pi}-\frac{10800R}{\pi}=368$$

$$\frac{9200R}{\pi}=368$$

$$\therefore R=\frac{\pi}{25}$$

Problema 15

Reduzca la siguiente serie

$$90°+50^g+22°30''+\frac{\pi\,\text{rad}}{16}+\ldots\ldots$$

Resolución

Convirtiendo a radianes tenemos

$$90°=\frac{\pi\text{ rad}}{2}\ ;\ 50^g=\frac{\pi\text{ rad}}{4}\ ;\ 22°30''=\frac{\pi\text{ rad}}{8}\ \ldots$$

entonces la serie N quedará

$$N=\frac{\pi\,rad}{2}+\frac{\pi\,rad}{4}+\frac{\pi\,rad}{8}+\frac{\pi\,rad}{16}+\ldots$$

$$\Rightarrow N=\pi rad\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\ldots\right)$$

sea $A=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\ldots$

$$A=\frac{1}{2}\left(\underbrace{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots}_{A}\right)$$

$$\Rightarrow A=\frac{1}{2}(1+A)$$

$$\Rightarrow A=1$$

Reemplazando en N

$\therefore N=\pi$ rad

y N en grados sexagesimales y grados centesimales son respectivamente 180° y 200^g.

Problema 16

Los ángulos interiores de un triángulo equilátero son $(x-y)°$; $z\pi$ rad y $(x+y+z)^g$.

Calcule $x, y \wedge z$

Resolución

Condición

- $(x-y)° = 60° \Rightarrow x-y=60 \ldots (1)$
- $z rad = 60° = \frac{\pi rad}{3} \Rightarrow z=\frac{1}{3} \ldots(2)$
- $(x+y+z)^g=60°=60°\times\frac{10^g}{9°}=\frac{200^g}{3}$

Luego $x+y+z=\frac{200}{3}$, pero como $z=\frac{1}{3}$

$$\Rightarrow x+y=\frac{199}{3}\ldots(3)$$

Resolviendo (1) y (3)

$$x=\frac{379}{6}\ ;\ y=\frac{19}{6}$$

$$\therefore x=\frac{379}{6}\ ;\ y=\frac{19}{6}\ ;\ z=\frac{1}{3}$$

Problema 17

Si el sistema sexagesimal (o inglés) y el sistema centesimal (o francés) son conocidos y estudiados en varios países, es por el poder económico que tienen algunos países en el planeta como es sabido. Supongamos que en el Perú se inventa un sistema de medición angular donde la unidad es el grado Atahualpa (1^A) que equivale a la 500ava parte de la medida del ángulo de una vuelta, así también podemos definir sub múltiplos tal que $1^A=50^*$ (1^*: Un minuto Atahualpa) y $1^*=50^{**}$ (1^{**}: Un segundo Atahualpa). Entonces se concluye que inventar un sistema de medición angular no crea dificultad. Con estas definiciones del nuevo sistema, convierta $\pi/3$ rad a grados, minutos y segundos Atahualpa.

Resolución

Definición

$$1^A=\frac{m\sphericalangle 1\,vuelta}{500}\Rightarrow m\sphericalangle 1vuelta=500^A$$

como piden convertir $\pi/3$ rad al sistema Atahualpa, consideramos

$m\sphericalangle 1vuelta=2\pi rad$

$\Rightarrow 500^A=2\pi rad \qquad \therefore\ 250^A=\pi rad$

Entonces

$$\frac{\pi rad}{3}=\frac{\pi rad}{3}\left(\frac{250^A}{\pi rad}\right)=\frac{250^A}{3}$$

$$\Rightarrow\frac{\pi rad}{3}=83^A+\frac{1^A}{3}=83^A+\frac{1^A}{3}\left(\frac{50}{1^A}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{\pi rad}{3} = 83^A + \frac{50^*}{3} = 83^A + 16^* + \frac{2^*}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{\pi rad}{3} = 83^A + 16^* + \frac{2^*}{3}\left(\frac{50^{**}}{1^*}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{\pi rad}{3} = 83^A + 16^* + 33,\hat{3}^{**}$$

$$\therefore \frac{\pi rad}{3} = 83^A 16^* 33,\hat{3}^{**}$$

Problema 18

Si S y C son los números de grados sexagesimales y centesimales respectivamente para un mismo ángulo, los cuales cumplen: $40<S+C<120$. Calcule el mayor ángulo entero en grados centesimales.

Resolución

Dato: $40<S+C<120$ ...(1)

Sabemos $\frac{S}{9}=\frac{C}{10}=k \begin{cases} S=9k \\ C=10k \end{cases}$

Como el ángulo es el mayor entero entonces $k \in Z$.

Reemplazando en (1)

$40<9k+10k<120 \qquad 40<19k<120$

$2,105\ldots < k < 6,315\ldots$

Luego $k=\{3, 4, 5, 6\} \Rightarrow k_{mayor}=6$

Además $C=10k=10(6) \Rightarrow C=60$

$\therefore$ El mayor ángulo medirá 60^g

Problema 19

Determine la medida de un ángulo negativo en el sistema centesimal, sabiendo que al medirlo en los tres sistemas convencionales, se relacionan de la siguiente forma: la diferencia de siete veces el mayor y el intermedio es igual al menor número elevado al cuadrado. (Considerar $\pi = 22/7$)

Resolución

Sabemos que para un ángulo negativo se cumple $R>S>C$

Dato: $7R-S=C^2$ ..... (1)

Sabemos que $\frac{S}{180}=\frac{C}{200}=\frac{R}{\pi}$

$$\Rightarrow S=\frac{180C}{200} \; ; \; R=\frac{\pi C}{200}$$

Reemplazando en (1)

$$7\left(\frac{\pi C}{200}\right)-\left(\frac{180C}{200}\right)=C^2$$

$$\Rightarrow \frac{7\left(\frac{22}{7}\right)C-180C}{200}=C^2$$

$$\Rightarrow \frac{-158C}{200}=C^2 \Rightarrow -\frac{79C}{100}=C^2$$

$$\Rightarrow C=0 \quad ó \quad C=\frac{-79}{100}$$

Como el ángulo es negativo, tenemos $C=\frac{-79}{100}$

$\therefore$ el ángulo es $-0,79^g$

Problema 20

La diferencia de la cuarta parte del número de segundos centesimales de un ángulo y veinticinco veces el número de minutos sexagesimales de otro ángulo es igual a 19 000, además los ángulos son complementarios. Calcule dichos ángulos en grados sexagesimales.

Resolución

Sean los ángulos α y β, cuyos números convencionales en los tres sistemas son S_1, C_1, R_1 y S_2, C_2, R_2 respectivamente.

Del enunciado

$$\frac{1}{4}(10000C_1) - 25(60S_2) = 19000 \;....(1)$$

$$S_1+S_2=90 \;....(2)$$

simplificando (1)

$$5C_1 - 3S_2 = 38 \;....(3)$$

multiplicando 3 a (2)

$$3S_1+3S_2=270 \;....(4)$$

sumando (3) y (4)

$$3S_1+5C_1 = 308 \;..... (5)$$

sabemos $\frac{S_1}{9} = \frac{C_1}{10} = k \begin{cases} S_1 = 9k \\ C_1 = 10k \end{cases}$

Reemplazando en (3)

$$3(9k)+5(10k)=308 \Rightarrow k=4$$

luego

$S_1=9k=9(4)$

$\therefore\ S_1=36$

Reemplazando en (2)

$\therefore\ S_2=54$

Por lo tanto, los ángulos serán 36° y 54°.

Problema 21

Sabiendo que el ángulo central de un sector circular (para sus números convencionales) se relaciona de la siguiente forma

$$\frac{S}{6} - \frac{20R}{\pi} = 0,5$$

Calcule la medida del radio de dicho sector, si la longitud del arco que sostiene es 2πcm.

Resolución

Graficando un sector circular

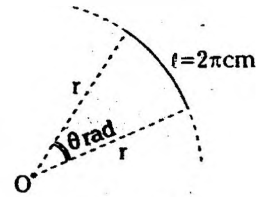


Figura 1.53

De la condición, para calcular θ

$$\frac{S}{6} - \frac{20R}{\pi} = \frac{1}{2} \;...(1)$$

Recordamos

$$\frac{S}{180} = \frac{R}{\pi} \Rightarrow S = \frac{180R}{\pi}$$

En (1)

$$\frac{1}{6}\left(\frac{180R}{\pi}\right) - \frac{20R}{\pi} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{10R}{\pi} = \frac{1}{2}$$

$$R = \frac{\pi}{20}, \text{ entonces } \theta = \frac{\pi}{20}$$

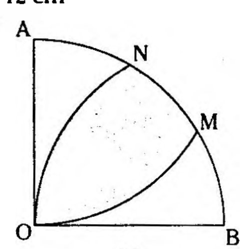
luego $r = \frac{\ell}{\theta} = \frac{2\pi cm}{\pi/20}$

$\therefore\ r = 40\,cm$

Problema 22

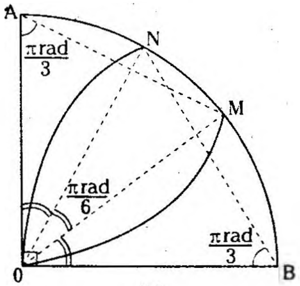
Calcule el perímetro de la región sombreada. Si AOB es un cuadrante, además A y B son centros de los arcos OM y ON, respectivamente.

Dato: OA = 12 cm



(a)

Resolución



(b)

Figura 1.54

Sea x el perímetro de la región sombreada

$\Rightarrow \; x = \ell_{\overset{\frown}{ON}} + \ell_{\overset{\frown}{NM}} + \ell_{\overset{\frown}{OM}}$ .... (I)

Los Δ AOM y Δ BON son equiláteros de lado igual al radio del cuadrante (12 cm).

- En el sector circular OBN

$$\ell_{\overset{\frown}{ON}} = \frac{\pi}{3} \times 12 \text{ cm} = 4\pi \text{ cm}$$

- En el sector circular NOM

$$\ell_{\overset{\frown}{NM}} = \frac{\pi}{6} \times 12 \text{ cm} = 2\pi \text{ cm}$$

- En el sector circular MAO

$$\ell_{\overset{\frown}{OM}} = \frac{\pi}{3} \times 12 \text{ cm} = 4\pi \text{ cm}$$

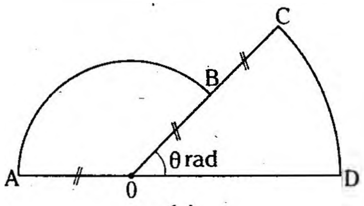
Luego en I

$$x = 4\pi \text{ cm} + 2\pi \text{ cm} + 4\pi \text{ cm}$$

$$\therefore \; x = 10\pi \text{ cm}$$

Problema 23

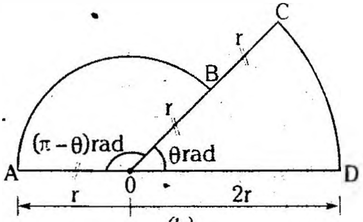
En la figura 1.55 (a) se muestran los sectores circulares AOB y COD de perímetros equivalentes, calcule θ.



(a)

Resolución

Considerando AO=r $\Rightarrow$ OD=2r



(b)

Figura 1.55

Condición del problema

$$\underline{\text{Perímetro del sector AOB}} = \underline{\text{Perímetro del sector COD}}$$

$$AO + OB + \ell_{\overset{\frown}{AB}} = OD + OC + \ell_{\overset{\frown}{CD}}$$

$$r + r + (\pi - \theta)r = 2r + 2r + \theta.2r$$

$$(\pi - \theta)r = (2 + 2\theta)r$$

$$\pi - \theta = 2 + 2\theta$$

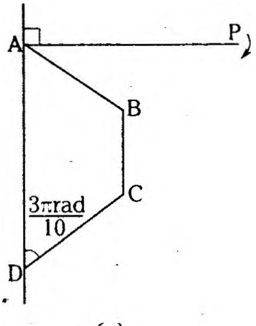
$$\pi - 2 = 3\theta$$

$$\therefore \; \theta = \frac{\pi - 2}{3}$$

Problema 24

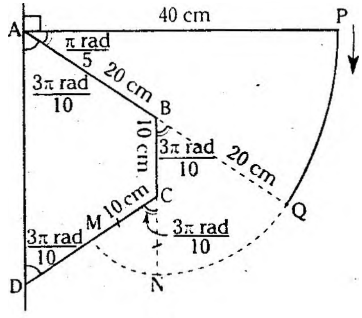
De la figura 1.56 (a) calcule la longitud recorrida por el extremo P de la cuerda AP, si ésta tiene una longitud exacta para envolver al trapecio sólo hasta el punto medio del lado $\overline{DC}$.

Datos: AB=DC=2BC=20 cm



(a)

Resolución



(b)

Figura 1.56

De la figura 1.64 la longitud recorrida por el punto P será:

$$\ell_{TOTAL} = \ell_{\overset{\frown}{PQ}} + \ell_{\overset{\frown}{QN}} + \ell_{\overset{\frown}{NM}} \ ...(1)$$

Condición del problema

AB = 2BC = DC = 20 cm

$\Rightarrow$ AB = 20 cm ; BC = 10 cm ; DC = 20 cm

Luego del gráfico

CM = 10 cm ; BN = 20 cm ; AQ = 40 cm

En (1)

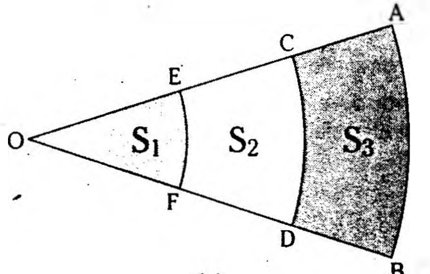
$$\ell_{TOTAL} = \frac{\pi}{5}(40\,cm) + \frac{3\pi}{10}(20\,cm) + \frac{3\pi}{10}(10\ cm)$$

$$\therefore \ \ell_{TOTAL} = 17\pi \ cm$$

Problema 25

De la figura 1.57(a) AOB, COD y EOF son sectores circulares. Además $\frac{S_3}{5} = \frac{S_2}{3} = S_1$.

Calcule $K = \frac{\ell_{\overset{\frown}{CD}}}{\ell_{\overset{\frown}{EF}}} - \frac{\ell_{\overset{\frown}{EF}}}{\ell_{\overset{\frown}{AB}}}$.



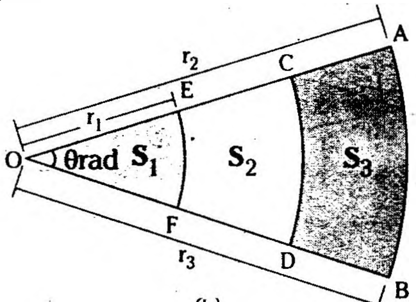
(a)

Resolución

De la condición del problema:

$$\frac{S_3}{5} = \frac{S_2}{3} = S_1 \left\} \begin{array}{l} S_3 = 5S_1 \\ S_2 = 3S_1 \end{array} \right.$$

Considerando, el ángulo central θ (en radianes), luego



(b)

$$S_1 = \frac{\theta\, r_1^2}{2} \ ....(1)$$

$$4S_1 = \frac{\theta\, r_2^2}{2} \Rightarrow S_1 = \frac{\theta\, r_2^2}{8} \ ..... (2)$$

$$9S_1 = \frac{\theta\, r_3^2}{2} \Rightarrow S_1 = \frac{\theta\, r_3^2}{18} \ ..... (3)$$

Igualando (1), (2) y (3)

$$\frac{\theta\, r_1^2}{2} = \frac{\theta\, r_2^2}{8} = \frac{\theta\, r_3^2}{18}$$

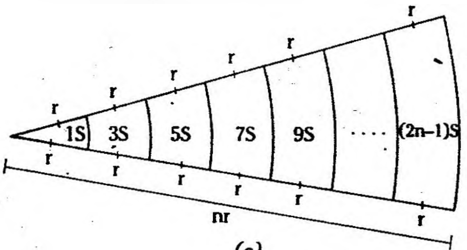
$$\Rightarrow r_1^2 = \frac{r_2^2}{4} = \frac{r_3^2}{9}$$

$$\Rightarrow r_1 = \frac{r_2}{2} = \frac{r_3}{3}$$

Evaluando en K

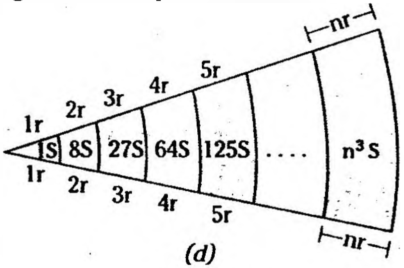
$$K=\frac{\theta r_2}{\theta r_1}-\frac{\theta r_1}{\theta r_3}=\frac{2}{1}-\frac{1}{3} \qquad \therefore\ K=5/3$$

A partir de este problema podemos concluir la siguiente relación de áreas



(c)

Las áreas son proporcionales a los números impares. Y de igual forma se puede verificar



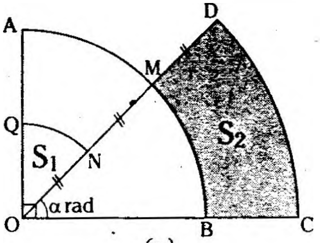
(d)

Figura 1.57

Las áreas son proporcionales a los cubos consecutivos.

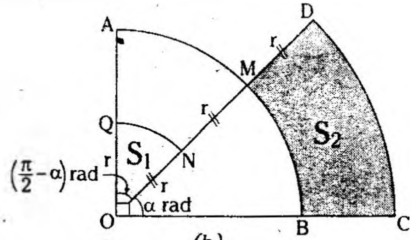
Problema 26

Del gráfico mostrado, AOB es un cuadrante, determine el valor de α sabiendo que las áreas de las regiones sombreadas se relacionan de la siguiente manera $\frac{S_1}{S_2}=\frac{1}{2}$.



(a)

Resolución



(b)

Figura 1.58

Sea ON = r

De la figura

$$S_1=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right).r^2$$

$$S_2=S_{COD}-S_{BOM}$$

$$S_2=\frac{1}{2}(\alpha)(3r)^2-\frac{1}{2}(\alpha)(2r)^2$$

$$S_2=\frac{5\alpha r^2}{2}$$

Reemplazando S_1 y S_2 en la condición

$$\frac{S_1}{S_2}=\frac{1}{2} \Rightarrow 2S_1=S_2$$

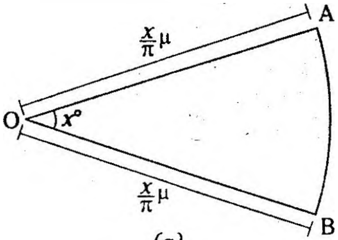
$$2.\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)r^2=\frac{5}{2}(\alpha)r^2 \Rightarrow \frac{\pi}{2}-\alpha=\frac{5\alpha}{2}$$

resolviendo esta última ecuación obtenemos:

$$\therefore\ \alpha=\frac{\pi}{7}$$

Problema 27

De la figura 1.59(a), calcule el área del sector circular AOB cuando la longitud del arco AB toma su mínimo valor entero. Además $x \in \mathbb{Z}^+$.

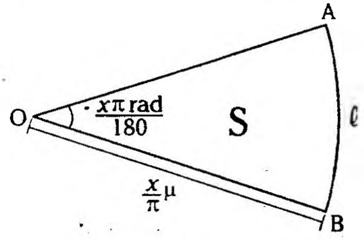


(a)

Resolución

De la figura 1.59(a); expresando el ángulo en radianes

$$x^o = x^o\left(\frac{\pi\,\text{rad}}{180^o}\right) = \frac{x\pi\,\text{rad}}{180} \Rightarrow x^o = \frac{x\pi\,\text{rad}}{180}$$



(b)

Figura 1.59

Además

$$\ell = \left(\frac{x\pi}{180}\right)\left(\frac{x}{\pi}\right) = \frac{x^2}{180}$$

$x^2 = 180\ell$ (como $x \in \mathbb{Z}^+$ y ℓ es mínimo y entero

$\Rightarrow x = 30$ y $\ell = 5$

Luego, sea S_{AOB} el área del sector circular AOB.

$$\Rightarrow S_{AOB} = \frac{1}{2}\left(\frac{x}{\pi}\right).\ell = \frac{1}{2}\left(\frac{30}{\pi}\right)5$$

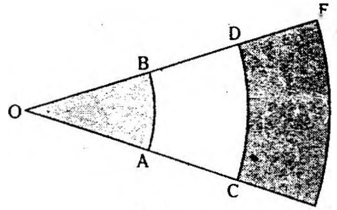
$$\therefore\ S_{AOB} = \frac{75}{\pi}u^2$$

Problema 28

En la figura 1.60(a) se tiene arcos de circunferencia AB, CD y EF con centro común en O, donde el área de los sectores circulares cumple

$$S_{AOB} = \frac{S_{COD}}{2} = \frac{S_{EOF}}{3}$$

Calcule la longitud del arco CD, si la del arco EF es $\sqrt{6}$ u.



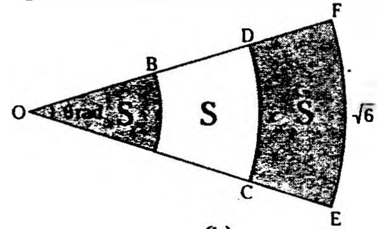
(a)

Resolución

Considerando

$S_{AOB} = S$, entonces $S_{COD} = 2S$, $S_{EOF} = 3S$

Además sea el ángulo central θ (en radianes) y la longitud del arco CD sea x obtenemos



(b)

Figura 1.60

Aplicando la fórmula del área de un sector circular, en términos del arco y el ángulo central $\ell^2/2\theta$.

En el sector circular EOF

$$3S = \frac{\sqrt{6}^2}{2\theta} \Rightarrow S = \frac{1}{\theta}\ \ldots\ldots(1)$$

En sector circular COD $2S = \dfrac{x^2}{2\theta}\ \ldots\ldots(2)$

Sustituyendo (1) en (2) $2\left(\dfrac{1}{\theta}\right) = \dfrac{x^2}{2\theta}$

$\Rightarrow x^2 = 4$, de donde $x=2 \vee x=-2$,

pero como x es una longitud (debe ser positiva).

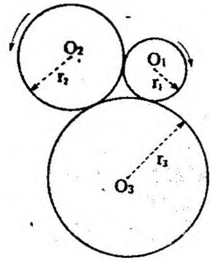
$\therefore x = 2$ u

Problema 29

De la figura, las ruedas de radios r_1 y r_2 giran alrededor de la rueda de radio r_3 (rueda fija), en sentidos opuestos y con la misma velocidad. Calcule la relación del número de vueltas entre dichas ruedas (r_1 y r_2) hasta chocar por primera vez; sabiendo además que

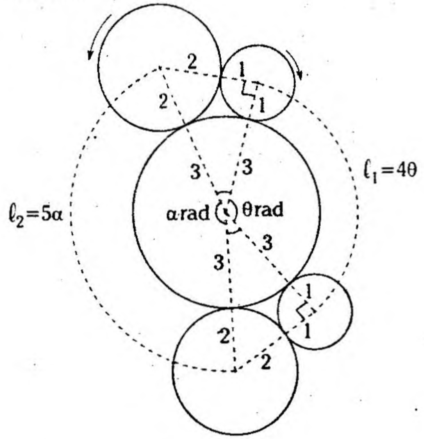
$r_1 = 1u$; $r_2 = 2u$; $r_3 = 3u$.

(Las ruedas r_1 y r_2 no resbalan).



(a)

Resolución



(b)

Figura 1.61

De la figura 1.61 piden

$$\frac{n_1}{n_2}=\frac{\dfrac{\ell_1}{2\pi r_1}}{\dfrac{\ell_2}{2\pi r_2}}=\frac{\dfrac{4\theta}{2\pi(1)}}{\dfrac{5\alpha}{2\pi(2)}} \Rightarrow \frac{n_1}{n_2}=\frac{8\theta}{5\alpha} \;...(1)$$

Además, por condición las ruedas r_1 y r_2 tienen la misma velocidad y, para un mismo tiempo t, ambas ruedas han recorrido los mismos espacios relativo a sus centros, es decir

$$\ell_1=\ell_2 \Rightarrow \alpha(5)=\theta(4)$$

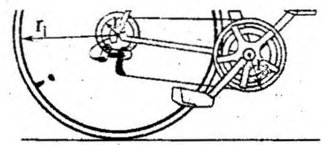
$$\Rightarrow \frac{\theta}{\alpha}=\frac{5}{4}\;...(2)$$

Reemplazando (2) en (1)

$$\frac{n_1}{n_2}=\frac{8}{5}\left(\frac{5}{4}\right) \therefore \frac{n_1}{n_2}=2$$

Problema 30

En la figura 1.62(a) se muestra el esquema de la cadena de transmisión de una bicicleta. ¿Qué longitud horizontal en metros recorre la bicicleta por una revolución del disco de radio?

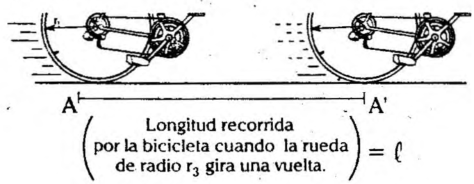


(a)

Datos:

$r_1=40$ cm; $r_2=4$ cm y $r_3=10$ cm

Resolución



(b)

Figura 1.62

Entonces de la figura $\ell=\theta_1 r_1$

donde θ_1 es el ángulo girado por la rueda de radio r_1 cuando el disco de radio r_3 gira $\theta_3=2\pi$ (dato) y como los discos de radios r_2 y r_3 están conectados por una cadena, se cumple

$$\theta_2 r_2=\theta_3 r_3$$

$$\theta_2=\theta_3\frac{r_3}{r_2} \;.....(2)$$

donde θ_2 es el ángulo girado por el disco de radio r_2.

Como la rueda de radios r_1 y el disco de radio r_2 están conectados por un mismo eje, se cumple

$$\theta_1=\theta_2 \;....(3)$$

(3) en (2)

$$\theta_1=\theta_3\frac{r_3}{r_2} \;....(4)$$

(4) en (1)

$$\ell=\frac{\theta_3 r_3 r_1}{r_2}$$

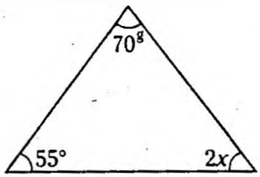
Reemplazando datos

$$\ell=2\pi\left(\frac{10\,\text{cm}}{4\,\text{cm}}\right)40\,\text{cm}$$

$$\therefore \ell=200\pi\,\text{cm}\approx 628\,\text{cm}$$

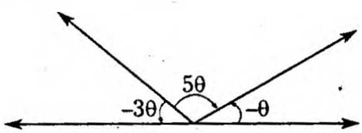
Problemas Propuestos

1. Del gráfico, halle x en radianes.



A) $\frac{62\pi}{90}$ rad B) $\frac{31\pi}{180}$ rad C) $\frac{31\pi}{90}$ rad
D) $\frac{31\pi}{90}$ rad E) $\frac{61\pi}{90}$ rad

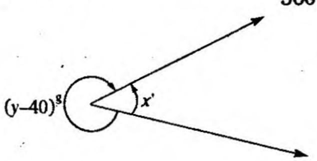
2. Del siguiente gráfico



θ es igual a

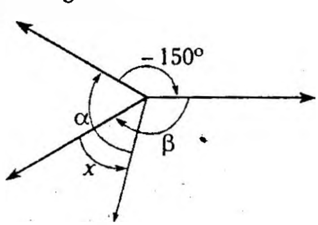
A) –28° B) –22° C) –20°
D) –26° E) –25°

3. Del gráfico adjunto, calcule $K = \frac{x}{360 + y}$



A) $\frac{1}{54}$ B) 53 C) 54
D) 55 E) 56

4. Halle x, en términos de α y β; a partir del siguiente gráfico



A) $-\alpha-\beta-\frac{5\pi}{6}$ B) $-\alpha+\beta-\frac{2\pi}{3}$

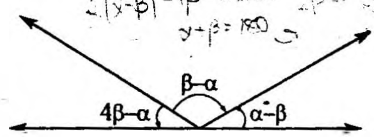
C) $-\alpha-\beta-\frac{7\pi}{6}$

D) $\alpha-\beta-\frac{7\pi}{6}$ E) $\alpha+\beta-\frac{7\pi}{6}$

5. Los ángulos internos de un heptágono se encuentran en progresión aritmética. Se sabe que su ángulo intermedio (en la progresión) es equivalente a $\alpha^g\beta^m\phi^s$. Calcule $\beta+\phi-\alpha$, aproximadamente.

A) –16 B) –15 C) 16
D) 17 E) 14

6. Del gráfico, halle el valor de α, cuando β toma su mínimo valor entero.



A) 116° B) 122° C) 118°
D) 119° E) 121°

7. Se tiene dos ángulos donde la suma en el sistema sexagesimal es 81° y su diferencia en el sistema centesimal es 30^g. Calcule dichos ángulos en el sistema radial.

A) $\frac{\pi}{12}; \frac{3\pi}{5}$ B) $\frac{\pi}{10}; \frac{\pi}{5}$ C) $\frac{3\pi}{5}; \frac{\pi}{10}$

D) $\frac{\pi}{5}; \frac{3\pi}{10}$ E) $\frac{3\pi}{20}; \frac{3\pi}{10}$

8. Si se idea un nuevo sistema de medida angular donde una vuelta equivale a 300 grados de dicho sistema y a su vez cada grado posee 20 minutos y cada minuto 20 segundos, ¿a cuántos segundos del nuevo sistema equivale un segundo centesimal?

A) $\frac{3}{100}$ B) $\frac{7}{100}$ C) $\frac{1}{50}$
D) $\frac{1}{100}$ E) $\frac{1}{40}$

9. ¿Cuánto mide un ángulo en el cual se ha cometido un error de $0,0092\pi$ rad al escribir a' en lugar de a^{m}?.

A) $3,1^g$ B) $2,14^g$ C) $3,12^g$
D) $2,16^g$ E) $2,1^g$

10. $a°$ y b^g son las medidas de dos ángulos cuya suma es 180° y su diferencia es de la forma $\frac{k\pi}{2}$ rad ; $k \in \mathbb{Z}$. Calcule $a+b$, comprendido entre 190 y 200.

A) 192 B) 195 C) 196
D) 198 E) 199

11. Se mide un ángulo trigonométrico en el sentido horario y se observa lo siguiente: el cociente entre la diferencia y la suma del número de grados sexagesimales y centesimales es igual al cociente entre el número de radianes y 5π. Encuentre el valor del ángulo en sexagesimales.

A) $-\frac{900°}{19}$ B) $-\frac{800°}{17\pi}$ C) $-\frac{400°}{19\pi}$
D) $-\frac{400°}{17\pi}$ E) $-\frac{900°}{17\pi}$

12. El número de *grados equis* de cierto ángulo es igual a la semidiferencia entre π veces su número de grados sexagesimales y el cuádruple de su número de radianes. Entonces halle un *grado equis* en radianes.

A) $\frac{1}{81}$ B) $\frac{1}{88}$ C) $\frac{1}{32}$
D) $\frac{1}{72}$ E) $\frac{1}{49}$

13. ¿A cuántos minutos centesimales equivalen 81 minutos sexagesimales?

A) 120 B) 142 C) 150
D) 160 E) 130

14. Si $\frac{k}{81} = \frac{L}{250}$

además k representa los números de segundos sexagesimales y L los números de segundos centesimales para un mismo ángulo. Calcule L, si la medida del ángulo es de $\left(\frac{9}{25}\right)^{\circ}$

A) 1 200 B) 3 200 C) 4 500
D) 4 000 E) 2 700

15. Dada la igualdad

$$\frac{n+m}{n-m} = \frac{R^2}{23} - 1$$

donde m, n y R representan el número de minutos sexagesimales, número de minutos centesimales y número de radianes de un mismo ángulo, respectivamente. Calcule el menor ángulo en radianes que cumple dicha condición.

A) −12 B) −14 C) −10
D) − 8 E) − 6

16. Siendo S y C los números que expresan la medida de un mismo ángulo en los sistemas sexagesimales y centesimal que cumple

$$\frac{S}{2}-\frac{C}{3}<7<\frac{C}{2}+\frac{S}{3}$$

Halle $N=R_M-R_m$
Si R_M y R_m son los números de radianes del mayor y menor ángulo respectivamente que satisfacen la relación anterior y además S y C son números enteros.

A) $\frac{3\pi}{10}$ B) $\frac{2\pi}{9}$ C) $\frac{\pi}{5}$
D) $\frac{\pi}{20}$ E) $\frac{\pi}{10}$

17. Al medir un ángulo generado en el sentido antihorario, se observó que los números que representan sus medidas en los sistemas convencionales se relacionan en la forma siguiente: el doble del menor número más el triple del número intermedio es 1912. Calcule la medida de dicho ángulo en radianes.
(Dato: $\pi=22/7$)

A) 118 rad B) 11 rad C) 48 rad
D) 52 rad E) 64 rad

18. S y C son lo convencional.
Además $S^{-C^{-1}}=3^{-S^{-1}}$
Calcule

$$M=\sqrt{C+10}^{\sqrt{S-9}^{\sqrt{C+10}}}+\sqrt{C+6}^{\sqrt{S+7}^{\sqrt{C-10}}}$$

A) 3 B) 4 C) 5
D) 7/2 E) 8

19. S y C son lo convencional y son números enteros, además se cumple

$$\frac{C}{\sqrt{10-S}}-\frac{S}{\sqrt{C-9}}=1$$

Calcule $k=C^{S-9}-S^{C-10}$

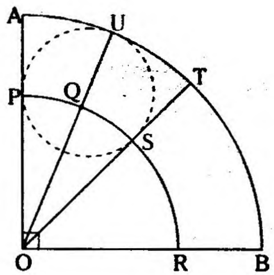
A) 9 B) −1 C) 1
D) 0 E) 2

20. Un estudiante observó que el número de grados sexagesimales S y el número de grados centesimales C del ángulo que formaban las agujas de un reloj (horario y minutero) estaban expresados por
$S=(x+y)^2-2xy$, $C=(x+y)(x-y)$.
Entonces la hora que indicaba el reloj podría ser

A) 4:15 p.m.
B) 2:100/11 p.m.
C) 4:30 p.m.
D) 3:180/11 p.m.
E) 1:00 p.m.

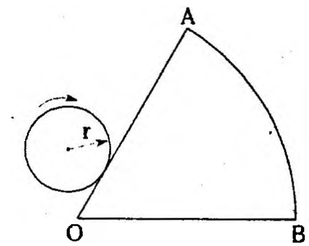
21. En el gráfico adjunto, AOB y ROP son sectores circulares. Halle el área de la región sombreada si las longitudes de los arcos QS y TB son como 2 es a 3, además O y Q son centros; OQ = 2 cm.

A) $\frac{5\pi}{6}cm^2$
B) $\frac{5\pi}{12}cm^2$
C) $\frac{5\pi}{4}cm^2$
D) $\frac{5\pi}{9}cm^2$
E) $\frac{5\pi}{24}cm^2$



22. Calcule el número de vueltas realizada por la rueda ideal de radio r; (r = 1); al recorrer por primera vez el perímetro de la región sombreada, siendo dicho perímetro igual a 5 π m.

A) 1/2
B) 3/2
C) 5/2
D) 7/2
E) 9/2



23. Halle la medida del ángulo central de un sector circular, sabiendo que la longitud de arco de dicho sector es igual al perímetro de la circunferencia inscrita en dicho sector.

A) $\frac{\pi}{3}$ rad B) $\frac{\pi}{2}$ rad C) $\frac{5\pi}{6}$ rad
D) π rad E) $\frac{7\pi}{6}$ rad

24. Dos ciudades M y N se encuentran situadas sobre la línea ecuatorial. Cuando en M son las 9:00 am; en N son las 10:12 am. Calcule la distancia entre dichas ciudades (asumir radio terrestre 6 300 km)

A) 630π km B) 315π km C) 210π km
D) 90π km E) 540π km

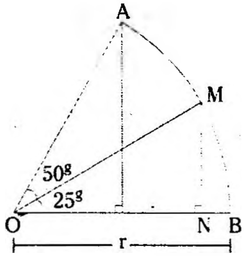
25. Se tiene un sector circular de radio R y perímetro 15R/7, ¿cuánto hay que aumentar el ángulo central de dicho sector, para que su perímetro no varíe, si su radio disminuye en la mitad del anterior?

A) $\frac{15\pi}{7}$ rad B) $\frac{8}{7}$ rad C) $\frac{8\pi}{7}$ rad
D) $\frac{10}{7}$ rad E) $\frac{15}{7}$ rad

26. Los radios de las ruedas de una bicicleta son: $(x+1)$m y $(x-1)$m. Si la rueda mayor da $(x-2)$ vueltas y la menor $(x-1)$ vueltas, ¿cuántas vueltas en total darán las dos ruedas?

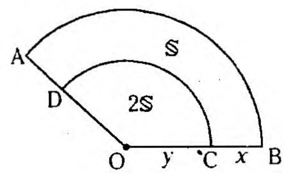
A) 1 vuelta B) 3 vueltas C) 5 vueltas
D) 7 vueltas E) 9 vueltas

27. De la figura calcule el área sombreada (AOB: sector circular); siendo MN=4.



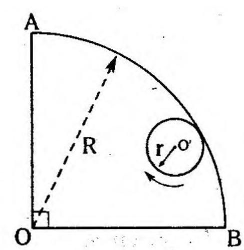
A) $\frac{\pi}{4}r^2$ B) $\frac{\pi}{8}r^2$ C) $\frac{\pi}{6}r^2$
D) $\frac{\pi}{16}r^2$ E) $\frac{\pi}{20}r^2$

28. Siendo O centro de los sectores circulares AOB y COD. Halle $\frac{x}{y}$, si $\mathbb{S}$ expresa área



A) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ B) $\frac{\sqrt{6}-2}{2}$ C) $\frac{\sqrt{2}+2}{\sqrt{3}}$
D) $\frac{\sqrt{3}+3}{3}$ E) $\frac{2+\sqrt{2}}{2}$

29. Si AOB y la rueda de centro O' están en un mismo plano. Determine el ángulo girado por este último tal que recorra internamente el perímetro de AOB por primera vez.
(Dato: R=3r=3)



A) $\left(2\sqrt{3}-2+\frac{\pi}{3}\right)$rad B) $\frac{\pi}{3}$ rad
C) $\frac{\pi}{4}$ rad
D) 1 rad E) $\left(\sqrt{3}+2-\frac{\pi}{3}\right)$rad

30. Se tiene el sector circular AOB, con centro en O, internamente se traza el sector CBD con centro en B (D en OB y C en $\overset{\frown}{AB}$), tal que OD = DB y $\ell_{\overset{\frown}{BC}} + 4\ell_{\overset{\frown}{CD}} = 2\pi\ell_{\overset{\frown}{AC}}$. Determine la medida del radio del sector AOB si su área es $\left(1+4\operatorname{arcsen}\frac{1}{4}\right)u^2$

A) $\frac{1}{2}$u B) 1u C) 3u

D) $\frac{1}{3}$u E) 2u

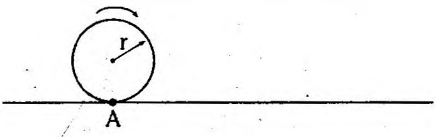
31. Si los radios de las ruedas delantera y posterior de una bicicleta miden 30 cm y 40 cm respectivamente. Calcule la distancia en metros que deberá recorrer la bicicleta para que la rueda delantera dé 10 vueltas más que la posterior.

A) 24 πm B) 24 m C) 12 πm
D) 18 πm E) 15 πm

32. Considerando los datos de la bicicleta del problema anterior, halle el ángulo girado por la rueda posterior, teniendo en cuenta que la rueda delantera de la bicicleta gira 5000°.

A) 3 750° B) 4 000° C) 2 750°
D) 2 500° E) 2 740°

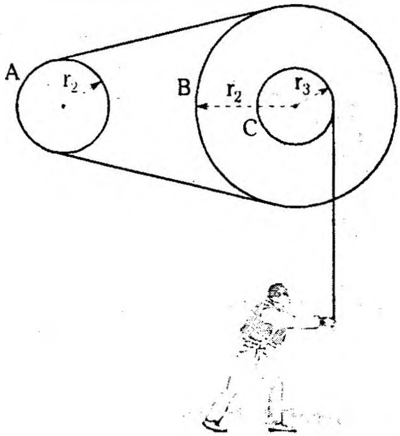
33. Calcule en términos de r la altura a la que se encontrará el punto A de la rueda, cuando ésta gire un ángulo de 1305°, desplazándose sobre una pista horizontal (ver figura)



A) $\left(\frac{2+\sqrt{2}}{2}\right)r$ B) $2\sqrt{2}\,r$ C) 2 r

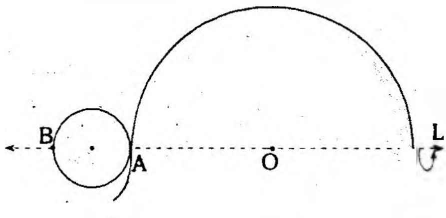
D) $\frac{3\sqrt{2}}{2}r$ E) $\left(\frac{2\sqrt{2}}{22}\right)r$

34. En el sistema de poleas mostrado, calcule el ángulo girado por la polea A (en grados sexagesimales) si la persona desenrrolla un metro de cuerda.
Datos: r_1=30 cm r_2=40 cm r_3=20 cm



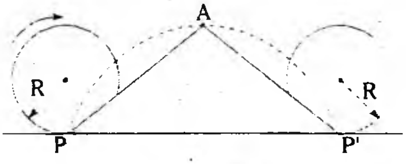
A) $\frac{20°}{9}$ B) $\frac{20°}{3}$ C) $\frac{1200°}{\pi}$
D) 20 rad E) 22 rad

35. En la figura se tiene una rueda de tranvía de un juego de montaña rusa de radio 6 u, que sube sobre un nivel en forma de semicircunferencia de diámetro 2148 u. Si la rueda sube desde A y sobre la semicircunferencia da 60 vueltas, calcule la altura en la que se encontrará la rueda luego de las 60 vueltas que da con respecto a la recta horizontal L.



A) $(540\sqrt{3}+6)$u B) $540\sqrt{2}$u C) $540\sqrt{3}$ u
D) $(540\sqrt{2}+6)$u E) 540 u

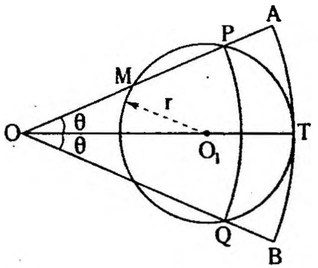
36. En el gráfico se muestra la trayectoria que genera el punto P perteneciente a la rueda al rodar sin resbalar, si P' es la posición final del punto P. Halle el área máxima de la región triangular APP'.



A) πR^2 B) $\pi\sqrt{3}R^2$ C) $2\pi R^2$

D) $\frac{\pi}{2}R^2$ E) $\pi\sqrt{2}R^2$

37. Del gráfico halle el área de la región sombreada, siendo AOB y POQ sectores circulares. Además $OM = O_1Q$ y $\theta=\pi/6$.

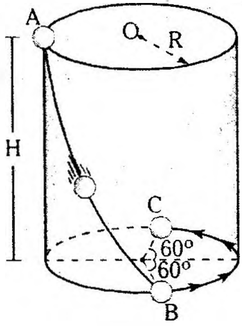


A) πr^2 B) $\frac{\pi r^2}{2}\sqrt{3}$ C) $\frac{\pi r^2}{3}\sqrt{3}$

D) $\frac{\pi r^2}{4}$ E) $2\pi r^2$

38. En el gráfico se muestra el recorrido que describe la esferita al ser soltada en el punto A que pasa por B y se detiene en C. Halle la longitud que recorre la esferita si la trayectoria AB es mínimo.

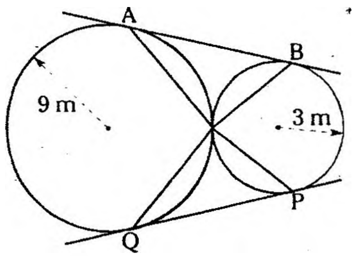
Dato: $H = \frac{2\pi}{3}R\sqrt{3}$



A) $2\pi R$ B) $\frac{2\pi}{3}R$ C) $\frac{\pi}{4}R$

D) $2\pi R\sqrt{3}$ E) $4\pi R$

39. Del gráfico mostrado halle el perímetro de la región sombreada.



A) $(10\pi+6\sqrt{3}+18)$m

B) $(5\pi+3\sqrt{3}+9)$m

C) $(4\pi+3\sqrt{3})$m

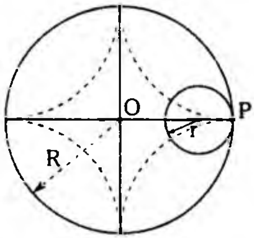
D) $(7\pi+2\sqrt{3})$m

E) $(8\pi+\sqrt{3}+2)$m

40. Dos ciudades, A y B, están a 42° de latitud norte. Las longitudes de A y B son 110° oeste y 160° oeste. ¿Cuál es la distancia entre A y B a lo largo de la circunferencia de 42° de latitud norte? Suponga que el radio de la tierra mide 3960 millas.

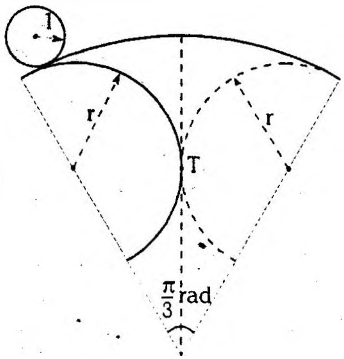
A) 2450 millas B) 2568 millas
C) 2564 millas
D) 2400 millas E) 2600 millas

41. En el gráfico se muestra la trayectoria que describe el punto P perteneciente a la rueda, al completar el circuito en una pista circular de radio R. Halle $\left(\frac{R}{r}\right)$ si r es radio de la rueda.



A) 2 B) 3 C) 5
D) 8 E) 10

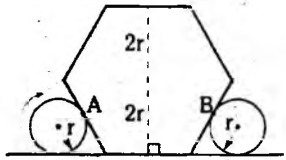
42. Calcule el número de vueltas que da la rueda ideal al recorrer el perímetro de la región sombreada (r = 6), siendo T punto de tangencia. (O: centro)



A) $\frac{1}{3}+\frac{2}{\pi}$ B) $\frac{10}{3}+\frac{3}{\pi}$ C) $\frac{3}{5}+\frac{15}{\pi}$

D) $7+\frac{3}{\pi}$ E) $7+\frac{6}{\pi}$

43. Determine el número de vueltas que da la rueda al ir de un lado a otro rodando alrededor del sistema mostrado sin resbalar.



A) $\frac{7\sqrt{3}+\pi}{3\pi}$ B) $\frac{7\sqrt{3}+2\pi}{3\pi}$

C) $\frac{7\sqrt{3}+\pi}{3}$

D) $\frac{7\sqrt{3}+2\pi}{6}$ E) $\frac{7\sqrt{3}+2\pi}{3}$

44. Un tren se mueve a razón de 6336 pies/hora por una vía curvilínea de 300 pies de radio. ¿Qué ángulo recorre en 1 minuto?

A) 15,30° B) 16,16° C) 18,42°
D) 20,16° E) 21,34°

45. Un punto del borde de una rueda hidráulica de 10 pies de diámetro se mueve con una velocidad lineal de 45 pies/s. Encuentre la velocidad angular de la rueda en rev/s.

A) 9 rev/s
B) 2,3 rev/s
C) 1,43 rev/s
D) 2,1 rev/s
E) 1,42 rev/s

1	B	16	C	31	A
2	C	17	B	32	A
3	C	18	C	33	A
4	C	19	D	34	C
5	E	20	D	35	C
6	C	21	B	36	C
7	E	22	D	37	C
8	A	23	D	38	A
9	D	24	A	39	A
10	B	25	E	40	B
11	A	26	B	41	C
12	B	27	B	42	E
13	C	28	B	43	B
14	D	29	A	44	D
15	C	30	E	45	A

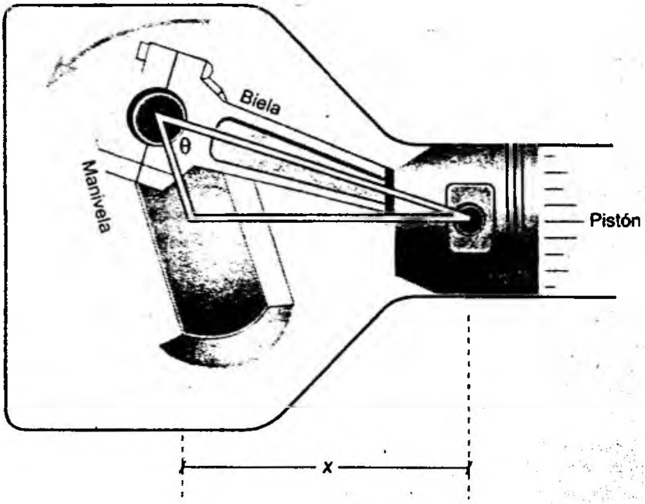
Claves

CAPÍTULO

II

Razones trigonométricas de un ángulo agudo

TRIGONOMETRÍA



Mecánica y razones trigonométricas

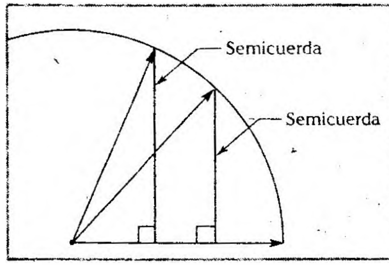
En el motor adjunto, la distancia x (en metros) del centro de la biela a la cabeza del émbolo esta dada por $x = (\cos\theta + \sqrt{16 + 0{,}5\cos 2\theta})$.
Donde θ *es el ángulo entre el brazo del cigueñal y la trayectoria de la cabeza del émbolo. Por ejemplo, si* θ *fuese* $30°$, *entonces x mediría 4,895 m.*

L E C T U R A

SURGIMIENTO DE LOS TÉRMINOS SENO Y TANGENTE

Origen del término seno

Por el año 500, después de n.e., los matemáticos de la India empezaron a considerar el movimiento de una recta que gira en sentido contrario al de las manecillas del reloj alrededor de un punto fijo, y a medir las longitudes de las **semicuerdas** o perpendiculares trazadas desde el extremo de la recta (en diversas posiciones de su movimiento) a la posición inicial de ella. (Véase la primera figura). Esa recta se conoce hoy en día como **radio vector** o "radio movimiento" (del latín: **vector**, "portador", de **vehor**, "muevo"; compárese con "vehículo").



Por esta razón la longitud de la semicuerda se asoció a un ***ángulo***, el ángulo determinado por el giro de la recta.

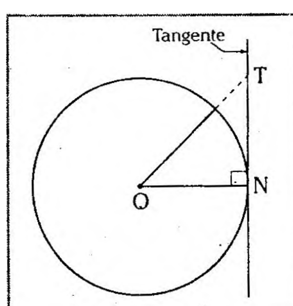
Los indios dieron el nombre de **jva** a dicha semicuerda, nombre que en hindú significa cuerda. La palabra pasó al árabe *como jiba y más tarde se confundió con la palabra árabe jaib* debido probablemente a que las palabras en árabe se escribían frecuentemente sin vocales y por ser iguales las consonantes de ambas **jiba** y **jaib**, es decir **jb**. Sin embargo, la palabra **jaib** no tiene relación alguna con la longitud de la semicuerda ya que significa la abertura en el cuello de una prenda de vestir. Pese a ello, los árabes tomaron la costumbre de designar a la semicuerda por medio de dicha palabra *jaib* sin sentido, que hacía referencia a un "doblez" o "curva". Por ese tiempo, los matemáticos europeos se familiarizaron con la palabra árabe referente a semicuerda y tradujeron jaib por la palabra **sinus** que significa "doblez" o "curva". Dicho error se ha perpetuado en nuestra palabra ***seno***. Así pues, originalmente el *seno de un ángulo* representaba la longitud de la semicuerda de una circunferencia de un radio uno. En nuestros días, como pronto veremos, cuando hablamos del seno de un ángulo, no hablamos de una longitud.

Origen del término tangente

Como se ha visto, en la mente de los antiguos ya existía la idea de la relación entre la altura de un poste y la longitud de su sombra. Para medir el paso del tiempo inventaron el reloj de sol de dos tipos: uno con la varilla vertical de modo que su sombra se proyectara sobre una superficie horizontal; el otro tipo con su varilla inclinada y sujeta a una pared vertical, de modo que su sombra se proyectaba sobre la pared.

No obstante que la relación existente entre la altura de un poste y su sombra se estudió desde los tiempos más remotos, no fue sino hasta el siglo X d.n.e. cuando los árabes empezaron a estudiar longitudes análogas relacionadas con el radio de una circunferencia.

Tuvieron que pasar otros cinco siglos para que la palabra ***tangente*** se le asignara a una recta tal como la indicada por TN en la segunda figura. La tangente a una circunferencia es la recta que la ***toca*** en un solo punto (del latín: **tango**, "toco"). Una mejor definición que abarca otras curvas, además de la circunferencia, es: "Una tangente es la posición límite de una secante". Sin embargo, como aquí sólo estamos considerando tangentes a circunferencias, por el momento será suficiente la primera definición.



Supongamos que TN es parte de la tangente a la circunferencia; ON el radio y OT la ***prolongación*** de una recta en movimiento o radio vector. En el siglo XVI los matemáticos empezaron a designar a TN como **la tangente del ángulo** TON.

Razones trigonométricas de un ángulo agudo

OBJETIVOS

- Analizar y comprender la definición de las razones trigonométricas de ángulos agudos.
- Deducir y familiarizarse con los valores de las razones trigonométricas de ángulos notables.
- Aplicar, a casos de la vida práctica, los conceptos sobre razones trigonométricas.

INTRODUCCIÓN

En la construcción de carreteras, puentes, canales y edificaciones, observamos que los topógrafos manipulan instrumentos como el teodolito, el metro y las reglas graduadas con el objeto de medir ángulos y distancias generalmente en triángulos, ya que la triangulación es muy empleada para trabajos de topografía que son indispensables en la preparación y ejecución de proyectos de ingeniería.

En el presente capítulo analizaremos los triángulos rectángulos. Las propiedades que se exponen tendrán su utilidad en los ejercicios de ángulos verticales y horizontales. Como una de las aplicaciones, podemos indicar el cálculo del diámetro de la Tierra y la distancia del Sol a la Tierra. Además se sabe que, en sus inicios, la Trigonometría se basa en la Astronomía que en la antigüedad desarrolla **Hiparco** y que, posteriormente, **Galileo Galilei** utiliza para analizar el desplazamiento de los planetas.

Al calcular la medida del diámetro de la Tierra desde un satélite se observa que la bisectriz del ángulo así determinada señala al centro de la Tierra. (El punto P se halla en la superficie).

El uso de las razones trigonométricas en el triángulo rectángulo generado nos permite obtener

$$d = \frac{2h}{\csc x - 1}$$

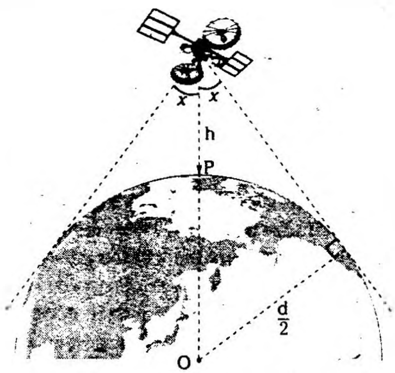


Figura 2.1

Calcular el diámetro de la Tierra ha sido un afán del hombre desde tiempos remotos. Los sofisticados instrumentos actuales permiten que dicho cálculo sea exacto.

Consideremos un triángulo rectángulo ABC, tomando a B como vértice del ángulo recto y dos ángulos agudos en A y C. Designando α al ángulo cuyo vértice es A, así tenemos que **c** es la longitud del lado adyacente a α, **a** es la longitud del lado opuesto a α y la hipotenusa es el lado opuesto al ángulo recto (90°), siendo su longitud **b**.

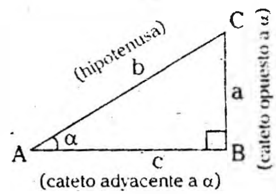


Figura 2.2

Es necesario resaltar algunas propiedades del triángulo rectángulo.

- La hipotenusa es mayor que cualquiera de los catetos, y menor que la suma de ellos.
- La suma de los ángulos agudos es 90°; es decir, dichos ángulos son complementarios(A+C=90°)
- Al mayor ángulo se opone el mayor lado y así recíprocamente.
- El cuadrado de la longitud de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de las longitudes de los catetos.

  De la figura 2.2 establecemos la relación: $a^2+c^2=b^2$......... llamado Teorema de Pitágoras.

La demostración de la escuela de Pitágoras puede muy bien haber sido la que ilustran las siguientes figuras:

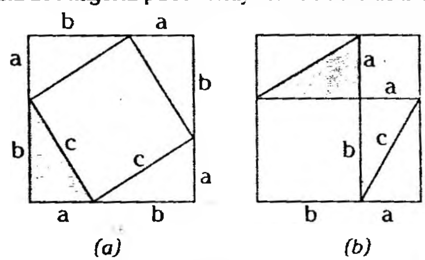


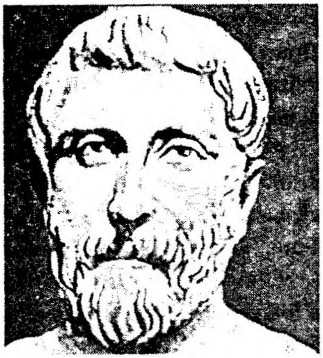
Figura 2.3

Del cuadrado que tiene a+b como lado, retiramos 4 triángulos iguales al dado. Si hacemos esto como en la figura de la izquierda, obtenemos un cuadrado de lado c. Pero si la misma operación se hace como en la figura de la derecha, quedarán dos cuadrados, de áreas a^2 y b^2 respectivamente, luego, el área del cuadrado de lado c es la suma de las áreas de los cuadrados cuyos lados miden a y b.

Pitágoras de Samos

Todo lo expuesto sobre Pitágoras está basado en una tradición persistente, pero no en un documento histórico conocido. Pitágoras fue una especie de profeta y de místico, nacido en Samos; una de las islas de Dodecaneso próximo a Mileto, la patria de Thales.

Alrededor del año 540 a.n.e. Pitágoras fundó una secta semireligiosa, semimatemática en Cretona, ciudad griega en el sur de Italia. Junto con los matemáticos, inculcó a sus discípulos la veneración a los números (se dice que el lema de la escuela pitagórica era : Todo es un número). Entre las enseñanzas de Pitágoras que más se recuerdan están, naturalmente, el teorema que dice que en un triángulo rectángulo el cuadrado del lado más largo (la hipotenusa) es igual a la suma de cuadrados de los otros dos lados más cortos (los catetos). Los babilonios habían descubierto este teorema con mil años de anterioridad, pero se le atribuye a la escuela pitagórica por ser la primera en difundirlo.



Pitágoras
(Grecia 580 a.n.e – 500 a.n.e)

DEFINICIÓN DE RAZÓN TRIGONOMÉTRICA

Es el cociente entre las longitudes de los lados de un triángulo rectángulo respecto de uno de sus ángulos agudos. Es importante observar que las razones trigonométricas son cantidades numéricas o adimensionales (no poseen unidades). Entre las longitudes de los lados de un triángulo rectángulo se establecen 6 razones trigonométricas, a saber:

Sea θ un ángulo agudo de dicho triángulo rectángulo, entonces:

Nombre	Definición
seno de theta	$\text{sen}\theta = \dfrac{\text{longitud del cateto opuesto de } \theta}{\text{longitud de la hipotenusa}}$
coseno de theta	$\cos\theta = \dfrac{\text{longitud del cateto adyacente de } \theta}{\text{longitud de la hipotenusa}}$
tangente de theta	$\tan\theta = \dfrac{\text{longitud del cateto opuesto de } \theta}{\text{longitud del cateto adyacente de } \theta}$
cotangente de theta	$\cot\theta = \dfrac{\text{longitud del cateto adyacente de } \theta}{\text{longitud del cateto opuesto de } \theta}$
secante de theta	$\sec\theta = \dfrac{\text{longitud de la hipotenusa}}{\text{longitud del cateto adyacente de } \theta}$
cosecante de theta	$\csc\theta = \dfrac{\text{longitud de la hipotenusa}}{\text{longitud del cateto opuesto de } \theta}$

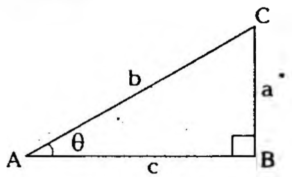


Figura 2.4

Aplicando la definición en la figura 2.4 tenemos

$$\text{sen}\theta = \frac{a}{b} \;;\; \csc\theta = \frac{b}{a}$$

$$\cos\theta = \frac{c}{b} \;;\; \sec\theta = \frac{b}{c}$$

$$\tan\theta = \frac{a}{c} \;;\; \cot\theta = \frac{c}{a}$$

Ejemplo

Emplee el triángulo rectángulo de la figura 2.5 y obtenga las seis razones trigornétricas del ángulo α.

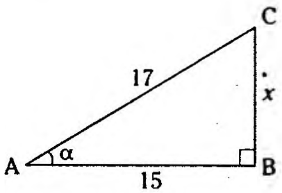


Figura 2.5

Resolución

En la figura dada, vemos que el tercer lado se calcula por el teorema de Pitágoras; así

$x^2+15^2=17^2$

$x^2=17^2-15^2=(17-15)(17+15)$

$x^2=64 \Rightarrow x=8$

Luego tenemos

cateto opuesto de α : 8
cateto adyacente de α : 15
hipotenusa : 17

de donde se obtienen los siguientes valores

$\operatorname{sen}\alpha=\frac{8}{17}$; $\cos\alpha=\frac{15}{17}$; $\tan\alpha=\frac{8}{15}$

$\cot\alpha=\frac{15}{8}$; $\sec\alpha=\frac{17}{15}$; $\csc\alpha=\frac{17}{8}$

Observación

- Como en la figura 2.4 la hipotenusa **b** es mayor que los catetos **a** y **c**, entonces el seno y coseno de un ángulo agudo son menores que 1 pero mayores que cero, así
  $0<\operatorname{sen}\theta<1$ y $0<\cos\theta<1$
- Asimismo secante y cosecante son mayores que 1
  $\sec\theta>1$ y $\csc\theta>1$
- Para las razones trigonométricas tangente y cotangente, un cateto puede ser mayor que el otro cateto o incluso iguales (caso que no se da entre un cateto y una hipotenusa), entonces
  $\tan\theta>0$ y $\cot\theta>0$

Propiedad Fundamental de las Razones Trigonométricas

Como todos los triángulos rectángulos que tienen un ángulo de medida α son semejantes, los valores de las razones trigonométricas dependen únicamente de la amplitud del ángulo agudo, es decir, es independiente de las longitudes de los lados del triángulo.

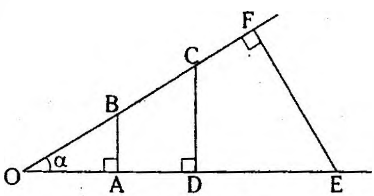


Figura 2.6

En la figura 2.6 se observa que los triángulos rectángulos OAB, ODC y OFE son semejantes, esto es

$\triangle OAB \sim \triangle ODC \sim \triangle OFE$

$\Rightarrow \frac{AB}{OB}=\frac{CD}{OC}=\frac{EF}{OE}=\operatorname{sen}\alpha$

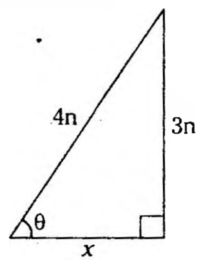
Ejemplo

Uno de los ángulos de un triángulo rectángulo es θ, donde $\operatorname{sen}\theta=3/4$. Calcule las razones trigonométricas restantes de θ

Resolución

Del dato: $\operatorname{sen}\theta=\frac{3}{4}=\frac{\text{Cateto Opuesto}}{\text{Hipotenusa}}$,

considerando al cateto opuesto de θ como 3n se obtiene por hipotenusa 4n siendo n una constante de proporcionalidad, generamos el siguiente triángulo rectángulo (observe la figura 2.7 (a))



(a)

Cálculo de x

$x^2=(4n)^2-(3n)^2$

$x^2=7n^2 \Rightarrow x=\sqrt{7}n$

Así por definición, tenemos

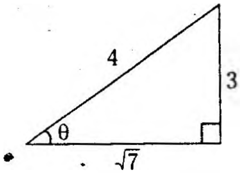
$\cos\theta=\frac{\sqrt{7}\not{n}}{4\not{n}}=\frac{\sqrt{7}}{4}$, $\sec\theta=\frac{4\not{n}}{\sqrt{7}\not{n}}=\frac{4\sqrt{7}}{7}$

$\tan\theta=\frac{3\not{n}}{\sqrt{7}\not{n}}\times\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}}=\frac{3\sqrt{7}}{7}$, $\cot\theta=\frac{\sqrt{7}\not{n}}{3\not{n}}=\frac{\sqrt{7}}{3}$

y $\csc\theta=\frac{4\not{n}}{3\not{n}}=\frac{4}{3}$

Debe entender usted que encontrará diversas formas de resolver un problema y este ejemplo no es la excepción.

La forma práctica para resolver este ejemplo es asumiendo que la constante n sea 1, entonces



(b)

Figura 2.7

$$\cos\theta = \frac{\sqrt{7}}{4} \quad ; \quad \sec\theta = \frac{4\sqrt{7}}{7}$$

$$\tan\theta = \frac{3\sqrt{7}}{7} \quad ; \quad \cot\theta = \frac{\sqrt{7}}{3}$$

$$\text{y} \quad \csc\theta = \frac{4}{3}$$

Se deja para el lector lo siguiente

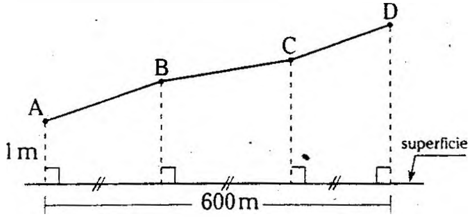
¿Cuál es el valor de $\operatorname{sen}\theta + \cos\theta$ siendo θ un ángulo agudo?, si $\tan\theta = 3$?

La respuesta de este ejercicio es $\dfrac{2\sqrt{10}}{5}$

A continuación, veamos un ejemplo referido a un perfil de instalación para tuberías de desagüe.

Ejemplo

En la figura se muestra el perfil de la instalación de tuberías de desagüe. Si el buzón ubicado en A se encuentra a 1 m de la superficie, calcule la suma de las alturas a la que se encuentran los buzones instalados en B, C y D sabiendo que las pendientes de las tuberías AB, BC y CD son 3%, 2% y 1% respectivamente.



(a)

Resolución

Según el enunciado se pide calcular la siguiente suma de longitudes: $h_B + h_C + h_D$ donde

h_B : Altura a la cual se encuentra ubicado el buzón B respecto de la superficie.

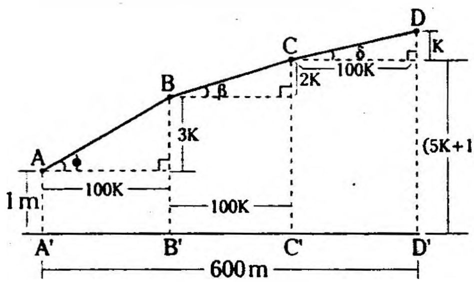
h_C : Altura a la cual se encuentra ubicado el buzón C respecto de la superficie.

h_D : Altura a la cual se encuentra ubicado el buzón D respecto de la superficie.

Observación

La pendiente se define como el valor de $\tan\alpha$, donde α es el ángulo que hace una recta con la recta horizontal.

Es decir, para el primer tramo AB el enunciado indica que la pendiente es 3%, por lo que a partir de ello se puede plantear lo siguiente



(b)

Figura 2.8

$$\tan\phi = 3\% = \frac{3}{100}$$

$$\Rightarrow \tan\phi = \frac{3K}{100K} \ldots(1) \quad \text{K es una constante positiva}$$

Análogamente para los otros casos

Para el tramo BC la pendiente es 2%, por lo que se puede plantear

$$\tan\beta = 2\% = \frac{2}{100} \Rightarrow \tan\beta = \frac{2K}{100K} \ldots(2)$$

Para el tramo CD la pendiente es 1% , entonces

$$\tan\delta = 1\% = \frac{1}{100} \Rightarrow \tan\delta = \frac{1K}{100K} \ldots(3)$$

A partir de los datos mostrados en (1), (2), (3) y del enunciado, podemos entender la figura 2.8; donde se señalan los ángulos de inclinación para cada una de las tuberías AB, BC y CD.

A partir del gráfico podemos plantear

$$A'B' + B'C' + C'D' = 600\ m$$
$$100K + 100K + 100K = 600\ m$$

De donde resolviendo obtenemos $K = 2\ m$

Pero según el gráfico:

$h_B = 3K+1$ y como $K=2\ m \Rightarrow h_B = 7\ m$ ......(4)

$h_C = 5K+1$ y como $K=2\ m \Rightarrow h_C = 11\ m$ .....(5)

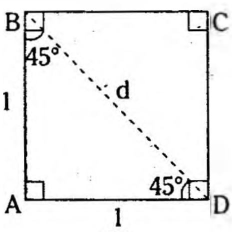
y $h_D = 6K+1$ y como $K=2\ m \Rightarrow h_D = 13\ m$ ..... (6)

Luego de las ecuaciones (4),(5) y (6) obtenemos:

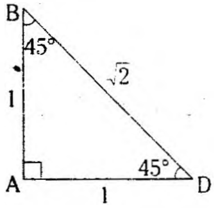
$$h_B + h_C + h_D = 7\ m + 11\ m + 13\ m$$
$$\therefore h_B + h_C + h_D = 31 m$$

Razones Trigonométricas de Ángulos Agudos (notables) en un Triángulo Rectángulo

Los ángulos que miden $30°\left(\frac{\pi\,rad}{6}\right)$; $45°\left(\frac{\pi rad}{4}\right)$ y $60°\left(\frac{\pi\,rad}{3}\right)$ son muy utilizados en Trigonometría. Podemos calcular los valores de las seis razones trigonométricas de estos ángulos notables sin necesidad de utilizar tablas o calculadoras. Para encontrar los valores de las razones trigonométricas del ángulo de 45°, consideremos un cuadrado cuyo lado tiene una longitud 1, como muestra la figura 2.9(a). Si trazamos su diagonal tenemos que los ángulos agudos del triángulo rectángulo sombreado miden 45°. Con el teorema de Pitágoras podemos encontrar la longitud de la hipotenusa.



(a)



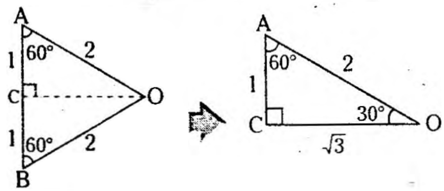
(b)

Figura 2.9

De la figura 2.9 (a): $(d)^2 = (1)^2 + (1)^2$; de tal manera $d = \sqrt{2}$, luego de la figura 2.9 (b)

- $\operatorname{sen} 45° = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$
- $\cot 45° = \frac{1}{1} = 1$
- $\cos 45° = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$
- $\sec 45° = \frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2}$
- $\tan 45° = \frac{1}{1} = 1$
- $\csc 45° = \frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2}$

Para encontrar los valores de las razones trigonométricas de los ángulos de 30° y 60°; consideramos un triángulo equilátero AOB cuyo lado tiene longitud 2 como lo muestra la figura 2.10(a).



(a) *(b)*

Figura 2.10

Sabemos que los tres ángulos del triángulo equilátero miden 60° cada uno. Si hacemos una bisección del ángulo en "O", entonces CO es la bisectriz perpendicular al lado AB.

Aplicando el teorema de Pitágoras en el triángulo rectángulo ACO (ver figura 2.10(b)) obtenemos:

$$(CO)^2 + (1)^2 = (2)^2 \Rightarrow (CO)^2 = (2)^2 - (1)^2$$

De tal manera que CO= $\sqrt{3}$, entonces de la figura 2.10(b) podemos obtener los siguientes valores

$$\operatorname{sen}30^\circ=\frac{1}{2}\quad;\quad \csc30^\circ=\frac{2}{1}=2\quad;\quad \cos30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}\quad;\quad \sec30^\circ=\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$\tan30^\circ=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}\quad;\quad \cot30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{1}=\sqrt{3}\quad;\quad \tan60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{1}=\sqrt{3}\quad;\quad \cot60^\circ=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

La siguiente tabla sintetiza los valores de las razones trigonométricas de los ángulos agudos notables de 30°, 45° y 60°; los cuales son utilizados con mucha frecuencia, siendo importante por ello su estudio.

θ (grados)	θ (radianes)	senθ	cosθ	tanθ	cotθ	secθ	cscθ
30°	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	2
45°	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$
60°	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	2	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$

Observación

A menudo se utilizan triángulos rectángulos cuyos ángulos agudos han sido aproximados. Así por ejemplo, en el triángulo rectángulo de lados 3, 4 y 5 (vea la figura 2.11) los ángulos A y C han sido aproximados a 37° y 53° respectivamente, ya que estos ángulos medidos con transportador no coinciden exactamente con estas medidas.
En la figura 2.11 se tiene que tan A=3/4 y haciendo uso de una calculadora científica tendremos que A=36°52'11,63", logrando así una mayor exactitud.

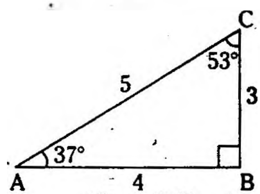


Figura 2.11

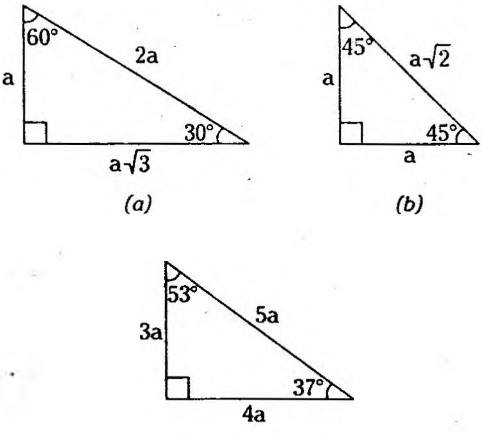
Así, considerando la aproximación en la figura 2.11 calculemos los valores de las razones trigonométricas de los ángulos de 37° y 53°, los cuales obviamente serán aproximados.

$$\operatorname{sen}37^\circ=\frac{3}{5}=\cos53^\circ\quad;\quad \cos37^\circ=\frac{4}{5}=\operatorname{sen}53^\circ$$

$$\tan37^\circ=\frac{3}{4}=\cot53^\circ\quad;\quad \cot37^\circ=\frac{4}{3}=\tan53^\circ$$

$$\sec37^\circ=\frac{5}{4}=\csc53^\circ\quad;\quad \csc37^\circ=\frac{5}{3}=\sec53^\circ$$

Para un mejor uso de los triángulos rectángulos cuyos ángulos son notables, se hace la siguiente presentación:



(a) *(b)*

(c)

Figura 2.12

Ejemplo 1

Calcule $\tan 15°$ y $\cot 15°$

Resolución

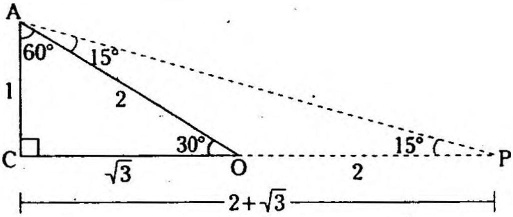


Figura 2.13

Graficamos el triángulo rectángulo notable de 30° y 60°. Prolongando el cateto CO hasta un punto P, tal que la longitud OP sea igual a la hipotenusa AO. Luego se tiene que $m\sphericalangle APC = 15°$

Así en $\triangle ACP$ planteamos:

- $\tan 15° = \dfrac{AC}{CP} = \dfrac{1}{2+\sqrt{3}}$

Multiplicando y dividiendo por $2-\sqrt{3}$ tenemos

$$\tan 15° = \frac{1}{2+\sqrt{3}} \times \frac{2-\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}$$

$$\therefore \ \tan 15° = 2-\sqrt{3}$$

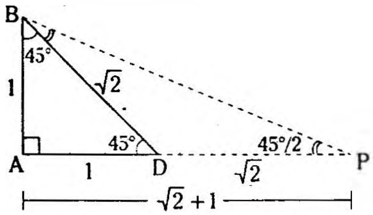
- $\cot 15° = \dfrac{CP}{AC} = \dfrac{2+\sqrt{3}}{1} \quad \therefore \ \cot 15° = 2+\sqrt{3}$

Ejemplo 2

Calcule $\tan(45°/2)$ y $\cot(45°/2)$

Resolución

Graficamos el triángulo rectángulo notable de 45° y aplicando métodos análogos al ejemplo anterior, tendremos:



(a)

Así en el triángulo rectángulo BAP, planteamos

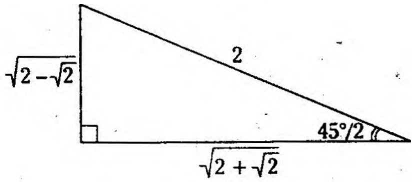
- $\tan\left(\dfrac{45°}{2}\right) = \dfrac{AB}{AP} = \dfrac{1}{\sqrt{2}+1} = \dfrac{1}{\sqrt{2}+1} \times \dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}-1}$

$$\therefore \ \tan\left(\frac{45°}{2}\right) = \sqrt{2}-1$$

- $\cot\left(\dfrac{45°}{2}\right) = \dfrac{AP}{AB} = \dfrac{\sqrt{2}+1}{1} \quad \therefore \ \cot\left(\dfrac{45°}{2}\right) = \sqrt{2}+1$

Observación

Se puede utilizar también



(b)

Figura 2.14

Ejemplo 3
Calcule aproximadamente tan(37°/2) y tan(53°/2)

Resolución
Utilizamos el triángulo rectángulo ABC visto en la figura 2.15 donde se aplicaran los métodos utilizados en los ejemplos anteriores.
De la figura tendremos:

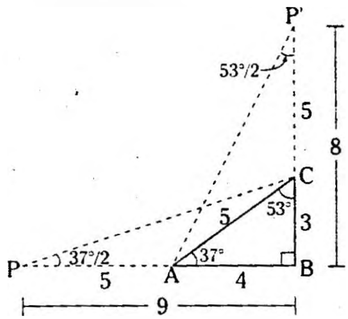


Figura 2.15

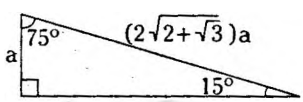
I. En el ⊾ PBC

$$\tan\left(\frac{37^\circ}{2}\right) = \frac{BC}{PB} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

II. En el ⊾ ABP'

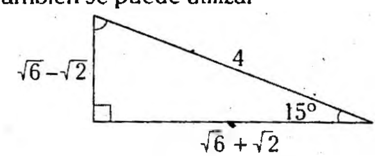
$$\tan\left(\frac{53^\circ}{2}\right) = \frac{AB}{P'B} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

Finalmente se muestra a estos triángulos de uso frecuente en los problemas y aplicaciones:

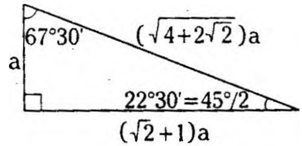


(a)

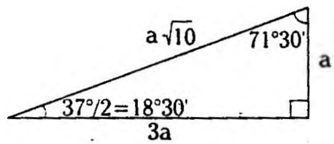
También se puede utilizar



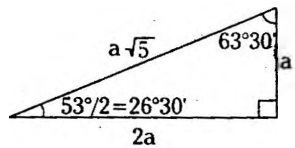
(b)



(c)



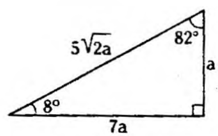
(d)



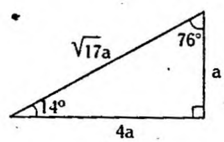
(e)

Es común que ciertos ángulos aproximados sean utilizados como notables, así tenemos

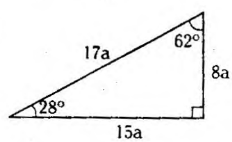
$\frac{53^\circ}{2}$, $\frac{37^\circ}{2}$, 14°, 8°, 28°, 62°.



(f)



(g)



(h)

Figura 2.16

Nota

Es posible aproximar el ángulo agudo α en el siguiente triángulo rectángulo.

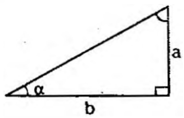


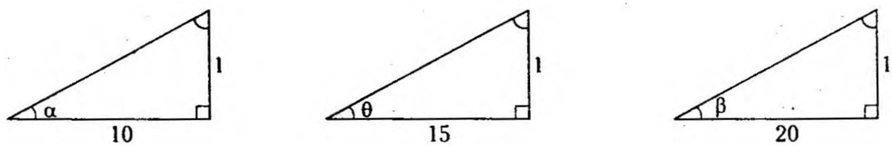
Figura 2.17

Si $\frac{b}{a} \geq 10$

se calculará de manera aproximada mediante

$$\alpha = \left(\frac{a}{b}\right)57{,}3^\circ$$

Ejemplos



(a) (b) (c)

Figura 2.18

como $\frac{10}{1} \geq 10$

$\Rightarrow \alpha = \left(\frac{1}{10}\right)(57{,}3^\circ)$

$\therefore \alpha = 5{,}73^\circ$

como $\frac{15}{1} \geq 10$

$\Rightarrow \theta = \left(\frac{1}{15}\right)(57{,}3^\circ)$

$\therefore \theta = 3{,}82^\circ$

como $\frac{20}{1} \geq 10$

$\Rightarrow \beta = \left(\frac{1}{20}\right)(57{,}3^\circ)$

$\therefore \beta = 2{,}865^\circ$

Nota

Los catetos y la hipotenusa

¿Sabía usted que Pitágoras y los demás geómetras griegos se ocuparon tanto del triángulo, porque lo usaban mucho en la construcción? Así fue ellos los que inventaron las cubiertas de dos aguas. Eso les permitió ensanchar mucho las naves de los templos y los grandes salones.

Descubrieron la manera de repartir el peso de la techumbre entre tres vigas, de tal manera que el trabajo que realizaba cada una al trabajar conjuntamente, era muy inferior que les correspondería si se distribuyese entre las tres colocadas como vigas planas. Y según el trabajo que hacen, así las nombraron: a las dos vigas que sostienen la techumbre las llamaron catetos, porque tienden a ir hacia abajo (kazíemi); y a la viga de abajo la llamaron hipotenusa porque es la que tira (tenusa) por abajo (hipo) de las otras dos para que no se abran.

Propiedades de las Razones Trigonométricas

Razones Trigonométricas Recíprocas

De la figura 2.19 establecimos que

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{a}{b} \qquad \text{y} \qquad \csc\theta = \frac{b}{a}$$

¿Qué relación hay entre $\operatorname{sen}\theta$ y $\csc\theta$?

Véamos $\csc\theta = \dfrac{b/b}{a/b} = \dfrac{1}{\operatorname{sen}\theta} \Rightarrow \boxed{\csc\theta = \dfrac{1}{\operatorname{sen}\theta}}$

Asimismo se cumple que

$$\boxed{\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}} \qquad \boxed{\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}}$$

Ejemplos

Si $\operatorname{sen}\alpha = \dfrac{1}{8} \Rightarrow \csc\alpha = 8$

Si $\cos\theta = 4/11 \Rightarrow \sec\theta = 11/4$

Si $\tan\varphi = 100 \Rightarrow \cot\varphi = \dfrac{1}{100}$

Conclusión

Siendo θ un ángulo agudo, se cumple

$$\boxed{\begin{array}{l} \operatorname{sen}\theta \,.\, \csc\theta = 1 \\ \cos\theta \,.\, \sec\theta = 1 \\ \tan\theta \,.\, \cot\theta = 1 \end{array}}$$

Razones Trigonométricas de Ángulos Complementarios

En el triángulo rectángulo de la figura 2.19, α y β son dos ángulos agudos. Como la suma de los ángulos interiores de un triángulo es 180°, entonces $\alpha + \beta = 90°$
(o en radianes $\alpha + \beta = \pi/2$).

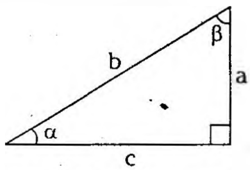


Figura 2.19

Los dos ángulos agudos de un triángulo rectángulo son ángulos complementarios. Así, aplicando las definiciones de las razones trigonométricas se observa lo siguiente:

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{a}{b} = \cos\beta \quad ; \quad \cot\alpha = \frac{c}{a} = \tan\beta$$

$$\cos\alpha = \frac{c}{b} = \operatorname{sen}\beta \quad ; \quad \sec\alpha = \frac{b}{c} = \csc\beta$$

$$\tan\alpha = \frac{a}{c} = \cot\beta \quad ; \quad \csc\alpha = \frac{b}{a} = \sec\beta$$

Entonces, el seno de un ángulo agudo es igual al coseno del ángulo complementario; la tangente de un ángulo agudo es igual a la cotangente del ángulo complementario; la secante de un ángulo agudo es igual a la cosecante del ángulo complementario.

Así podemos plantear

$$\boxed{\text{razón trigonométrica } (\alpha) = \text{co} - \text{razón trigonométrica } (90° - \alpha)}$$

Ejemplos

- $\operatorname{sen}20° = \cos(90° - 20°) = \cos70°$
- $\cot10° = \tan(90° - 10°) = \tan80°$
- $\sec\left(\dfrac{\pi}{7}\right) = \csc\left(\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\pi}{7}\right) = \csc\left(\dfrac{5\pi}{14}\right)$
- $\csc\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = \sec\left(\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\pi}{3}\right) = \sec\dfrac{\pi}{6}$
- $\cos50° = \operatorname{sen}(90° - 50°) = \operatorname{sen}40°$
- $\tan30° = \cot(90° - 30°) = \cot60°$
- $\sec37° = \csc(90° - 37°) = \csc53°$
- $\csc25° = \sec(90° - 25°) = \sec65°$
- $\cos\left(\dfrac{\pi}{8}\right) = \operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\pi}{8}\right) = \operatorname{sen}\dfrac{3\pi}{8}$
- $\tan\dfrac{\pi}{10} = \cot\left(\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\pi}{10}\right) = \cot\dfrac{2\pi}{5}$

A continuación se muestran ejercicios donde se emplean las propiedades de razones trigonométricas recíprocas y de razones trigonométricas de ángulos complementarios.

1. Calcule el valor de P donde

$$P=\text{sen}40^\circ \sec 50^\circ$$

Resolución

Cambiando por la co–razón trigonométrica de

$$\sec 50^\circ=\csc(90^\circ-50^\circ)$$

reduciendo

$$P=\text{sen}40^\circ \csc 40^\circ$$

(observamos que las R.T. seno y cosecante son recíprocas.)

y los ángulos son iguales.

Entonces, dado lo anterior concluimos que el producto es 1

$\therefore P=1$

2. Sea $(\theta+32^\circ)$ un ángulo agudo tal que verifique

$$\tan(\theta+32^\circ)=\cot\theta$$

¿Cuál es el valor de θ?

Resolución

son co -Razones Trigonométricas

$$\tan(\theta+32^\circ)=\cot\theta$$

Entonces los ángulos son complementarios, por lo que planteamos la siguiente ecuación:

$(\theta+32^\circ)+\theta=90^\circ$

$\Rightarrow 2\theta=90^\circ-32^\circ$

$\Rightarrow 2\theta=58^\circ$

$\therefore \theta=29^\circ$

3. Siendo $(2\theta-10^\circ)$ un ángulo agudo tal que $\text{sen}(20^\circ-3\theta)\csc(2\theta-10^\circ)=1$

Calcule θ.

Resolución

Son razones trigonométricas recíprocas

$$\text{sen}(20^\circ-3\theta)\csc(2\theta-10^\circ)=1$$

Entonces los ángulos son iguales, por lo que planteamos la siguiente ecuación

$20^\circ-3\theta=2\theta-10^\circ$

$\Rightarrow 20^\circ+10^\circ=3\theta+2\theta$

$\Rightarrow 30^\circ=5\theta$

$\therefore \theta=6^\circ$

4. Siendo $(2\alpha+10^\circ)$ un ángulo agudo tal que verifique $\text{sen}(2\alpha+10^\circ)=\cos(\alpha+20^\circ)$, halle el valor de α.

Resolución

son co-razones trigonométricas

$$\text{sen}(2\alpha+10^\circ)=\cos(\alpha+20^\circ)$$

Entonces los ángulos son complementarios por lo que planteamos la siguiente ecuación.

$(2\alpha+10^\circ)+(\alpha+20^\circ)=90^\circ$

$\Rightarrow 3\alpha+30^\circ=90^\circ$

$3\alpha=90^\circ-30^\circ=60^\circ$

$\therefore \alpha=20^\circ$

5. Siendo 2α un ángulo agudo, halle el valor de α, si se cumple

$\tan 2\alpha.\tan 40^\circ=1$

Resolución

no son recíprocos

$$\tan 2\alpha\ .\ \tan 40^\circ=1$$

Entonces se sugiere despejar una de las R.T. por ejemplo tan40°, luego

$$\tan 2\alpha=\underbrace{\frac{1}{\tan 40^\circ}}_{\text{recíproco de la } \tan 40^\circ(\cot 40^\circ)}$$

son co-razones trigonométricas

$\Rightarrow \tan 2\alpha=\cot 40^\circ$

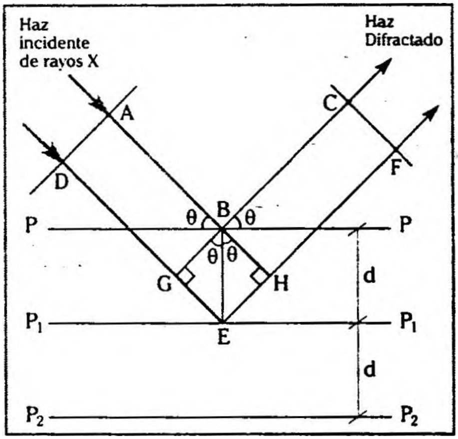
$\therefore \alpha=25^\circ$

L
E
C
T
U
R
A

LA TRIGONOMETRÍA Y EL ESTUDIO DE LOS MINERALES

Una aplicación muy importante para un mejor estudio de los minerales es el de los Rayos X y sus efectos de difracción. Esta técnica permite establecer una estructura ordenada tridimensionalmente (sistema de cristalización), estructura cuyo ordenamiento puede ser explicado mediante la utilización de razones trigonométricas.

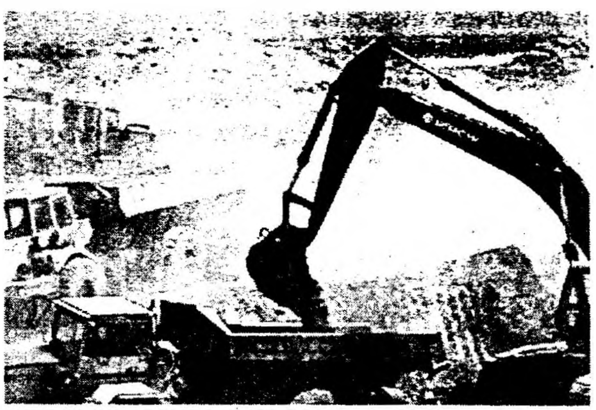
Así del gráfico se cumple:



$n\lambda = GE + EH$, por resolución de triángulos rectángulos:

$GE = d\text{sen}\,\theta$ y $EH = d\text{sen}\,\theta \Rightarrow n\lambda = d\text{sen}\,\theta + d\text{sen}\,\theta \quad \therefore \; n\lambda = 2d\text{sen}\,\theta$

Donde: n es el número de planos atómicos donde incide el rayo, λ es la longitud de onda del rayo y θ es el ángulo con la que inciden los Rayos X.



En el gráfico se muestra una cantera de donde se está extrayendo el mineral.

Como usted puede verificar a partir de la lectura anterior, hay ciertas longitudes que pueden ser expresadas en términos de otras longitudes y de razones trigonométricas de ángulos agudos; esto recibe el nombre de resolución de triángulos. A continuación veremos cómo se hallan ciertas longitudes en triángulos donde uno de sus ángulos interiores es un ángulo recto.

RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS

Resolver un triángulo cualquiera significa determinar la medida de los tres ángulos interiores y la longitud de sus tres lados. En el caso de un triángulo rectángulo, se resuelve obteniendo los dos ángulos agudos (ya que uno mide 90°) y las longitudes de los tres lados del triángulo rectángulo. Esto se puede hacer si se da como dato la longitud de un lado y la medida de un ángulo agudo o si se conocen las longitudes de dos de sus lados. Una razón trigonométrica de un ángulo agudo comprende tres cantidades: las longitudes de dos lados y la medida de un ángulo, en consecuencia conociendo dos elementos de los tres podemos determinar el tercero.

Dadas las Longitudes de Dos Lados

Por el teorema de Pitágoras, si se conocen dos lados se puede calcular el tercero. Luego se puede hallar cualquier razón trigonométrica de cualquiera de los ángulos desconocidos y consultando una tabla de valores o usando una calculadora, se hallara el valor de dicho ángulo. Luego, una vez conocido éste ángulo agudo se puede encontrar el otro, porque la suma de ellos es 90° ó $\frac{\pi}{2}$ rad

Ejemplo 1

Resuelva el triángulo mostrado

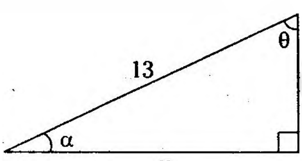


Figura 2.20

Resolución

Elementos desconocidos: x, α y θ

Por el teorema de pitágoras

$$13^2 = 5^2 + x^2 \Rightarrow x = 12$$

Luego $\operatorname{sen}\alpha = \frac{5}{13}$

usando calculadora tendremos: $\alpha = 22{,}6°$

como $\alpha + \theta = 90° \Rightarrow \theta = 90° - \alpha = 67{,}4°$

De esta forma los valores obtenidos son

$x = 12$; $\alpha = 22{,}6°$ y $\theta = 67{,}4°$

Ejemplo 2

Resuelva el siguiente triángulo

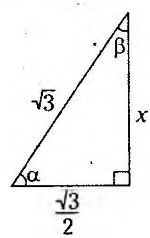


Figura 2.21

Resolución

Elementos desconocidos: x, α y β

Por el teorema de Pitágoras

$$(\sqrt{3})^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + x^2 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$$

Luego

$$\operatorname{sen}\beta = \frac{\sqrt{3}/2}{\sqrt{3}} \Rightarrow \operatorname{sen}\beta = \frac{1}{2}$$

por razones trigonométricas de ángulos notables tenemos $\beta = 30°$ como:

$\alpha = 90° - \beta = 60° \Rightarrow \alpha = 60°$

De igual forma que en el ejemplo anterior, los valores que se pedían son

$$x=\frac{3}{2};\ \beta=30^\circ \quad y \quad \alpha=60^\circ$$

Dados un Ángulo Agudo y la Longitud de un Lado

En los casos siguientes se resolverán los triángulos rectángulos. Para esto se da como conocido un ángulo agudo (θ) y la longitud de un lado (m).

1. Si m es la longitud de la hipotenusa
Lado dato: m
Lados incógnitas: BC y AB

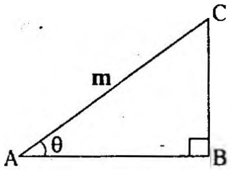


Figura 2.22

La idea es generar una razón trigonométrica para θ con el lado dato y el lado incógnita, pero sugerimos que dicha R.T. lo obtenga relacionando el lado incógnita con el lado dato, esto es:
Cálculo de BC (véase figura 2.22)

$$\frac{BC}{m}=\frac{\text{Cateto opuesto a }\theta}{\text{Hipotenusa}}=\operatorname{sen}\theta$$

luego

$$\frac{BC}{m}=\operatorname{sen}\theta \Rightarrow BC=m\operatorname{sen}\theta$$

De igual forma

$$\frac{AB}{m}=\frac{\text{Cateto adyacente a }\theta}{\text{Hipotenusa}}=\cos\theta \Rightarrow AB=m\cos\theta$$

cálculo de la m∢C : $C=90^\circ-A \Rightarrow C=90^\circ-\theta$
Los demás casos se resolverán de forma análoga.

2. Si m es la longitud del cateto adyacente a θ

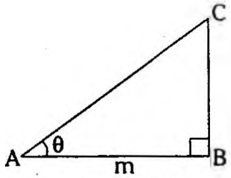


Figura 2.23

- $\frac{BC}{m}=\tan\theta \Rightarrow BC=m\tan\theta$
- $\frac{AC}{m}=\sec\theta \Rightarrow AC = m\sec\theta$
- $C=90^\circ-A \Rightarrow C=90^\circ-\theta$

3. Si m es la longitud del cateto opuesto a θ

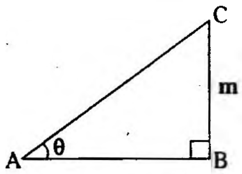
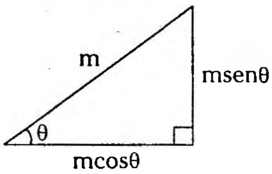


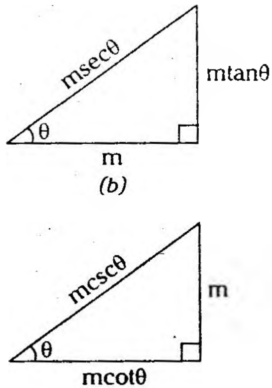
Figura 2.24

- $\frac{AB}{m}=\cot\theta \Rightarrow AB = m\cot\theta$
- $\frac{AC}{m}=\csc\theta \Rightarrow AC = m\csc\theta$
- $C=90^\circ-A \Rightarrow C=90^\circ-\theta$

Para la resolución de problemas, se recomienda al lector recordar los triángulos de la figura 2.25 (a), (b) y (c)



(a)

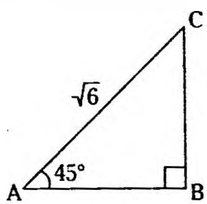


(b)

(c)

Figura 2.25

Ejemplo 3
Resuelva el triángulo ABC que se muestra

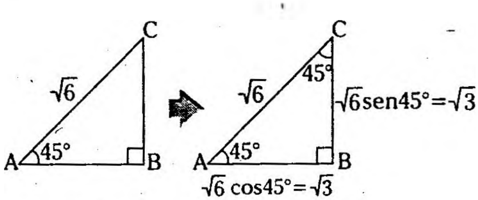


(a)

Resolución
De la figura 2.26(a)

- $\dfrac{BC}{\sqrt{6}}=\text{sen}45° \Rightarrow BC=\sqrt{6}\text{sen}45°=\sqrt{3}$
- $\dfrac{AB}{\sqrt{6}}=\cos45° \Rightarrow AB=\sqrt{6}\cos45°=\sqrt{3}$
- $C=90°-A \Rightarrow C=45°$

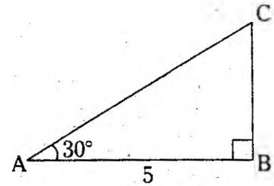
En forma directa



(b) (c)

Figura 2.26

Ejemplo 4
Resuelva el triángulo ABC que aparece en la figura mostrada

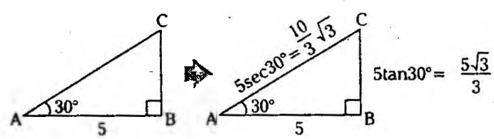


(a)

Resolución

- $\dfrac{BC}{5}=\tan30° \Rightarrow BC=5\tan30°=5\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)=\dfrac{5\sqrt{3}}{3}$
- $\dfrac{AC}{5}=\sec30° \Rightarrow AC=5\sec30°=5\left(\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\right)=\dfrac{10\sqrt{3}}{3}$
- $C=90°-A \Rightarrow C=60°$

En forma directa



(b) (c)

Figura 2.27

Ejemplo 5
De la figura 2.28, se tiene una pared de 7 m de alto. Calcule la longitud de la cuerda (ℓ) y la distancia de P hacia la pared(d).

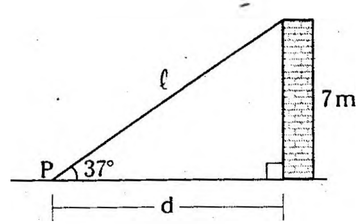


Figura 2.28

Resolución

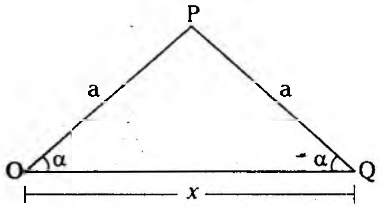
Aplicando el caso de resolución de un triángulo rectángulo mostrado en la figura 2.28, tenemos

- $\ell=(7\text{m})\csc 37°=(7\text{m})\frac{5}{3}=\frac{35}{3}\text{m}$

- $d=(7\text{m})\cot 37°=(7\text{m})\frac{4}{3}=\frac{28}{3}\text{m}$

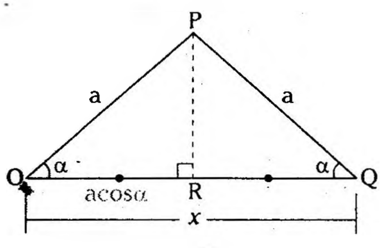
Ejemplo 6

En el triángulo OPQ mostrado, demuestre que la longitud de la base (x) es $2a\cos\alpha$



(a)

Resolución



(b)

Figura 2.29

Del punto P trazamos $\overline{PR} \perp \overline{OQ}$

En el triángulo ORP

$$OR = a\cos\alpha$$

Como R es punto medio de $\overline{OQ}$, tendremos

$$x=2OR=2a\cos\alpha$$

Ejemplo 7

De la figura 2.30 (a) demuestre que la longitud de la cuerda AB es $2r\,\text{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)$

(O: centro de la circunferencia de radio r)

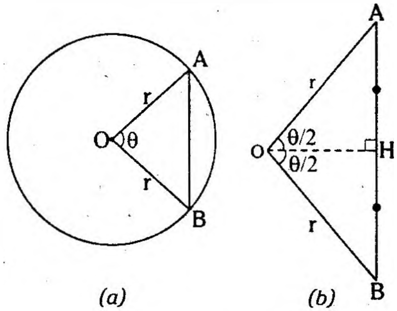


Figura 2.30

Resolución

De la figura 2.30 (b) trazamos la perpendicular OH que a su vez es bisectriz del $\measuredangle AOB$, entonces $AH=r\,\text{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)$

como H es un punto medio de AB, tenemos

$$AB=2AH=2r\text{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

Teorema

Área de una región triangular

El área de cualquier región triangular es igual al semiproducto de las longitudes de dos de sus lados, multiplicado por el seno del ángulo que forman dichos lados.

Demostración

En el ΔABC de lados a, b y c (véase la figura 2.31), se traza $\overline{BH} \perp \overline{AC}$, de donde BH=csenA

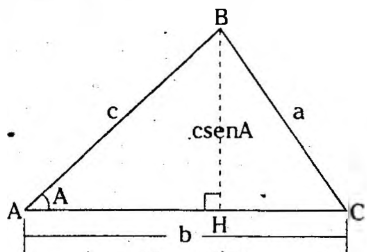


Figura 2.31

Se sabe

$$S_{\triangle ABC} = \frac{(\text{base})(\text{altura})}{2}$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{(b)(c\,\text{sen}\,A)}{2}$$

$$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{bc}{2}\text{sen}\,A$$

Análogamente se demuestra que

$$S_{\triangle ABC} = \frac{ac}{2}\text{sen}\,B \quad ; \quad S_{\triangle ABC} = \frac{ab}{2}\text{sen}\,C$$

donde ($S_{\triangle ABC}$ =área de la región triangular ABC)

Ejemplo 8

Calcule el área de la región limitada por un terreno de forma triangular, donde dos de sus dimensiones miden 8 m y 11m y el ángulo que forman dichas dimensiones es 45°.

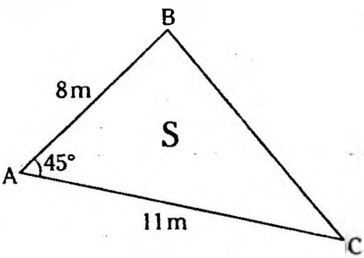


Figura 2.32

Resolución

Sea S el área de la región triangular (véase la figura 2.32)

Entonces

$$S = \frac{(8m)(11m)}{2}\text{sen}\,45°$$

$$S = \frac{88}{2}m^2 \times \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\therefore S = 22\sqrt{2}\,m^2$$

Ejemplo 9

La longitud de la hipotenusa de un triángulo rectángulo es m y uno de sus ángulos agudos mide θ. Halle el área de dicha región en términos de m y θ.

Resolución

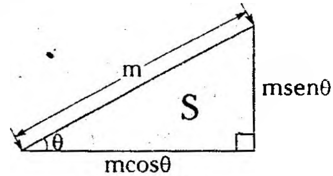


Figura 2.33

De la figura: $S = \dfrac{(m\cos\theta)(m\,\text{sen}\,\theta)}{2}$

$$\therefore S = \frac{m^2}{2}\text{sen}\,\theta\cos\theta$$

Ejemplo 10

En un triángulo ABC, se tiene que B=60°, se traza la bisectriz BD($D \in \overline{AC}$). Calcule BD, si AB=4 u; BC=2 u

Resolución

Del enunciado podemos obtener el siguiente gráfico.

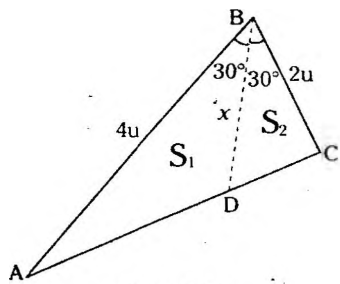


Figura 2.34

Sea la longitud de BD=x, $S_1 = S_{\triangle ABD}$ (área de la región ABD) y $S_2 = S_{\triangle DBC}$ (área de la región triangular DBC)

como $S_{\triangle ABC} = S_1 + S_2$

$$\Rightarrow \frac{(4)(2)}{2}\text{sen}\,60° = \frac{4x}{2}\text{sen}\,30° + \frac{(x)(2)}{2}\text{sen}\,30°$$

$$\Rightarrow 4\frac{\sqrt{3}}{2} = x\,\text{sen}\,30°(2+1)$$

$$\therefore x = \frac{4\sqrt{3}}{3}u$$

Problemas Resueltos

Problema 1

En un triángulo rectángulo ABC (recto en "A") se cumple $a^2\text{senB}\,\text{senC}\,\text{tanB}=16$.
Calcule $M=a\csc B-c\tan C$

Resolución

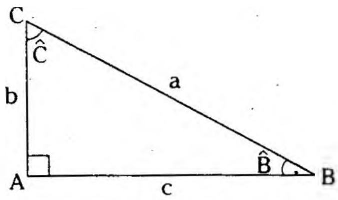


Figura 2.35

De la figura, reemplazando en la condición

$$a^2\text{senB senC tanB}=16$$

$$a^2\cdot\left(\frac{b}{a}\right)\left(\frac{c}{a}\right)\left(\frac{b}{c}\right)=16 \qquad b^2=16\Rightarrow b=4$$

En M

$$M=a\cdot\left(\frac{a}{b}\right)-c\left(\frac{c}{b}\right)=\frac{a^2}{b}-\frac{c^2}{b} \quad\Rightarrow\quad M=\frac{a^2-c^2}{b}$$

Además por el teorema de Pitágoras

$$a^2=b^2+c^2\Rightarrow a^2-c^2=b^2$$

luego $M=\dfrac{b^2}{b}=b \qquad \therefore M=4$

Problema 2

Calcule el perímetro de un triángulo rectángulo ABC($B=90°$), si el cosA es igual a 0,2. Además el cateto BC es igual a $6\sqrt{6}$ u.

Resolución

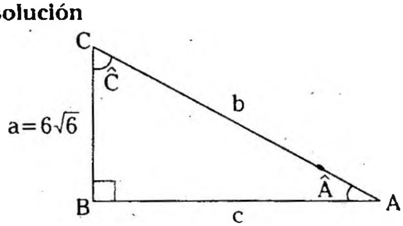


Figura 2.36

Por condición $\cos A=\dfrac{1}{5}$
Además $\cos A=\dfrac{c}{b}$ $\Rightarrow \dfrac{c}{b}=\dfrac{1}{5}$

Tomando $c=K$; obtenemos $b=5K$ ... (1)

Por el teorema de Pitágoras

$b^2=a^2+c^2\Rightarrow(5k)^2=(6\sqrt{6})^2+(k)^2$

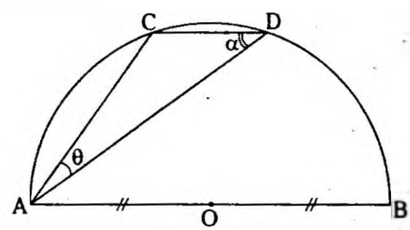
$24k^2=216\Rightarrow K=3$ ... (2)

Reemplazando (2) en (1) se obtiene $b=15$; $c=3$

$\therefore \text{Perímetro}_{\triangle ABC}=a+b+c=6(3+\sqrt{6})$ u

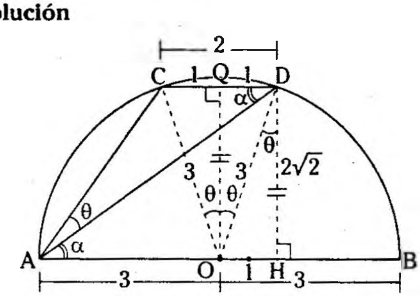
Problema 3

Si $\overline{AB}\,//\,\overline{CD}$, y además $CD=2u$ y $AB=6u$.
Calcule $M=\csc\theta+\sqrt{2}\cot\alpha$, siendo O centro de la semicircunferencia.



(a)

Resolución



(b)

Figura 2.37

De la figura, el triángulo COD es isósceles, donde la $m\sphericalangle COD=2\theta$ (igual a la medida del arco CD).

Trazando la altura OQ y aplicando el Teorema de Pitágoras en ⊿OQD se tiene $OQ=2\sqrt{2}$
Luego

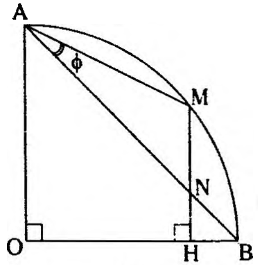
- ⊿DHO: $\csc\theta=\dfrac{3}{1}=3$
- ⊿DHA: $\cot\alpha=\dfrac{4}{2\sqrt{2}}=\sqrt{2}$

Reemplazando en M: $M=(3)+\sqrt{2}\,(\sqrt{2})$

$\therefore M=5$

Problema 4

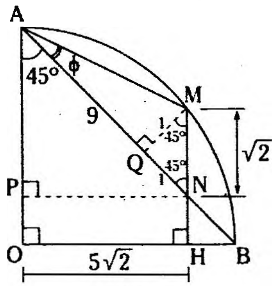
De la figura, si AOB es un sector circular, además $MN=\sqrt{2}$ u; $OH=5\sqrt{2}$u.
Calcule $\cot\phi$



(a)

Resolución

Se trazan $\overline{MQ}\perp\overline{AB}$ y la $\overline{NP}\perp\overline{OA}$, luego los triángulos MQN y APN son notables de 45°.



(b)

Figura 2.38

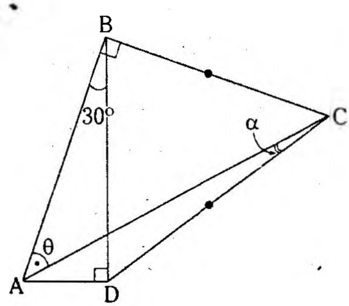
En el ⊿ APN se tiene que $NP=5\sqrt{2}$, de donde se deduce que: $AN=5\sqrt{2}\times\sqrt{2}=10$, además $AQ=AN-QN\Rightarrow AQ=9$

En el triángulo rectángulo sombreado

$\cot\phi=\dfrac{9}{1}\qquad\therefore\ \cot\phi=9$

Problema 5

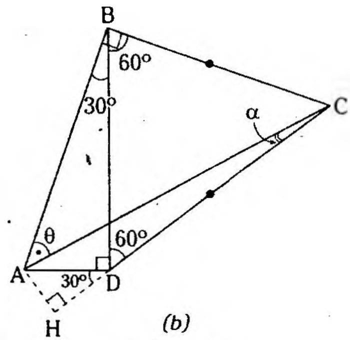
De la figura, calcule $L=\cot\theta\cot\alpha$



(a)

Resolución

Prolongamos CD y desde A trazamos la perpendicular AH.



(b)

Figura 2.39

$⊿_{AHD}$ Notable: sea $AD=2n\Rightarrow AH=n;\ HD=n\sqrt{3}$

$⊿_{ADB}$ Notable: $AB=4n;\ BD=2n\sqrt{3}$

$\triangle BCD$ (Equilátero): $BC=CD=BD=2n\sqrt{3}$

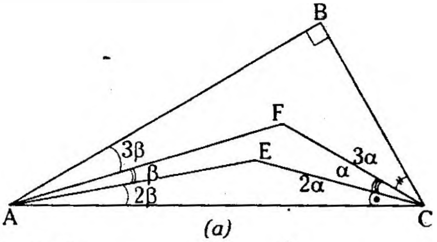
⊿ABC: $\cot\theta=\dfrac{4n}{2n\sqrt{3}}\Rightarrow\cot\theta=\dfrac{2}{\sqrt{3}}$

⊿AHC: $\cot\alpha=\dfrac{HD+CD}{AH}\Rightarrow\cot\alpha=\dfrac{3n\sqrt{3}}{n}=3\sqrt{3}$

Luego $L=\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)(3\sqrt{3})\qquad\therefore\ L=6$

Problema 6

De la figura $\frac{CF}{\sqrt{2}} = \frac{AE}{2}$; AF=4 y CE= $4\sqrt{3}$, calcule M=cot2 α tan3 β



(a)

Resolución

Cálculo de cot2 α

De la figura inicial se observa que

$6\alpha + 6\beta = 90° \Rightarrow \alpha + \beta = 15°$

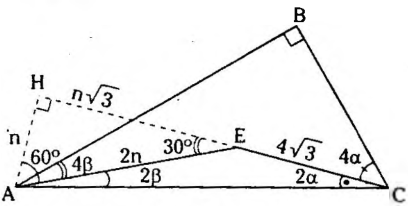
Por condición $\frac{CF}{\sqrt{2}} = \frac{AE}{2} = n \Rightarrow CF = \sqrt{2}n;\ AE = 2n$

En la figura 2.40(b) prolongamos CE y trazamos desde A la perpendicular AH.

Luego m∢AEH=2α+2β=30°.

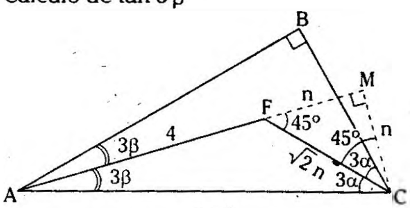
Además ◺AHE notable de 30° y 60°.

En el ◺AHC $\Rightarrow \cot 2\alpha = \frac{n\sqrt{3} + 4\sqrt{3}}{n}$



(b)

- Cálculo de tan 3 β



(c)

Figura 2.40

En la figura 2.40(c) prolongamos AF y trazamos desde C la perpendicular CM.

Luego m∢CFM=3α+3β=45°.

Además ◺CMF notable de 45°. En el ◺CMA

$\Rightarrow \tan 3\beta = \frac{n}{4+n}$

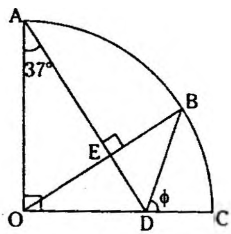
Reemplazando en M

$$M = \left(\frac{n\sqrt{3} + 4\sqrt{3}}{n}\right)\left(\frac{n}{4+n}\right)$$

$\therefore M = \sqrt{3}$

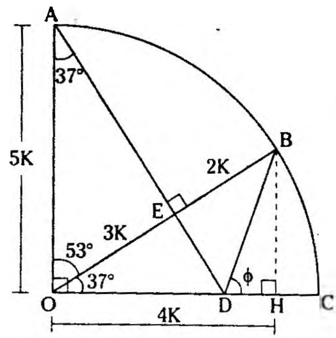
Problema 7

De la figura, AOC es un sector circular, calcule cot ϕ



(a)

Resolución



(b)

Figura 2.41

En la figura mostrada
Sea $OA=5K$
$\Rightarrow OE=3K$
$\triangle_{OHB}$: Trazamos $\overline{BH} \perp \overline{OC}$, luego $BH=3K$; $OH=4K$
$\triangle_{AOD}$: $OD = 5K\tan 37° = \dfrac{15K}{4}$
Además $DH=OH-OD=4K-\dfrac{15K}{4}$
$\Rightarrow \quad DH = \dfrac{K}{4}$
$\triangle_{BHD}$: $\cot\phi = \dfrac{DH}{BH} = \dfrac{\frac{K}{4}}{3K}$
$\therefore \cot\phi = \dfrac{1}{12}$

Problema 8

Siendo α, β y θ ángulos agudos que se relacionan de la siguiente manera

$\text{sen}\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)\csc\theta = 1$ ....(1)

$\tan\left(\dfrac{\alpha}{2}+10°\right)\cot(\beta-5°) = 1$ ....(2)

$\cos(\beta-6°)\sec 50° = 1$ ....(3)

Calcule
$L=\text{sen}(\beta+4°)-\cos(\theta-39°)+\tan(\alpha-37°)$

Resolución
Las condiciones satisfacen la propiedad de razones trigonométricas recíprocas, entonces los ángulos en cada caso son iguales, es decir:

de(1): $\dfrac{\alpha+\beta}{2}=\theta \Rightarrow \alpha+\beta=2\theta$

de(2): $\dfrac{\alpha}{2}+10°=\beta-5° \Rightarrow \beta-\dfrac{\alpha}{2}=15°$

de(3): $\beta-6°=50° \Rightarrow \beta=56°$

Reemplazando en las dos primeras ecuaciones se obtiene
$\alpha=82°$ y $\theta=69°$
Sustituyendo valores en L
$L=\text{sen}(56°+4°)-\cos(69°-39°)+\tan(82°-37°)$
$L=\cancel{\text{sen}60°}-\cancel{\cos 30°}+\tan 45°$
$\therefore L=1$

Problema 9

Si γ, ϕ y w son ángulos agudos, los cuales cumplen

$\text{sen}2\gamma=\cos(\gamma+\phi)$ ....(1)

$\tan\dfrac{3\phi}{2}=\cot(w+34°)$ ....(2)

$\sec(\gamma+w)=\csc(2\gamma-16°)$ ....(3)

calcule $K=3\cot\left(\dfrac{3\gamma}{2}\right)-\sec(w+28°)+\csc(\phi+14°)$

Resolución

de(1): $2\gamma+\gamma+\phi=90° \Rightarrow 3\gamma+\phi=90°$ ....(4)

de(2): $\dfrac{3\phi}{2}+w+34°=90° \Rightarrow 3\phi+2w=112°$ ....(5)

de(3): $\gamma+w+2\gamma-16°=90° \Rightarrow 3\gamma+w=106°$ ....(6)

de (4) y (6) se tiene que $w=16°+\phi$
sustituyendo en (5) $3\phi+2(16°+\phi)=112°$
$\Rightarrow \phi=16°$
luego en (5) $w=32°$
sustituyendo en (6) $3\gamma+32°=106°$
$\Rightarrow \gamma=74°/3$
Luego en K

$K=3\cot\left(\dfrac{3}{2}\times\dfrac{74°}{3}\right)-\sec(32°+28°)+\csc(16°+14°)$;

$K=3\cot 37°-\sec 60°+\csc 30°$

$K=3\left(\dfrac{4}{3}\right)-(2)+(2) \quad \therefore K=4$

Problema 10

Si x e y son ángulos, los cuales cumplen
$\text{sen}(x+20°)\sec(y+16)=1$ ....(1)
$\tan(y+29°)\tan(11°-x)=1$ ....(2)
Calcule el valor de

$M=\cot\left(\dfrac{y}{2}+4°\right)+\tan(30x)$

Resolución
De la condición(1)

$\text{sen}(x+20°)=\dfrac{1}{\sec(y+16°)}$ Por R.T. recíprocas

$\Rightarrow \text{sen}(x+20°)=\cos(y+16°)$

Como se vio en la página **87**, esta igualdad es válida para ángulos complementarios.
$x+20°+y+16°=90°$
es decir $x+20°+y+16°=90°$
$\Rightarrow x+y=54° \ldots (3)$

De la ecuación (2)

$$\tan(y+29°)=\frac{1}{\tan(11°-x)} \text{ Por R.T. recíprocas}$$

$\Rightarrow \tan(y+29°)=\cot(11°-x)$

Aquí también los ángulos son complementarios
$y+29°+11°-x=90°$
$\Rightarrow y-x=50° \ldots (4)$

De las ecuaciones (3) y (4)
$x=2°$; $y=52°$

Reemplazando valores en M, se tiene

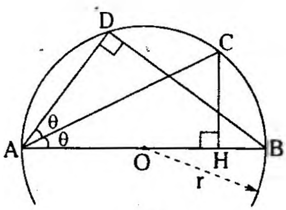
$$M=\cot\left(\frac{52°}{2}+4°\right)+\tan(30\times 2°)$$

$M=\cot 30° + \tan 60°$

$\therefore M=2\sqrt{3}$

Problema 11

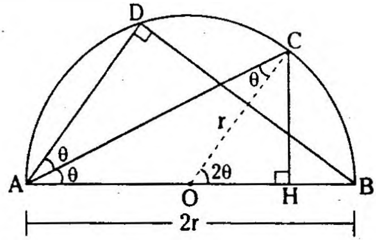
De la figura, simplifique $\frac{BD}{HC}$
Si O es centro de una semicircunferencia.



(a)

Resolución
En la figura 2.42(b) aplicamos las propiedades de resolución de triángulos rectángulos

En $\triangle$ABD: BD=2rsen2θ
En $\triangle$OHC: CH=rsen2θ

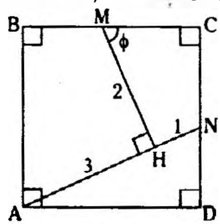


(b)
Figura 2.42

Luego $\frac{BD}{CH}=\frac{2r\,\text{sen}2\theta}{r\,\text{sen}2\theta}=2$

Problema 12

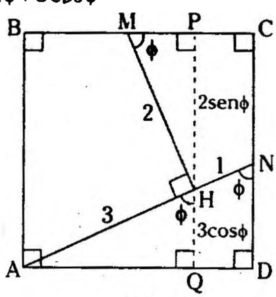
Si ABCD es un cuadrado, calcule $\tan\phi+\cot\phi$



(a)

Resolución
Del gráfico se tiene que (PQ=CD). Donde CD, lado del cuadrado.

PQ= $2\text{sen}\phi+3\cos\phi$



(b)
Figura 2.43

Pero en el $\triangle$ADN AD= $4\text{sen}\phi$
entonces PQ=AD $\Rightarrow 2\text{sen}\phi+3\cos\phi=4\text{sen}\phi$

$$\frac{\text{sen}\phi}{\cos\phi}=\frac{3}{2}\Rightarrow \tan\phi=\frac{3}{2}$$

$\therefore \tan\phi+\cot\phi=13/6$

Problema 13

Sobre el cateto BC de un triángulo rectángulo ABC, donde la $m\sphericalangle BCA=30°$, se construye otro triángulo rectángulo BDC (recto en D), además la $m\sphericalangle ADB=x$ y la $m\sphericalangle BCD=\theta$

Calcule $\cot x-\cot\theta$ si $\cot\theta=\dfrac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}$

Resolución

A partir del enunciado podemos plantear el siguiente gráfico.

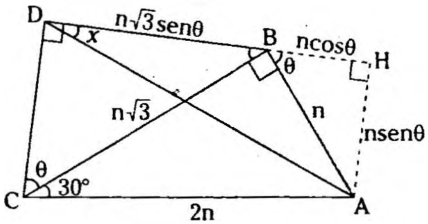


Figura 2.44

De la figura, haciendo que

$$AC=2n \Rightarrow AB=n \text{ y } BC=n\sqrt{3}$$

prolonguemos DB y desde A tracemos la perpendicular AH (H en la prolongación de DB)

En el ⊾CDB: $DB=n\sqrt{3}\operatorname{sen}\theta$

En el ⊾AHB: $AH=n\operatorname{sen}\theta$

$$BH=n\cos\theta$$

Luego en el ⊾AHD

$$\cot x=\frac{n\sqrt{3}\operatorname{sen}\theta+n\cos\theta}{n\operatorname{sen}\theta}=\frac{n\sqrt{3}\operatorname{sen}\theta}{n\operatorname{sen}\theta}+\frac{n\cos\theta}{n\operatorname{sen}\theta}$$

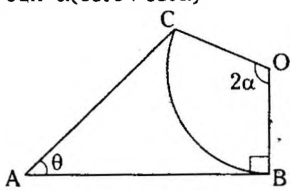
$$\cot x=\sqrt{3}+\cot\theta$$

$$\therefore \cot x-\cot\theta=\sqrt{3}$$

Problema 14

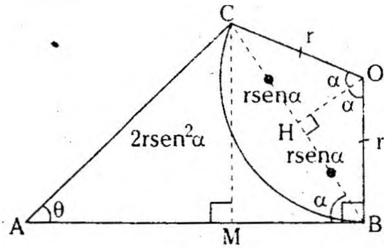
Si COB es un sector circular con centro en O y radio r. Además AB=6r.

Calcule $\operatorname{sen}^2\alpha(\cot\theta+\cot\alpha)$



(a)

Resolución



(b)

Figura 2.45

De la figura unimos BC y trazamos OH perpendicular a BC (OH: altura, bisectriz, mediana).

$\Rightarrow BH=CH=r\operatorname{sen}\alpha$

Tracemos perpendicular CM a AB en el ⊾CMB

$CM=CB\operatorname{sen}\alpha=(2r\operatorname{sen}\alpha)\operatorname{sen}\alpha=2r\operatorname{sen}^2\alpha$

$MB=CM\cot\alpha=2r\operatorname{sen}^2\alpha\cot\alpha$

En el ⊾CMA: $AM=CM\cot\theta=2r\operatorname{sen}^2\alpha\cot\theta$

Luego $AM+MB=AB$

$$\Rightarrow 2r\operatorname{sen}^2\alpha\cot\theta+2r\operatorname{sen}^2\alpha\cot\alpha=6r$$

$$2r\operatorname{sen}^2\alpha(\cot\theta+\cot\alpha)=6r$$

$$\therefore \operatorname{sen}^2\alpha(\cot\theta+\cot\alpha)=3$$

Problema 15

Determine el área de la región cuadrangular ABCD, en función de sus diagonales d_1 y d_2 ($AC=d_1$; $BD=d_2$) y el ángulo que forman dichas diagonales (α).

Resolución

Dato $AC=d_1$; $BD=d_2$

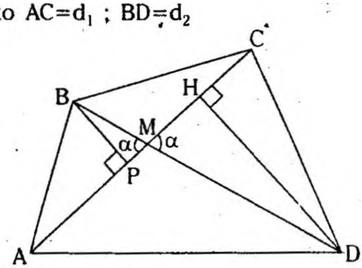


Figura 2.46

Sea

S_{ABCD}: Área de la región cuadrangular ABCD.

S_{ABC} : Área de la región triangular ABC.

S_{ADC} : Área de la región triangular ADC.

De la figura, se trazan las perpendiculares BP y DH a la diagonal AC.

⊾BPM: BP=BMsenα

⊾DHM: DH=DMsenα

Luego

$$S_{ABCD} = S_{\triangle ABC} + S_{\triangle ADC}$$

$$S_{ABCD} = \frac{d_1.BP}{2} + \frac{d_1.DH}{2}$$

$$S_{ABCD} = \frac{d_1}{2}(BM\,sen\,\alpha) + \frac{d_1}{2}(DM\,sen\,\alpha)$$

$$S_{ABCD} = \frac{d_1}{2}\,sen\,\alpha(\underbrace{BM+DM}_{d_2})$$

Ordenando se tiene que

$$\boxed{S_{ABCD} = \frac{d_1.d_2}{2}.sen\,\alpha}$$

Problema 16

En un triángulo rectángulo ABC(recto en B) se toma interiormente un punto E. Si las áreas de las regiones triangulares ABE y AEC son iguales. Además $\theta = m\sphericalangle BAE = m\sphericalangle BCA$.

Calcule $sen^2\theta sec 2\theta$

Resolución

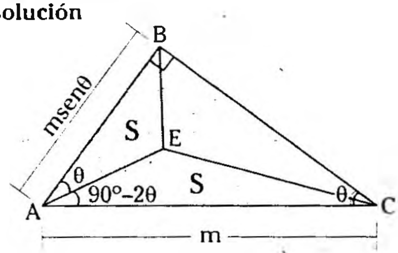


Figura 2.47

De la figura sea

$S_{\triangle BAE}$: Área de la región triangular BAE

$S_{\triangle EAC}$: Área de la región triangular EAC

AC=m ⇒ AB=msenθ

Luego

- $S_{\triangle BAE} = S = \dfrac{(AE)(m\,sen\,\theta)}{2}.sen\,\theta$ ....(1)

- $S_{\triangle EAC} = S = \dfrac{(AE)(m)}{2}.sen(90°-2\theta)$ ....(2)

Igualando (1) y (2) $\dfrac{AE.m}{2}sen^2\theta = \dfrac{AE.m}{2}\cos 2\theta$

Reduciendo $sen^2\theta = \cos 2\theta$

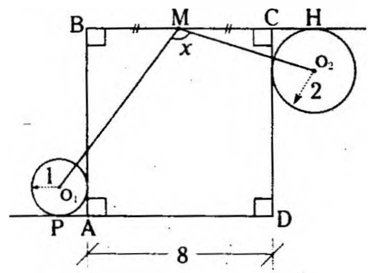
luego, la expresión pedida sería

$sen^2\theta sec 2\theta = (\cos 2\theta)sec 2\theta = 1$

$\therefore sen^2\theta sec 2\theta = 1$

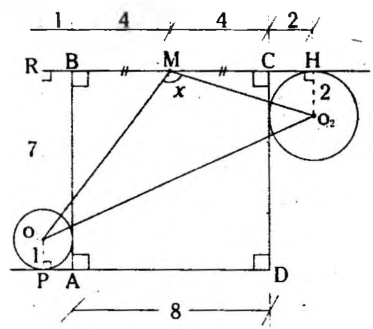
Problema 17

De la figura mostrada, calcule sen$x$; si ABCD es un cuadrado. Además H y P son puntos de tangencia.



(a)

Resolución



(b)

Figura 2.48

De la figura, trazamos perpendiculares desde O_1 y O_2 a la prolongación de BC, finalmente formamos el trapecio rectángulo O_1RHO_2.

Además por Teorema de Pitágoras

$$\triangle MRO_1: MO_1 = \sqrt{(5)^2+(7)^2} = \sqrt{74}$$

$$\triangle O_2HM: MO_2 = \sqrt{(6)^2+(2)^2} = 2\sqrt{10}$$

Luego por suma de áreas

$$S_{O_1MO_2} + S_{O_1RM} + S_{MO_2H} = S_{O_1RHO_2}$$

$$\frac{\sqrt{74}\times 2\sqrt{10}}{2}\,sen\,x + \frac{7\times 5}{2} + \frac{6\times 2}{2} = \left(\frac{7+2}{2}\right)\times 11$$

$$4.\sqrt{185}\,sen\,x = 52 \quad \therefore sen\,x = \frac{13\sqrt{185}}{185}$$

Problema 18

En un triángulo rectángulo se dan las longitudes de la hipotenusa c y la bisectriz b del ángulo recto, halle senϕ; siendo ϕ el menor ángulo que forma dicha bisectriz en la hipotenusa.

Resolución

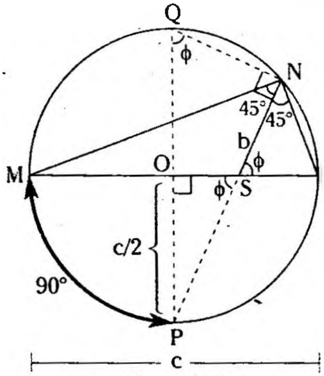


Figura 2.49

Prolongando la bisectriz NS, hasta tocar la circunferencia en el punto P, se traza el diámetro PQ.

luego $m\measuredangle PQN=\phi$

En $\triangle$PNQ: $NP=PQ\operatorname{sen}\phi \quad \Rightarrow NP=c\operatorname{sen}\phi$

luego $PS=c\operatorname{sen}\phi-b$

En $\triangle$POS: $\operatorname{sen}\phi=\dfrac{OP}{PS}$

sustituyendo $\operatorname{sen}\phi=\dfrac{\frac{c}{2}}{c\operatorname{sen}\phi-b}$

Ordenando

$$2c\operatorname{sen}^2\phi-2b\operatorname{sen}\phi-c=0$$

Resolviendo la ecuación cuadrática obtenemos

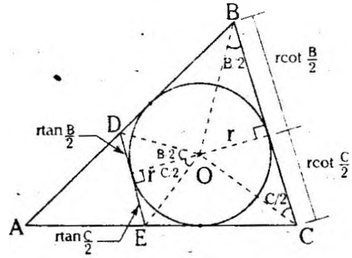
$$\operatorname{sen}\phi=\frac{b\pm\sqrt{b^2+2c^2}}{2c}$$

como $\operatorname{sen}\phi>0$

$$\therefore \operatorname{sen}\phi=\frac{b+\sqrt{b^2+2c^2}}{2c}$$

Problema 19

En un triángulo acutángulo ABC está inscrito la circunferencia del radio r. En paralelo con BC se ha trazado una tangente a ésta circunferencia que intersecta los lados AB y AC del triángulo en los puntos D y E respectivamente. Halle el área de la región limitada por el trapecio BCED, en términos de r y los ángulos B y C.

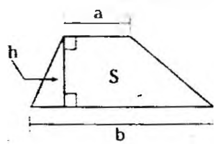


(a)

Designamos

O al centro de la circunferencia y S al área limitado por el trapecio.

Recordando la fórmula para el área de una región limitada por un trapecio.



$$S=\left(\frac{a+b}{2}\right).h$$

(b)

Figura 2.50

Aplicando dicha fórmula en el problema

$$S=\frac{\left[r\tan\frac{B}{2}+r\tan\frac{C}{2}+r\cot\frac{B}{2}+r\cot\frac{C}{2}\right]}{2}\times(2r)$$

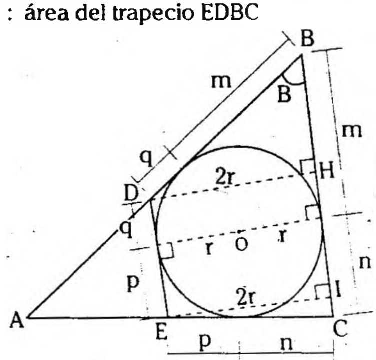
$$\therefore S=r^2\left(\tan\frac{B}{2}+\cot\frac{B}{2}+\tan\frac{C}{2}+\cot\frac{C}{2}\right)$$

Otro Método

Resolución

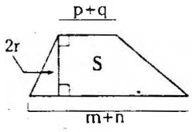
Sea : O: centro de la circunferencia

S   : área del trapecio EDBC



(a)

Donde



(b)

Figura 2.51

En el problema

$$S=\frac{(m+n+p+q)}{2}\times 2r$$

En el $\triangle$DBH $m+q=2r\csc B$ en el $\triangle$EIC $n+p=2r\csc C$

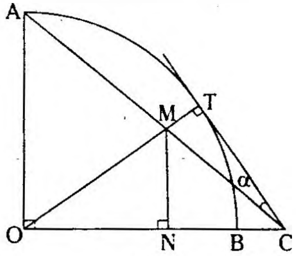
$S=(m+q+n+p)r$

$S=(2r\csc B + 2r\csc C)r$

$\therefore\ S=2r^2(\csc B+\csc C)$

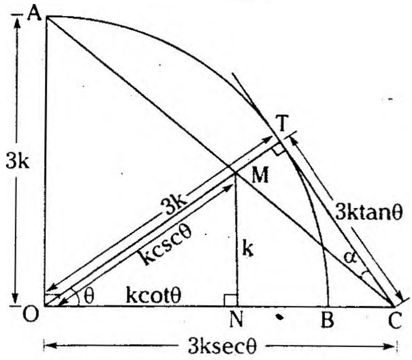
Problema 20

A partir del gráfico mostrado, calcule el valor de $\frac{3}{2}(\sqrt{2}+1)^{-1/2}\tan\alpha$, siendo AOB sector circular; T: punto de tangencia y AO = 3MN.



(a)

Resolución



(b)

Del gráfico

En el $\triangle$ MTC $\tan\alpha=\dfrac{MT}{TC}$

Pero si $m\measuredangle TOC=\theta$

En el $\triangle$ OTC $TO=3K$

luego $OC=3K\sec\theta$,

$TC=3K\tan\theta$

En el $\triangle$ MTC $MT=3K-K\csc\theta$

$TC=3K\tan\theta$

luego $\tan\alpha=\dfrac{3-\csc\theta}{3\tan\theta}$

Además

$\triangle COA\sim\triangle CNM\quad \dfrac{3K\sec\theta}{3K}=\dfrac{3K\sec\theta-K\cot\theta}{K}$

de lo cual

$\sec\theta=3\sec\theta-\cot\theta$

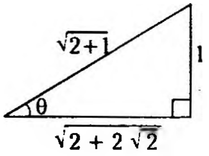
$2\sec\theta=\cot\theta\Rightarrow\dfrac{2}{\cos\theta}=\dfrac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}$

$2\operatorname{sen}\theta=\cos^2\theta\Rightarrow 2\operatorname{sen}\theta=1-\operatorname{sen}^2\theta$

$\operatorname{sen}^2\theta+2\operatorname{sen}\theta-1=0\Rightarrow\operatorname{sen}\theta=\dfrac{-2\pm\sqrt{2^2-4(1)(-1)}}{2}$

$\operatorname{sen}\theta=-1\pm\sqrt{2}\qquad\operatorname{sen}\theta=\sqrt{2}-1=\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}$

luego



(c)

Figura 2.52

reemplazando

$$\tan\alpha=\frac{3-(\sqrt{2}+1)}{3\left(\dfrac{1}{\sqrt{2+2\sqrt{2}}}\right)}$$

$$\frac{3\tan\alpha}{\sqrt{2}\sqrt{1+\sqrt{2}}}=2-\sqrt{2}$$

$$\therefore\ \frac{3}{2}(\sqrt{2}+1)^{-1/2}\tan\alpha=\sqrt{2}-1$$

EJERCICIOS

I. Halle el valor numérico de las siguientes expresiones

1. $\tan 30° \operatorname{sen} 60° - \cot 45°$

2. $4\cos^2 45° - \dfrac{\tan 60°}{\cos 30°} + \dfrac{1}{\sec 45°}$

3. $\dfrac{\cot^2 30° \sec 60° \cot 45°}{2\tan^2 30° + \sec^2 45°}$

4. $3\tan^2 30° + \dfrac{4}{3}\operatorname{sen}^2 60° - \dfrac{1}{2}\csc^2 45°$

5. $\sqrt{\operatorname{sen}^2 60° - \operatorname{sen}^2 45°} + \sqrt{\tan 15° + \cot 30°}$

6. $\dfrac{4\operatorname{sen} 45° \cos 30°}{\tan 60° \sec^2 45°} + \dfrac{\tan 45°}{\cos 45°}$

7. Si $\tan\alpha = \dfrac{1}{3}, \left(0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}\right)$, halle $\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha$

8. Si $\cos\alpha = 0{,}4$; halle $8\tan^2\alpha\sec\alpha$

9. Si $\operatorname{sen}\alpha = \dfrac{3}{7}$, halle $3\sec\alpha.\tan\alpha$

10. Si $\cot\alpha = 4{,}5$; halle $3\cos\alpha - 5\operatorname{sen}\alpha$

II. En cada caso calcule el menor valor positivo de x.

11. $\operatorname{sen}x = \cos(20° + x)$

12. $\tan 3x = \cot x$

13. $\sec 2x = \csc(x + 30°)$

14. $\operatorname{sen}(x + 8°).\csc 3x = 1$

15. $\tan 4x.\cot 60° = 1$

16. $\cos\dfrac{x}{5} . \sec 9°20' = 1$

III. En un triángulo rectángulo ABC, recto en B en los siguientes casos, determine

17. La hipotenusa. Si $\cos C = 0{,}3$ y $a = 12$

18. El cateto a. Si $\tan A = 15{,}8$ y $c = 10$

19. La hipotenusa. Si $\sec A = \dfrac{3}{4}$ y $a = 60$

20. El cateto c. Si $\sec A = 9$ y $b = 6$

21. Por catetos a y b si $\operatorname{sen} c = 0{,}8$ y $b = 16$

RESPUESTAS

1. $-\dfrac{1}{2}$
2. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$
3. $\dfrac{9}{4}$
4. 1
5. $\dfrac{1+2\sqrt{2}}{2}$
6. $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$
7. $\dfrac{3}{10}$
8. 105
9. 63/40
10. $\dfrac{\sqrt{85}}{5}$
11. 35°
12. 22°30'
13. 20°
14. 4°
15. 15°
16. 46°40'
17. 40
18. 158
19. 80
20. 2/3
21. 12,8 y 9,6

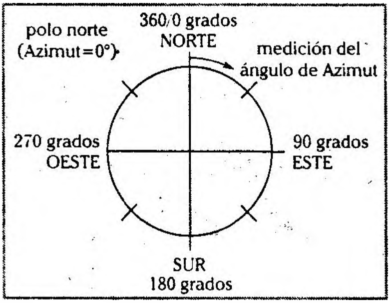
Antes de empezar con el desarrollo de los problemas resueltos sobre ángulos verticales y horizontales, debe saber que los conceptos que se han vertido, tienen varias aplicaciones en nuestra vida cotidiana, por citar un caso en las telecomunicaciones. Para que tenga un mejor panorama sobre este ejemplo, se le sugiere proseguir con la siguiente lectura.

LECTURA

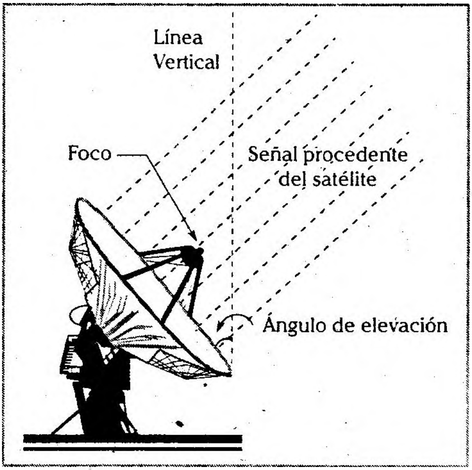
ANTENAS PARABÓLICAS MOTORIZADAS

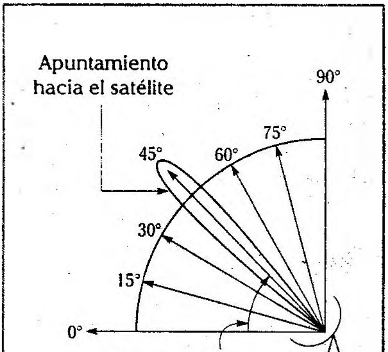
En la instalación de antenas parabólicas, la persona que lo va a realizar debe tener en cuenta ciertos parámetros técnicos como son el azimut y la elevación de la antena parabólica los cuales se explican a continuación.

Azimut.- Por azimut se entiende la orientación real respecto al punto donde se encuentra el observador. Se mide en grados absolutos tomando como referencia el NORTE a 0 grados, siguiendo el sentido de las agujas del reloj hasta llegar al ESTE a 90 grados, el SUR a 180 grados, el OESTE a 270 grados y de nuevo el NORTE a 360 grados.



Elevación.- Por elevación entendemos la inclinación que debe poseer una línea recta imaginaria que pase por el borde superior e inferior de la parábola, respecto a la vertical, cuando el foco apunta al satélite.





Ángulo de elevación de una antena parabólica en tierra

ÁNGULOS VERTICALES Y HORIZONTALES

En el presente tema estudiaremos aplicaciones de triángulos rectángulos que tienen gran utilidad en la vida diaria, como por ejemplo en la topografía, geodesia, navegación, o en el cálculo indirecto de distancias inaccesibles.

Los ángulos verticales y horizontales tienen en común la referencia de un observador o punto de observación y el objeto observado.

Antes de definir los ángulos verticales y horizontales debemos tener claro algunos conceptos importantes.

Línea Vertical

La vertical de un lugar es la línea que coincide con la dirección que marca la plomada en equilibrio (figura 2.53).

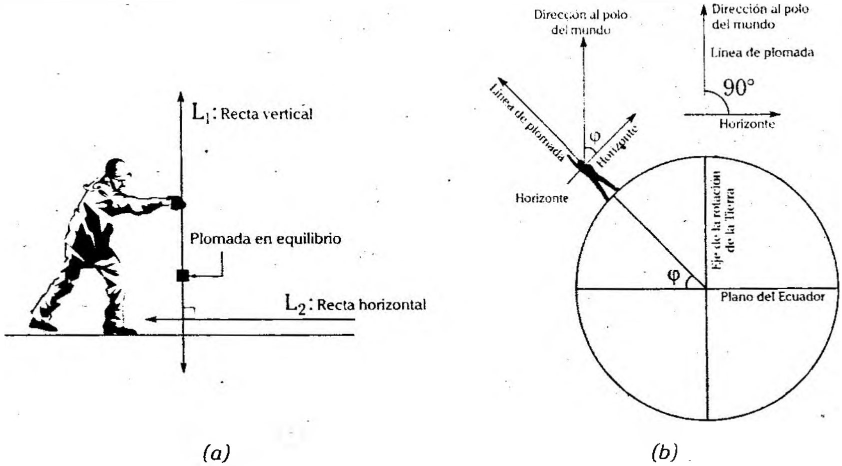


Figura 2.53

Línea Horizontal

Es toda perpendicular a la línea vertical

Línea Visual

Es aquella línea imaginaria que une los ojos del observador con un punto al objeto, el cual se está observando.

Plano Vertical

Es todo aquel plano que contiene una línea vertical.

Nota

La línea vertical apunta al centro de la Tierra (observe la figura 2.53 (b)); la vertical depende del lugar donde nos encontremos.

Ángulos Verticales

Son aquellos ángulos agudos contenidos en un plano vertical, el cual contiene tanto al observador como al objeto observado. Dentro de este tipo de ángulos tenemos el ángulo de elevación y el ángulo de depresión.

1. **Ángulo de Elevación**
Se forma entre una línea horizontal que parte de la vista del observador y una línea visual, cuando el objeto observado se encuentra por encima de dicha línea horizontal. Para apreciar dicho ángulo, observemos la figura 2.54



Figura 2.54
La actividad económica de las comunidades humanas representa un elemento cultural de gran importancia, cuya función primordial es atender a las necesidades básicas de la vida. En la imagen, cultivo de cacao en San Martín.

2. **Ángulo de Depresión**
Se forma entre una línea horizontal que parte de la vista del observador y la visual, cuando el objeto observado se encuentra por debajo de dicha línea horizontal. Para poder apreciar dicho ángulo, le sugerimos observar la figura 2.55

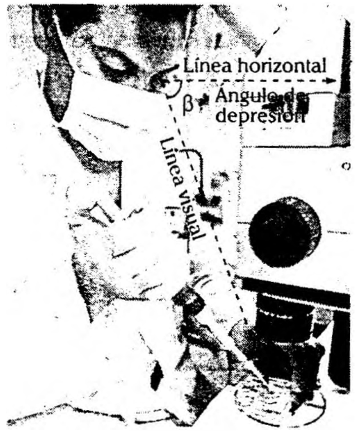


Figura 2.55
El objetivo principal de la ingeniería genética consiste en el estudio y la modificación de la estructura de los caracteres hereditarios de las diferentes especies animales y vegetales que pueblan el planeta y que se transmiten de una generación a la siguiente.

3. **Ángulos de Observación**
Es aquel ángulo formado por dos visuales que parten desde un mismo punto, al observar un objeto de un extremo a otro.
Así por ejemplo, en la figura 2.56 se observa a la persona bajo un ángulo θ.

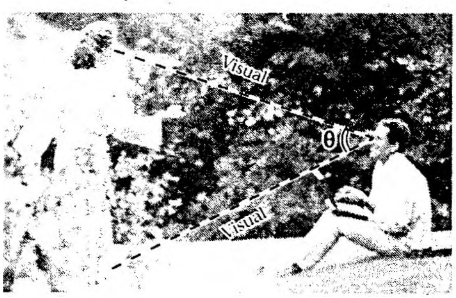


Figura 2.56

Plano Horizontal
Es todo aquel plano perpendicular a la vertical.

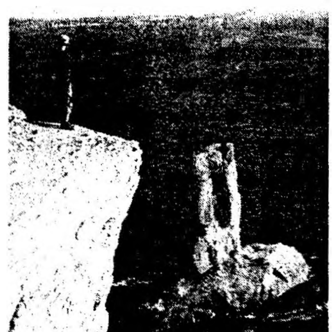


Figura 2.57
Bahía de Paracas

Ángulos Horizontales

Son aquellos ángulos que están contenidos en un plano horizontal.

La rosa náutica o compás marino: Es la representación esquemática de la brújula náutica, la cual está dividida en 32 partes iguales, por lo tanto cada parte es $360 \div 32 = 11°15'$; la figura 2.58 muestra el nombre que se da a las diferentes direcciones. Los puntos norte, sur, este y oeste se llaman puntos cardinales y sobre el papel estas direcciones se toman generalmente hacia arriba, hacia abajo, hacia la derecha y hacia la izquierda, respectivamente.

ROSA NÁUTICA

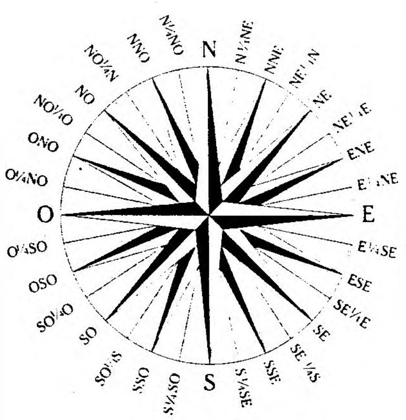


Figura 2.58

Ángulo formado por dos direcciones principales (consecutivas)

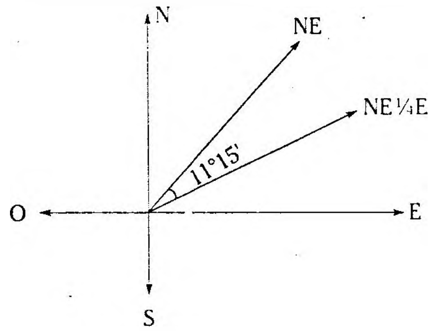


Figura 2.59

La Dirección: la dirección de un punto A con relación a un observador P puede darse de dos formas: el punto A se encuentra del Este 60° hacia el Norte (E60°N) del punto P, o A se encuentra del Norte 30° hacia el Este (N30°E) del punto P. Análogamente, el punto B se encuentra en la dirección S40° E del punto P, o B se encuentra del este 50° hacia el Sur de P y C se encuentra en la dirección 020°N del punto P, o C se encuentra del Norte 70° al Oeste del punto P. Observe la figura 2.60

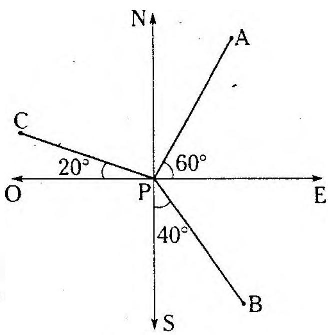
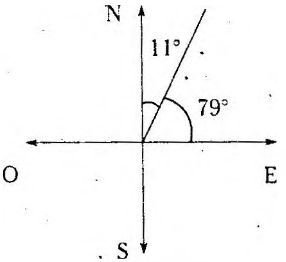
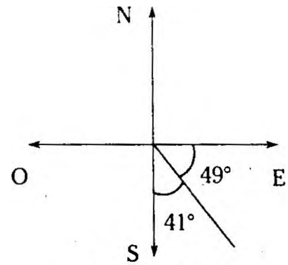


Figura 2.60

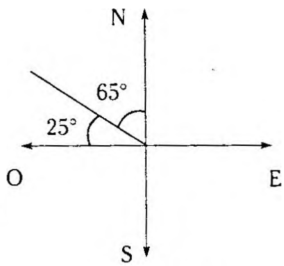
El Rumbo: es una dirección la cual está dada como el ángulo entre la línea de dirección magnética Norte, Sur y la línea de dirección hacia el objeto. Observe la figura 2.61. Se debe tener presente para este capítulo que no toda dirección es un rumbo, pero sí todo rumbo es una dirección.



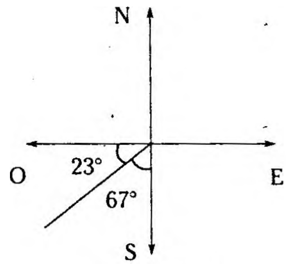
Rumbo N11°E
o Dirección E79°N
(a)



Rumbo S41°E
o Dirección E49°S
(b)



Rumbo N65°O
o Dirección O25°N
(c)



Rumbo S67°O
o Dirección O23°S
(d)

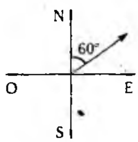
Figura 2.61

Nota

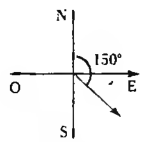
Los rumbos N11°E, N65°O y S67°O pueden ser considerados como direcciones (ver figura 2.61); en cambio las direcciones E79°N, E49°S, O25°N y O23°S no son consideradas rumbos.

Observación

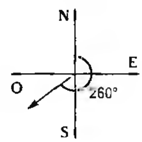
En náutica y en aeronáutica el rumbo se mide a partir del norte y con el sentido dirigido hacia el este (ver la figura 2.62) Es decir, se mide un ángulo de 0° a 360° en sentido de las manecillas del reloj (en este caso se asigna una medida positiva al ángulo en lugar de la medida negativa a la que no está acostumbrado para rotaciones en el sentido del reloj).



Rumbo 60°
(a)



Rumbo 150°
(b)



Rumbo 260°
(c)

Figura 2.62

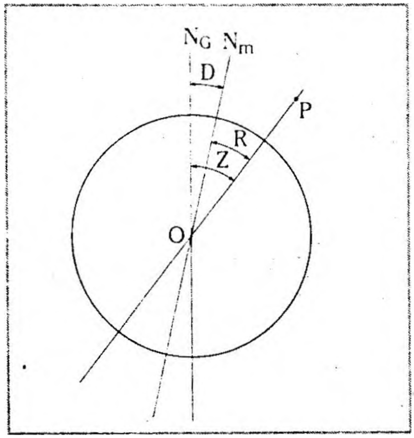
LECTURA

COORDENADAS GEOGRÁFICAS

Al hablar sobre las brújulas, se plantea que para trazar una dirección cualquiera, existe la necesidad de tomar un punto de origen respecto al cual se encuentran los ángulos. En topografía se suelen tomar en cuenta los siguientes puntos de origen:

- El norte geográfico y verdadero.
- El norte magnético.

Por convención los ángulos que vamos a medir a continuación se harán en el sentido en que están las manecillas del reloj a partir del punto de origen. Según el punto de origen que se tome, estos ángulos son y se denominan:



Azimut Verdadero o Geográfico

Es el ángulo formado por una dirección cualquiera y el norte geográfico. Se le representa por (Z)

Rumbo o Azimut Magnético

Es el ángulo formado por una dirección cualquiera y el Norte Magnético (el que nos da la brújula). Se le representa por (R).

De manera que si tomamos un ángulo con la brújula, estamos formando un rumbo. Si marchamos por medio de direcciones tomadas por la brújula, estamos marchando por rumbos.

La declinación (D) de un punto P no es más que la diferencia entre el azimut verdadero y el azimut magnético (ver la figura)

$D = Z - R$, de donde $Z = D + R$

Es decir, que el azimut verdadero geográfico es la suma del rumbo más la declinación; o lo que es lo mismo, para hallar el N geográfico no hay más que agregar la declinación al N Magnético.

Generalmente cuando se plantean ángulos verticales y horizontales a la vez, el gráfico resultante es de 3 dimensiones.

En la figura 2.63 se tienen ángulos verticales α y β y ángulos horizontales 20° y 50°. La persona observa la parte más alta del árbol con un ángulo de elevación α ($L // \overline{AH}$); en cambio desde el punto C el ángulo de elevación β (AHQ y CHQ son planos verticales). La persona se encuentra al S20° O del árbol, en cambio B y C están al sur y este respectivamente del árbol, también podemos afirmar que B se encuentra al este de A(o de la persona) y al S50°O de C.

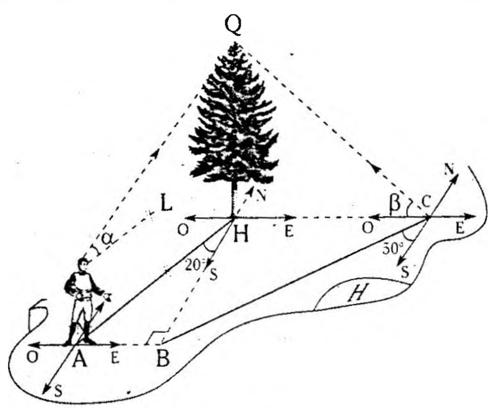
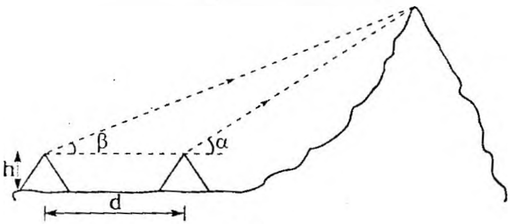


Figura 2.63

Problema 1

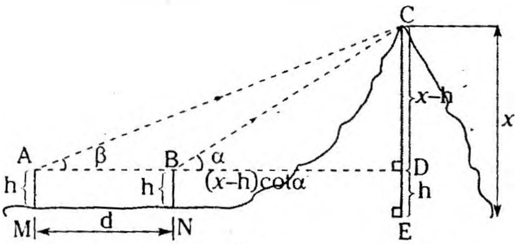
En la figura adjunta se desea calcular la altura de una montaña, para lo cual se utiliza un teodolito de h metros de longitud. Si en la primera posición el ángulo de elevación mide α y en la segunda posición el ángulo de elevación es β, y por último, d es la distancia en metros entre las posiciones del teodolito. Demuestre que la altura de la montaña es igual a $\left(\dfrac{d}{\cot\beta - \cot\alpha} + h\right)$



(a)

Resolución

Sea x la longitud (en metros) de la altura de la montaña, del gráfico tendremos



(b)

Figura 2.64

Por resolución de triángulos rectángulos

⊾BDC: $BD=(x-h)\cot\alpha$

⊾ADC: $AD=(x-h)\cot\beta$

Pero $AD=AB+BD$

$$(x-h)\cot\beta = d + (x-h)\cot\alpha$$

$$(x-h)(\cot\beta - \cot\alpha) = d$$

$$x-h=\frac{d}{\cot\beta-\cot\alpha}$$

$$\therefore \quad x=\frac{d}{\cot\beta-\cot\alpha}+h$$

Problema 2

Desde un punto situado a 20 m sobre el nivel del piso, los ángulos de elevación y depresión de la parte más alta y baja de una torre son 30° y 37°, respectivamente. Calcule la altura de la torre.

Resolución

En la figura adjunta, P se encuentra a 20 m sobre el nivel del piso. La longitud de la torre está dada por

$AC=AB+BC$

$AC=AB+20$ ....(I)

Por resolución de triángulos rectángulos

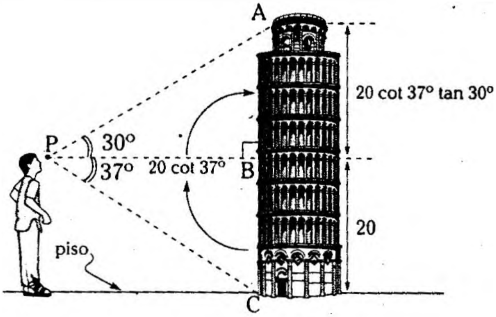


Figura 2.65

⊾CBP: $PB=20\cot 37°$

⊾PBA: $AB=PB\tan 30°$

$$AB=20\cot 37°\tan 30°$$

$$AB=(20)\left(\frac{4}{3}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$

$$AB=\frac{80\sqrt{3}}{9}$$

En(I) $AC=\left(\dfrac{80\sqrt{3}}{9}+20\right)$m

Problema 3

Un poste está pintado hasta un punto P que se encuentra a 10 m sobre el nivel del suelo. Si el ángulo de elevación del punto P con respecto a un observador en el suelo es 30° y la parte no pintada es observada bajo un ángulo de 15° con respecto a dicho observador. Calcule la longitud del poste que falta pintar.

Resolución

Lo planteado en el problema se ha esquematizado en la figura 2.66

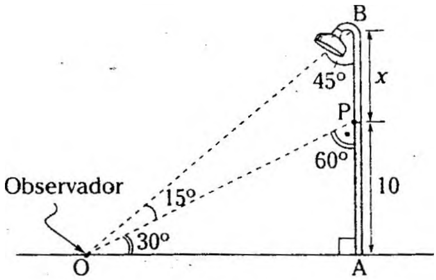


Figura 2.66

Sea x la longitud de la parte no pintada, así

x=AB–10 ....(1)

(Nótese que la estatura del observador se omite ya que no ha sido dato del problema.)

Hallando AB

⊿OAP: $OA=10\cot 30°=10\sqrt{3}$

⊿OAB: notable(45°y45°)

$AB=OA=10\sqrt{3}$

En (1) $x=10\sqrt{3}-10=7{,}3$; $\therefore\ x=7{,}3\text{ m}$

Problema 4

Calcule en metros cuadrados el área de un terreno acotado como sigue: Se parte de un roble y se camina 1 000 m en dirección Sur, se da vuelta hacia NθE y se camina 500 m. Desde este punto se camina 750 m en dirección Norte y se da vuelta en dirección Oeste para volver al punto de partida.

Resolución

Graficando el problema, además sea S el área en metros cuadrados del terreno.

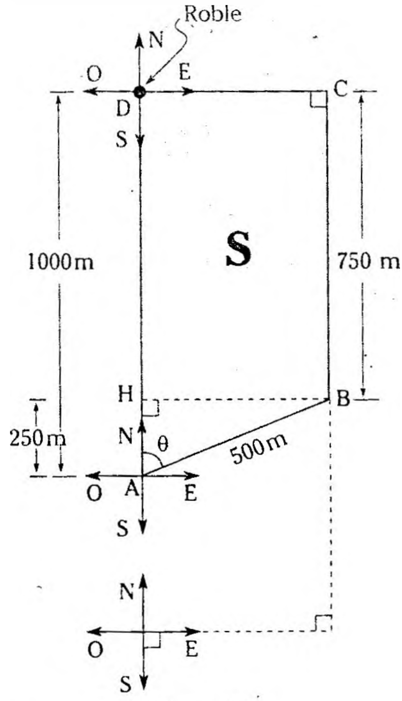


Figura 2.67

Del gráfico, el terreno acotado nos representa al trapecio rectángulo; como nos piden su área trazamos $\overline{BH}\perp\overline{AD}$.

⊾BHA (Notable)

$\Rightarrow BH=250\sqrt{3}\text{ m}$

luego, el área del terreno será

$$S=\left(\frac{750\text{m}+1000\text{m}}{2}\right)\times 250\sqrt{3}\text{m}$$

$$\therefore\ S=218750\ \sqrt{3}\ \text{m}^2$$

Problema 5

Dos ciudades A y B están separadas 50 millas una de la otra, la ciudad B está situada con respecto a la ciudad A 58° al Este del Sur. Una tercera ciudad C se ve desde A en la dirección S28°E y desde la ciudad B en la dirección 62° al Oeste del Sur. Calcule la distancia en millas de la ciudad B a la ciudad C.

Resolución

Planteado el enunciado del problema, tenemos el siguiente gráfico,

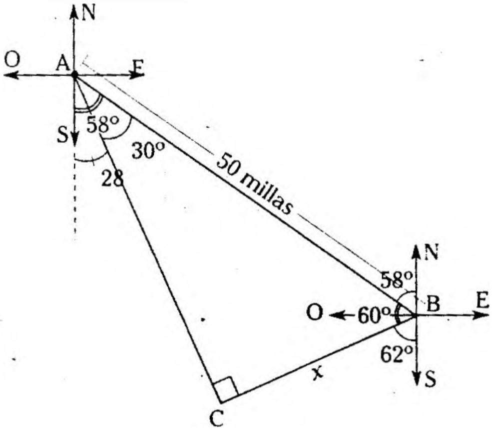


Figura 2.68

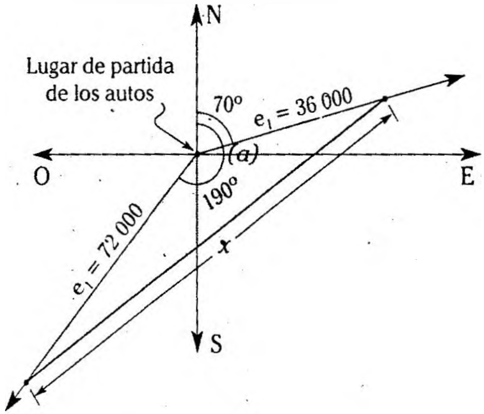
de donde

◺ACB es notable (30° y 60°)

$\Rightarrow x = 25$ millas

Problema 6

Dos autos parten de un mismo lugar, en los rumbos 70° y 190°, con velocidades 20 m/s y 40 m/s, respectivamente. Calcule la distancia que los separa al cabo de media hora.



(a)

Resolución

Tener en cuenta que

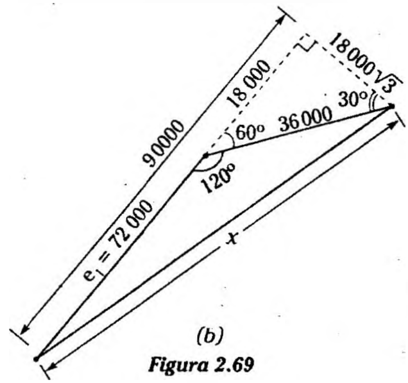
$\frac{1}{2}(\text{hora}) = \frac{1}{2}(3600\text{ s}) = 1800\text{ s}$

Asumiendo que los autos realizan un movimiento rectilíneo uniforme, tenemos que los espacios recorridos son respectivamente

$e_1 = 20\times1800 = 36000\text{ m} \wedge e_2 = 40\times1800 = 72000\text{ m}.$

A partir de las condiciones del problema tenemos el gráfico respectivo (figura 2.69).

Entonces, de dicho gráfico obtenemos



(b)

Figura 2.69

Por el teorema de Pitágoras:

$$x^2 = (90\,000)^2 + (18\,000\sqrt{3})^2$$

$$x^2 = (1000)^2(90^2 + (18\sqrt{3})^2)$$

$$x^2 = (1000)^2\times4^2\times9^2\times7$$

$$x = 1000\times4\times9\times\sqrt{7}$$

$$\therefore x = 36000\sqrt{7}$$

Luego, al cabo de media hora estarán separados $36000\sqrt{7}$ m

Problema 7

Una avioneta se desplaza horizontalmente a una altura H sobre el nivel del suelo, en un determinado instante sufre un desperfecto cayendo con una depresión angular de 37°, el piloto arregla el desperfecto justo a una altura h sobre el nivel del suelo y comienza a elevarse con un ángulo de 16°, llegando a ubicarse nuevamente a una altura H; si la velocidad de la avioneta en todo instante es de 1000/21 m/s, ¿cuánto tiempo perdió la avioneta debido al desperfecto en su vuelo normal? (Dato H–h=500 m).

Resolución

Del enunciado del problema planteamos el gráfico siguiente

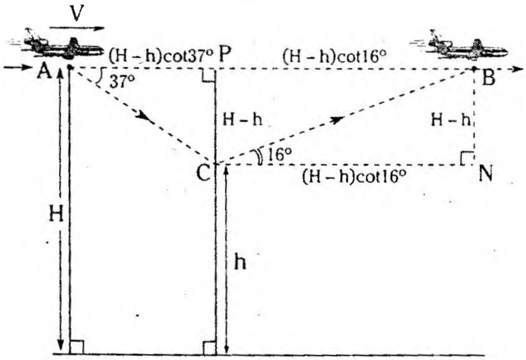


Figura 2.70

Por resolución de triángulos rectángulos

$\triangle APC: AP=(H-h)\cot 37°$

$\triangle CNB: CN=(H-h)\cot 16°$

Además, el recorrido hecho por la avioneta en su vuelo normal sería AB

$$AB=V.t_{AB} \Rightarrow t_{AB}=\frac{AB}{V}$$

luego $t_{AB}=\dfrac{(H-h)\cot 37°+(H-h)\cot 16°}{\dfrac{1000}{21}}$

$$t_{AB}=\frac{(H-h)(\cot 37°+\cot 16°)}{\dfrac{1000}{21}}$$

$$t_{AB}=\frac{500\times\dfrac{100}{21}}{\dfrac{1000}{21}} \Rightarrow t_{AB}=50\,s$$

Pero debido al desperfecto la avioneta realiza el siguiente recorrido AC+CB

$$AC+CB=V(t_{AC}+t_{CB}) \Rightarrow t_{AC}+t_{CB}=\frac{AC+CB}{V}$$

$$t_{AC}+t_{CB}=\frac{(H-h)(\csc 37°+\csc 16°)}{V}$$

$$t_{AC}+t_{CB}=\frac{500\times\dfrac{110}{21}}{\dfrac{1000}{21}} \Rightarrow t_{AC}+t_{CB}=55\,s$$

Ahora, la pérdida de tiempo (P_t) debido al desperfecto lo calculamos como

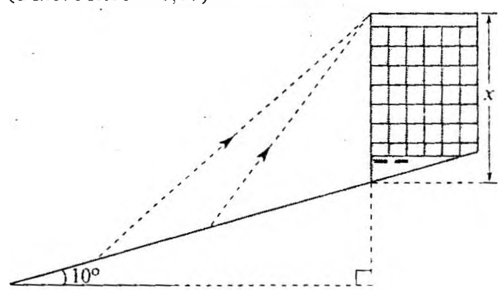
$$P_t=(t_{AC}+t_{CB})-t_{AB}$$

$$P_t=55\,s-50\,s$$

$$\therefore P_t=5\,s$$

Problema 8

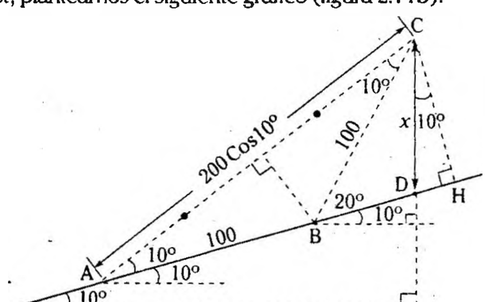
Sobre un plano se ha construido un edificio donde cada piso mide 2 m. Si se sabe que desde dos puntos más abajo sobre el plano inclinado se observa la parte superior del edificio con ángulos de elevación de 20° y 30°, ¿cuánto será el número de pisos del edificio, si los puntos de observación están distanciados 100 m, además el plano inclinado forma un ángulo de 10° con la horizontal? (Dato: sen10°=0,17)



(a)

Resolución

Para determinar el número de pisos, necesitamos calcular x, ya que el número de pisos se obtendrá considerando $\dfrac{\text{altura del edificio}}{\text{altura de cada piso}}=\dfrac{x}{2}$; para calcular x, planteamos el siguiente gráfico (figura 2.71b).



(b)

Figura 2.71

En el ⊿ AHC: $HC = AC\text{sen}10°$
$HC = 200\cos 10° \text{sen}10°$

En el ⊿ DHC: $x = HC\sec 10°$

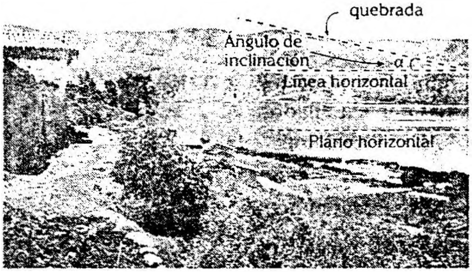
$$x = 200\underbrace{\cos 10° \text{sen}10° \sec 10°}_{1}$$

$x = 200\text{sen}10°$
$x = 200(0,17) = 34$

Por lo tanto el número de pisos será $\frac{34}{2} = 17$

Comentario

Debemos saber que nuestra geografía es muy accidentada, dentro de esta gama de accidentes geográficos contamos con distintos planos inclinados como son las montañas, quebradas y otros. Para poder observar esto, se le muestra la siguiente fotografía, la cual corresponde a un paisaje natural de nuestra serranía.



Cultivos a orillas de la laguna de Paca (Junín).

Problema 9

La mayoría de los aviones llega al aeropuerto en una planeación recta θ con respecto a su horizontal. Un piloto experimenta con una nueva técnica de aterrizaje que consiste en una planeación recta de α empezando en un punto situado a 7 millas (horizontales) del punto de aterrizaje, luego cambia a un planeación recta de θ a 3 millas (horizontales) del punto de aterrizaje. Si la planeación empieza a una altura h. Halle h.

Resolución

Planteando, en un gráfico las condiciones del problema tenemos

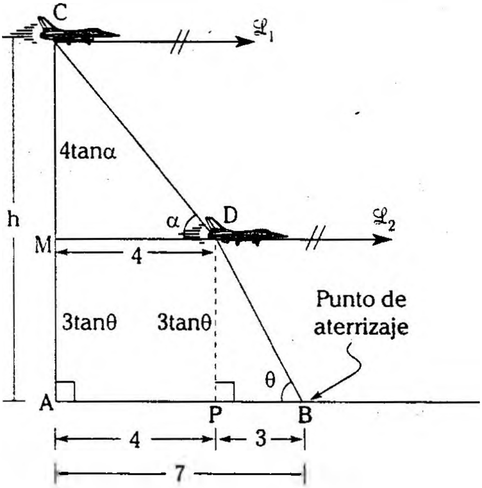


Figura 2.72

En la figura 2.72 $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$ son rectas horizontales. Por resolución de triángulos rectángulos, tenemos

- En el ⊿DPB
  $DP = PB\tan\theta = 3\tan\theta$
- En el ⊿DMC
  $MC = MD\tan\alpha = 4\tan\alpha$

Finalmente

$$h = CM + \underbrace{MA}$$
$$h = CM + DP$$
$$h = 4\tan\alpha + 3\tan\theta$$

$$\therefore \quad h = (4\tan\alpha + 3\tan\theta)\text{millas}$$

Problema 10

Un poste de altura h se encuentra ubicado en el centro de un parque de forma circular. Tres personas situadas en la periferia del parque observan la parte superior del poste con un ángulo de elevación α; si dichas personas están ubicadas a una misma distancia 2h una de otra, calcule $\tan\alpha$.

Resolución

De la figura

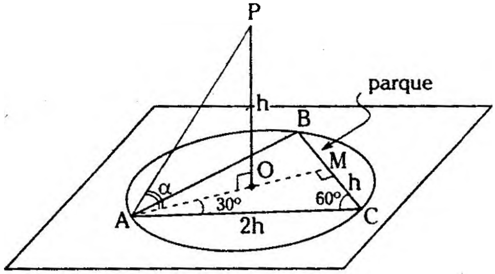


Figura 2.73

Nota

Los ángulos de elevación para las tres personas son los mismos; entonces ha sido suficiente dibujar el ángulo de elevación para la persona ubicada en A.

- O: centro
- ΔABC:equilátero

Luego M es punto medio de $\overline{BC}$

$\Rightarrow MC=h$

$\triangle AMC: AM=h\sqrt{3}$

Además, O es baricentro de la región triangular ABC

$\Rightarrow AO=\frac{2}{3}h\sqrt{3}$

Luego: $\triangle AOP: \tan\alpha=\frac{OP}{AO}$

$$\tan\alpha=\frac{h}{\frac{2}{3}h\sqrt{3}}$$

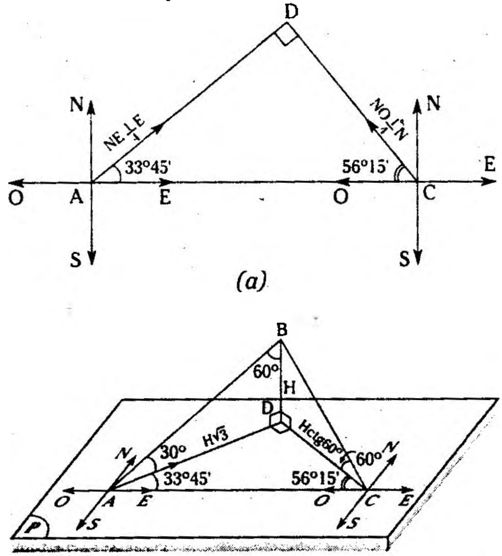
$$\therefore \tan\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Problema 11

Un bote navega hacia el Este a $200\sqrt{15}$ m/h, a las 13:15 horas un tripulante observa la cúspide de un acantilado en el rumbo NE $\frac{1}{4}$ E con un ángulo de elevación de 30°; a las 13:45 horas observa otra vez la misma cúspide de la que se halla en el rumbo NO $\frac{1}{4}$ N con un ángulo de elevación de 60°. Calcule la altura del acantilado.

Resolución

Para entender el gráfico planteado del enunciado del problema, observemos los siguientes gráficos a manera de repaso



(a)

(b)

Figura 2.74

Entonces, en la figura 2.74(b), H representa la altura del acantilado.

- ADC: Plano horizontal
- ADB y CDB : Planos verticales
- ABC: Plano oblícuo

Del gráfico $m\measuredangle ADC=90°$

$\triangle BDC$(resolución de triángulos rectángulos)

$DC=H\cot 60°$

- $\triangle_{ADB}(30°\text{ y }60°)$

  $DA=H\sqrt{3}$

De la figura 2.74(b) se aplica el teorema de Pitágoras en $\triangle ADC$

$\Rightarrow AC^2=(H\sqrt{3})^2+(H\cot 60°)^2$

$\Rightarrow AC^2=3H^2+H^2\cot^2 60°$

$\Rightarrow AC^2=3H^2+\frac{1}{3}H^2$

$\Rightarrow AC^2=10\frac{H^2}{3} \Rightarrow AC=\frac{\sqrt{30}}{3}H$ ...(I)

Además $AC^2 = v\,.\,t$ $\left(t = 13{:}45 - 13{:}15 = \frac{1}{2}\text{ hora}\right)$

luego $t = \frac{1}{2}h$; $v = 200\sqrt{15}$ m/h

Finalmente

$AC = 200\sqrt{15}\cdot\frac{1}{2} \Rightarrow AC = 100\sqrt{15}$ m ...(II)

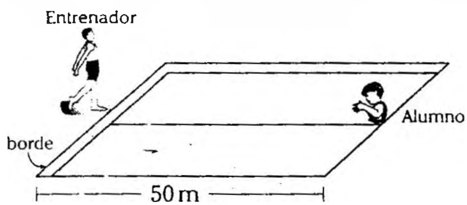
Reemplazando (II) en (I)

$$100\sqrt{15} = \frac{\sqrt{30}H}{3}$$

$\therefore\; H = 150\sqrt{2}$ m

Problema 12

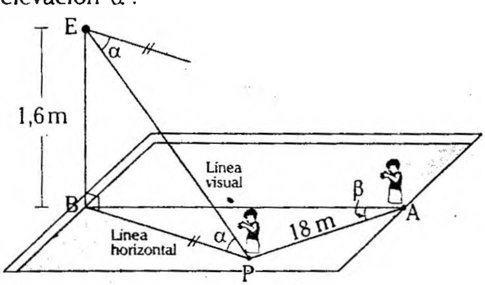
Si el entrenador y el alumno, se hallan en dos extremos opuestos sobre la piscina, además luego que el alumno nadó 18 m, fue visto con ángulo de depresión α por su entrenador. Calcule la mayor $\tan\alpha$. Si la estatura del entrenador es 1,6 m



(a)

Resolución

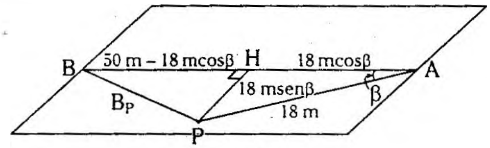
Del enunciado podemos concluir en el siguiente gráfico donde el alumno A se dirige hasta un punto P. (luego de nadar 18 m) y en este punto es observado por el entrenador con un ángulo de elevación α.



(b)

En el ◺BPE $\tan\alpha = \frac{EB}{BP} = \frac{1{,}6\text{ m}}{BP}$ ... (1)

Como se pide E mayor valor $\tan\alpha$, entonces el segmento BP debe tomar su mínimo valor, por lo que plantearemos una ecuación que relacione BP con el ángulo β, para ello observe el triángulo ABP.



(c)

Figura 2.75

◺APH (resolución de triángulo rectángulos)

$AH = 18\text{ m}\cos\beta$; $PH = 18\text{ m}\,\text{sen}\beta$

◺BHP (Teorema de Pitágoras)

$BP^2 = (50\text{ m} - 18\text{ m}\cos\beta)^2 + (18\text{m}\,\text{sen}\beta)^2$

Desarrollando obtenemos

$$BP^2 = (50\text{m})^2 + (18\text{m}\cos\beta)^2 + (18\text{m}\,\text{sen}\beta)^2$$
$$-2(50\text{ m})(18\text{ m})\cos\beta \;....(2)$$

Del ◺APH (Teorema de Pitágoras)

$$(18\text{ m}\,\text{sen}\beta)^2 + (18\text{m}\cos\beta)^2 = (18\text{m})^2 \;....(3)$$

Reemplazamos (3) en (2) tenemos

$$\underbrace{BP^2}_{\text{mínimo}} = (50\text{m})^2 + (18\text{m})^2 - 2(50\text{m})(18\text{m})\underbrace{\cos\beta}_{\text{máximo}} \;...(4)$$

Pero como en el capítulo IV veremos

$\cos\beta$ máximo $= 1$ ....(5)

Reemplazamos (5) en (4) tenemos

$$\underbrace{BP^2}_{\text{mínimo}} = (50\text{ m})^2 + (18\text{ m})^2 - 2(50\text{ m})(18\text{ m})(1)$$

Reduciendo

$BP^2 = 1024\text{ m}^2 \quad \Rightarrow BP = 32$ m ....(6)

Reemplazando (6) en (1)

$$\tan\alpha_{(\text{mayor})} = \frac{1{,}6\text{ m}}{32\text{ m}}$$

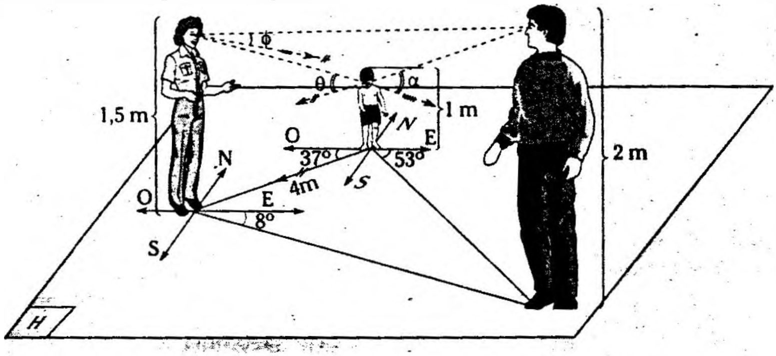
$\therefore$ El mayor valor de la $\tan\alpha$ es $\frac{1}{20}$

Problema 13

Pablo de (1 m de altura) ve a su mamá con un ángulo de elevación θ (altura de la madre 1.5 m) a una distancia de 4 m en la dirección O37°S, luego ve a su papá con un ángulo de elevación α (altura 2 m) en la dirección E53°S y por último la madre ve al padre con un ángulo de elevación ϕ en la dirección E8°S. Calcule $\cot\theta + \cot\alpha + \cot\phi$.

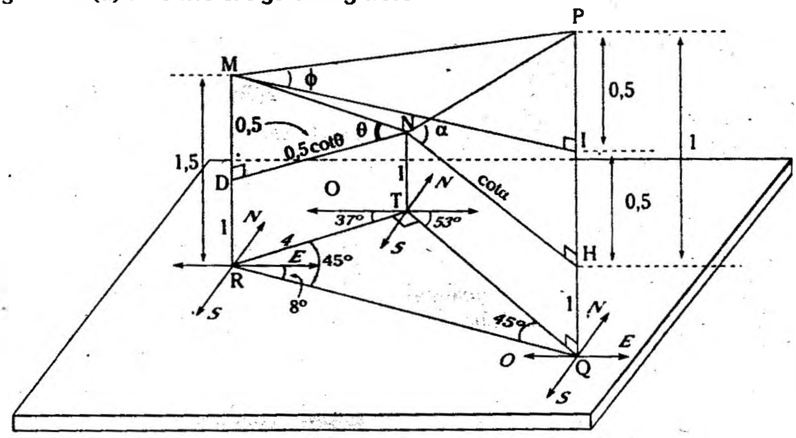
Resolución

Del enunciado, tenemos el siguiente esquema



(a)

Ahora de la figura 2.76(a) tenemos el siguiente gráfico



(b)

Figura 2.76

Datos

TN=1m; RM=1,5 m y QP=2 m y RT=4 m

por resolución de triángulos rectángulos tenemos

DN= $0{,}5\cot\theta$; NH = $\cot\alpha$; MI=$0{,}5\cot\phi$

De la figura

$\triangle$RTQ(notable(45° ; 45°))

Entonces

$\underbrace{TQ}=4 \ \wedge \ RQ=4\sqrt{2} \ \wedge \ \underbrace{RT}=4$

$\Rightarrow \underbrace{NH}=4 \ \wedge \ \underbrace{MI}=4\sqrt{2} \ \wedge \ \underbrace{DM}=4$

$\cot\alpha \qquad 0{,}5\cot\phi=4\sqrt{2} \qquad 0{,}5\cot\theta=4$

$\therefore \ \cot\alpha=4 \ \wedge \ \cot\phi=8\sqrt{2} \ \wedge \ \cot\theta=8$

Finalmente

$$\cot\theta+\cot\alpha+\cot\phi=8+4+8\sqrt{2}$$

$$\therefore \cot\theta+\cot\alpha+\cot\phi=12+8\sqrt{2}$$

Problemas Propuestos

1. En un triángulo ABC(recto en C) se cumple que la suma de tangentes de los ángulos A y B es 4 veces la longitud de la hipotenusa. Calcule $E=b\,\text{sen}A+a\cos A$

A) 1/2 B) 1 C) 1/5
D) 2/5 E) 3/5

2. En un triángulo ABC(recto en C) se cumple que $\dfrac{\tan A}{\tan B}=8$. Calcule $K=\sqrt{2}\cot B-9\cos A$

A) 0 B) 1 C) 2
D) 3 E) $3\sqrt{2}$

3. En un triángulo ABC(C=90°)

se cumple que $\tan A=\dfrac{2+\cot\frac{B}{2}}{4+\cot\frac{A}{2}}$

Calcule $T=\dfrac{\sec^2 B-\cot A}{4+\csc^2 A}$

A) 1 B) 1/2 C) 1/3
D) 1/5 E) 2

4. Si $\csc 4x=2{,}6;\ 0<x<\dfrac{\pi}{8}$

Determine el valor de $3\cot\left(\dfrac{\pi}{8}+x\right)-2$

A) $\sqrt{7}$ B) $\sqrt{10}$ C) $\sqrt{13}$
D) $2\sqrt{5}$ E) $\sqrt{26}$

5. Sabiendo que se cumple
$\text{sen}(x+13°)\sec(y+17°)=1$ .... (1)

$\dfrac{\tan(x+14°)}{\tan(2y+14°)}=1$ .... (2)

Siendo x e y ángulos agudos calcule

$$N=2\sec 2x.\text{sen}\frac{y}{2}+\tan^2(x+y)$$

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

6. Si $\tan(2x+7°)=\cot(4x+35°)$

Halle $E=\dfrac{\text{sen}(3x+6°)+\cos(6x-11°)}{\text{sen}(4x+5°)+\cos(6x+12°)}$

A) $\sqrt{3}+1$ B) $\sqrt{3}$ C) 5/6
D) 10/11 E) 13/11

7. Si $\text{sen}x\sec y=1$, además x e y son ángulos agudos

Halle: $\omega=\tan\left(\dfrac{x+y}{2}\right)\cot\left(\dfrac{x+y}{3}\right)\tan x\tan y$

A) 1 B) 1/2 C) $\sqrt{3}$
D) $\sqrt{3}/2$ E) $\sqrt{3}/3$

8. Siendo

$\tan\left(\dfrac{\pi}{6}-\text{sen}2x\right)-\cot\left[\dfrac{\pi}{3}+\cos(3x-10°)\right]=0$

además $0°<x<90°$

Determine el valor de

$A=\tan\dfrac{3x}{4}+\cot\dfrac{3x}{4}+\sec 3x$

A) 2 B) 4 C) 6
D) $4+2\sqrt{3}$ E) $2+2\sqrt{3}$

9. Sabiendo que

$\text{sen}(20°-x)\tan\left(\dfrac{x}{2}+38°\right)=\cos(x+70°)$

Además $0°<x<90°$, calcule el valor aproximado de $N=\cot\dfrac{x}{2}-\csc x$

A) 0 B) 1 C) 2
D) 3 E) 4

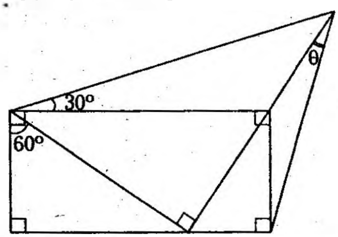
10. Siendo

$$\operatorname{sen}\left(\tan\frac{\pi}{3}\right)\csc(2\cos(x-9^\circ))=1$$

además $0^\circ<x<90^\circ$, el valor de x es

A) 31° B) 39° C) 42°
D) 49° E) 51°

11. Del gráfico adjunto, calcule
$M=3\cot\theta-11\tan\theta$

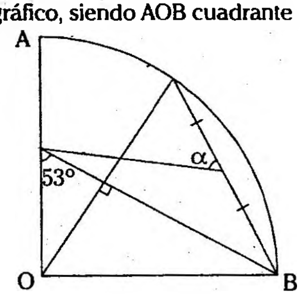


A) $4\sqrt{3}$ B) $8\sqrt{3}$ C) $10\sqrt{3}$
D) $11\sqrt{3}$ E) $5\sqrt{3}$

12. En un triángulo ABC (recto en B) se traza la mediana BD (D en AC), en el triángulo ABD se traza la altura AH (H en BD), en AH se toma el punto medio M tal que $m\measuredangle MCB=\alpha$, halle $\cot\alpha$ si $m\measuredangle BCA=30^\circ$

A) $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ B) $\frac{7\sqrt{3}}{4}$ C) $\frac{7}{5}$
D) $\frac{5\sqrt{3}}{7}$ E) $\frac{7\sqrt{3}}{5}$

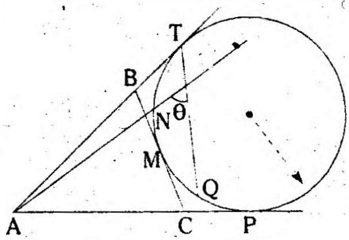
13. Del gráfico, siendo AOB cuadrante



halle $\tan\alpha$.

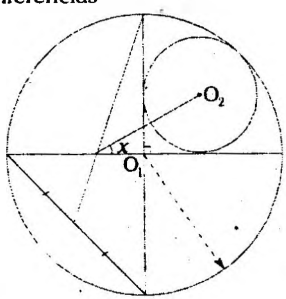
A) 5/6 B) 4/7 C) 6/5
D) 7/3 E) 3/7

14. Del gráfico mostrado, halle $\cot\theta$, si ABC es un triángulo equilátero. Además T, M y P son puntos de tangencia. Siendo $\overset{\frown}{TN}=\overset{\frown}{MQ}=\overset{\frown}{QP}$



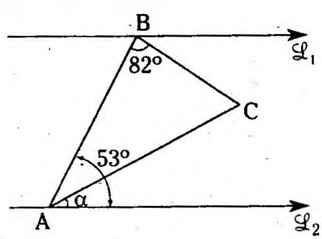
A) $\sqrt{3}-1$ B) $3(2-\sqrt{3})$ C) $5+3\sqrt{3}$
D) $2-\sqrt{3}$ E) $2+3\sqrt{3}$

15. A partir del gráfico mostrado, calcule $(3\cot x-4)^2$, siendo O_1 y O_2 centros de las circunferencias



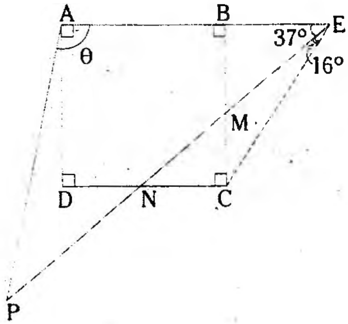
A) 4 B) 1 C) 2
D) 5 E) 8

16. Del gráfico mostrado, calcule $7\tan\alpha+7\sqrt{2}$, siendo $\overrightarrow{\mathscr{L}_1}//\overrightarrow{\mathscr{L}_2}$.
Además 2AB = 5BC



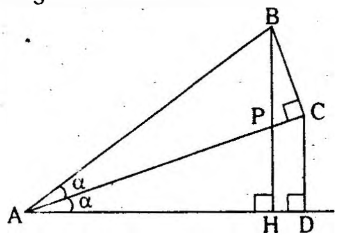
A) 11 B) 12 C) 13
D) 14 E) 15

17. Del gráfico, calcule el valor de $8\tan\theta+69$, siendo ABCD un cuadrado y PN = MN



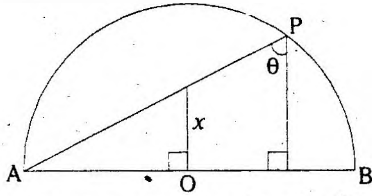
A) 1 B) −1 C) 0
D) 2 E) −2

18. En la figura AC=m. Halle BH − 2PH



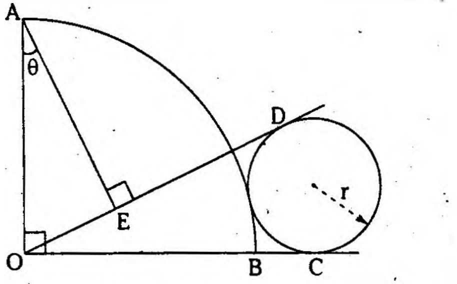
A) $2m\cos\alpha\tan^2\alpha$ B) $m\cos2\alpha$
C) $2m\,\text{sen}\,\alpha\tan^2\alpha$
D) $m\,\text{sen}2\alpha$ E) $m\,\text{sen}\,\alpha\cos\alpha$

19. Del gráfico mostrado, halle x en términos de θ y d. Siendo O centro de la semicircunferencia, además AP=d



A) $d\sec\theta\tan\theta$ B) $d\sec\theta\tan^2\theta$
C) $\frac{d}{2}\sec\theta\tan\theta$
D) $\frac{d}{2}\csc\theta\cot^2\theta$ E) $\frac{d}{2}\csc\theta\cot\theta$

20. Dado el sector circular AOB, C y D puntos de tangencia. Halle AE en términos de θ y r.

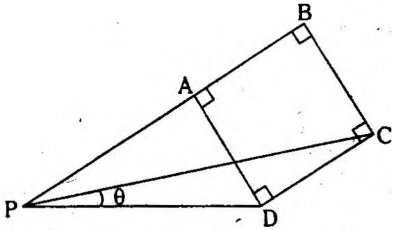


A) $r\cos\theta\left(\csc\frac{\theta}{2}-1\right)$ B) $r\cos\theta\left(\csc\frac{\theta}{2}+1\right)$

C) $r\,\text{sen}\theta\left(\sec\frac{\theta}{2}-1\right)$

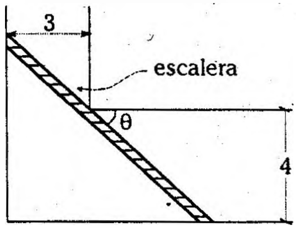
D) $r\,\text{sen}\theta\left(\sec\frac{\theta}{2}+1\right)$ E) $r\,\text{sen}\frac{\theta}{2}\left(\sec\frac{\theta}{2}-1\right)$

21. Del gráfico mostrado, halle $\cot\theta$ en términos de α, si AB=BC y $\alpha = m\sphericalangle APD$



A) $\cot\alpha+\csc^2\alpha$ B) $\cot^2\alpha-\csc\alpha$
C) $\cot^2\alpha-\csc\alpha$
D) $\tan\alpha+\sec\alpha$ E) $\tan\alpha+\sec^2\alpha$

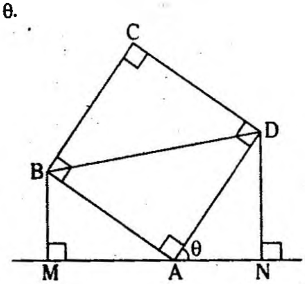
22. Se desea dar la vuelta en una esquina una escalera de longitud L, en posición horizontal (ver figura), entre un corredor de 3 m de ancho a otro de 4 m de ancho.



Exprese L como función de θ.
Halle la máxima longitud de la escalera que pueda pasar por dicha esquina.

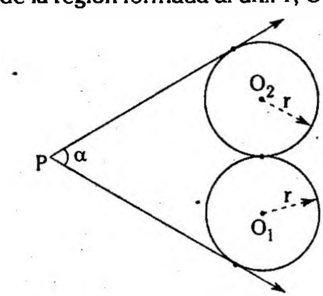
A) $3\sec\theta+4\csc\theta$ 9,87 m
B) $3\csc\theta+4\csc\theta$ 8,96 m
C) $3\sec\theta+4\csc\theta$ 8,96 m
D) $3\sec\theta+4\csc\theta$ 9,79 m
E) $3\sec\theta+4\csc\theta$ 9,77 m

23. Siendo ABCD un cuadrado de lado ℓ, halle la mediana del trapecio MBDN, en términos de ℓ y θ.



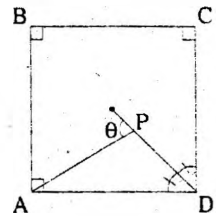
A) $\frac{\ell}{2}\operatorname{sen}\theta\cos\theta$
B) $\frac{\ell}{2}(\sec\theta-\cos\theta)$
C) $\frac{\ell}{2}(\operatorname{sen}\theta-\cos\theta)$
D) $\frac{\ell}{2}(\sec\theta-\csc\theta)$
E) $\frac{\ell}{2}(\operatorname{sen}\theta+\cos\theta)$

24. En la siguiente figura, PQ=PR ¿cuál es el área de la región formada al unir P, O_1 y O_2?



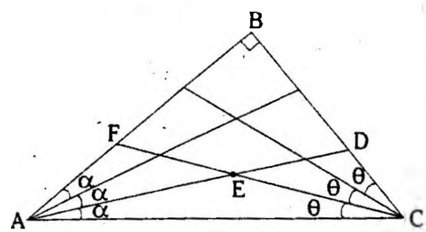
A) $r^2\cot\frac{\alpha}{2}$
B) $r^2\cot\frac{\alpha}{4}$
C) $r^2\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}.\cot\frac{\alpha}{4}$
D) $r^2\csc^2\frac{\alpha}{4}$
E) $r^2\operatorname{sen}^2\frac{\alpha}{2}\tan\frac{\alpha}{4}$

25. Del gráfico mostrada, ABCD es un cuadrado, además $\frac{AD}{DP}=\frac{3}{\sqrt{2}}$, calcule $(\sec^2\theta-1)^2+(\csc^2\theta-1)^2$



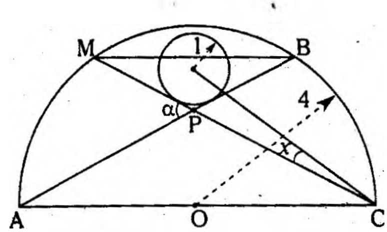
A) 6500/81
B) 6551/81
C) 6562/81
D) 6601/27
E) 6611/27

26. Del gráfico, se tiene que AE=2; EC= $2\sqrt{3}$ calcule $K=3\sqrt{3}\tan\theta+5\tan\alpha$



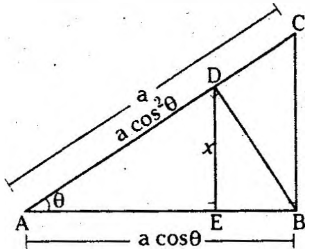
A) 1
B) $\sqrt{3}$
C) $1+\sqrt{3}$
D) $2+\sqrt{3}$
E) $3\sqrt{3}$

27. En el gráfico mostrada, exprese $\cot x$ en términos de α, siendo MP=BP



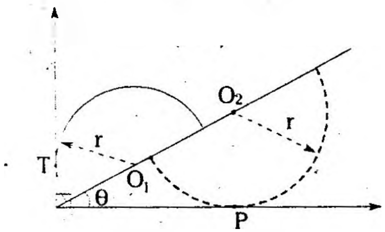
A) $2\tan\frac{\alpha}{2}+\cot\frac{\alpha}{2}$
B) $4\sec\frac{\alpha}{2}+\tan\frac{\alpha}{2}$
C) $4\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{\alpha}{2}$
D) $4\csc\frac{\alpha}{2}+\tan\frac{\alpha}{2}$
E) $2\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}+\cot\frac{\alpha}{2}$

28. Del gráfico, halle x en términos de a y θ



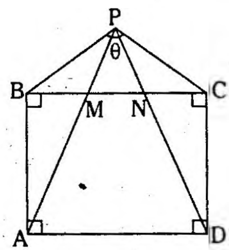
A) $a\,\mathrm{sen}^2\theta\cos\theta$
B) $a\,\mathrm{sen}\theta\cos^2\theta$
C) $a\cos^3\theta$
D) $a\,\mathrm{sen}^2\theta\cos^2\theta$
E) $a\,\mathrm{sen}^3\theta$

29. Del gráfico mostrado, halle O_1O_2 en términos de θ y r, siendo O_1 y O_2 centros; P y T puntos de tangencia.



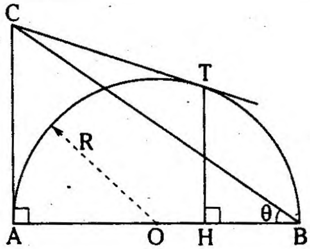
A) $r(\mathrm{sen}\theta-\cos\theta)$
B) $r(\cos\theta-\mathrm{sen}\theta)$
C) $r(\cos\theta-\mathrm{sen}\theta)$
D) $r(\csc\theta-\sec\theta)$
E) $r(\sec\theta-\csc\theta)$

30. En la siguiente figura, halle $\mathrm{sen}\theta$ si ABCD es un cuadrado. Además BM = NC = 2MN = 2



A) 1/2
B) 3/5
C) 4/5
D) $\sqrt{3}/2$
E) 6/5

31. Del gráfico mostrado, halle TH en términos de R y θ



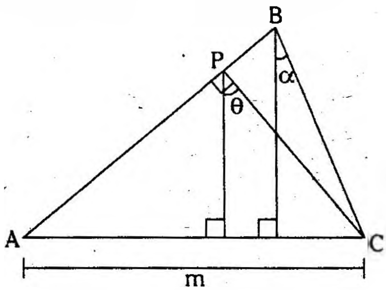
A) $\dfrac{2R}{4\cot\theta+\tan\theta}$
B) $\dfrac{R}{2\cot\theta+\tan\theta}$
C) $\dfrac{4R}{4\tan\theta+\cot\theta}$
D) $\dfrac{2R}{3\cot\theta+\tan\theta}$
E) $\dfrac{2R}{2\tan\theta+\cot\theta}$

32. Halle el ángulo ϕ agudo tal que se verifique

$$\cot\phi=\frac{\sqrt{3}\cos20^\circ}{2+\sqrt{3}\cos10^\circ+\cos40^\circ}$$

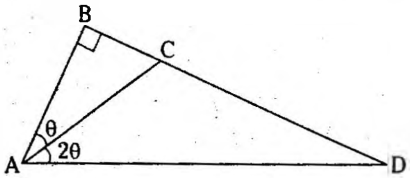
A) 30°
B) 70°
C) 40°
D) 60°
E) 50°

33. Del gráfico mostrado, halle la longitud del segmento PB en términos de m, θ y α



A) $m\,\mathrm{sen}\theta\tan(\theta-\alpha)$
B) $m\,\mathrm{sen}\theta\cot(\theta-\alpha)$
C) $m\cos\theta\tan(\theta-\alpha)$
D) $m\cos\theta\cot(\theta-\alpha)$
E) $m(\tan\theta-\cot\alpha)$

34. Del gráfico adjunto, calcule $\dfrac{\text{sen}\,2\theta}{\cos\theta\cos3\theta}$, además se tiene que $3CD=7AB$

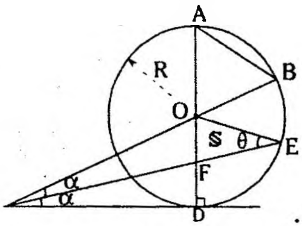


A) 7/3 B) 3/7 C) 3/4
D) 3/5 E) 3/10

35. Del gráfico mostrado, determine

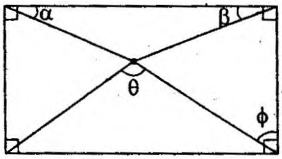
$$K=\frac{\text{sen}(105^\circ-\theta)}{4+2\sqrt{3}}$$

En términos de R y $\mathbb{S}$ siendo AB=OB
($\mathbb{S}$: Área de la región triangular OEF)



A) $\mathbb{S}/R^2$ B) $2\mathbb{S}/R^2$ C) $4\mathbb{S}/R^2$
D) $\mathbb{S}/4R^2$ E) $\mathbb{S}/2R^2$

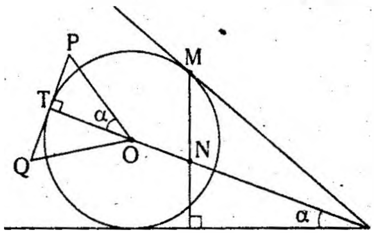
36. Del gráfico, calcule $\text{sen}\,\theta$ si $\cot\alpha=8$, $\cot\beta=5$ y $\tan\phi=\dfrac{\sqrt{5}}{4}$



A) $\dfrac{13\sqrt{21}}{63}$ B) $\dfrac{13\sqrt{21}}{21}$ C) $\dfrac{13\sqrt{21}}{27}$

D) $\dfrac{16\sqrt{21}}{63}$ E) $\dfrac{16\sqrt{21}}{21}$

37. Del gráfico, halle PQ, si MN=m; además PT=TQ
O: centro de la circunferencia



A) $2m\,\text{sen}\,\alpha\cos\alpha$
B) $2m\cos\alpha$
C) $2m\,\text{sen}\,\alpha$
D) $2m\cot\alpha$
E) $2m\tan\alpha$

38. Se traza perpendiculares desde los vértices A, B y C de un triángulo acutángulo a sus lados opuestos y se prolongan hasta que cortan a la circunferencia circunscrita. Si las prolongaciones miden m, n y p, respectivamente, determine

$$\frac{a}{m}+\frac{b}{n}+\frac{c}{p}$$

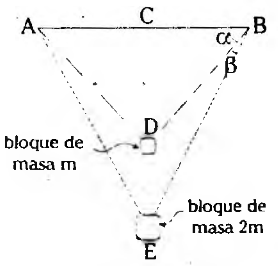
en términos de ángulos internos del triángulo ABC. Siendo a, b, c los lados del triángulo ABC respectivamente.

A) tanA+2tanB+tanC
B) 2(tanA+tanB+tanC)
C) 2(cotA+cotB+cotC)
D) cotA+cotB+cotC
E) secA secB secC

39. Dado un triángulo isósceles ABC (B=90°) y un punto interior P, tal que AP=1; PB=2; CP=3. Calcule el área de la región triangular APC.

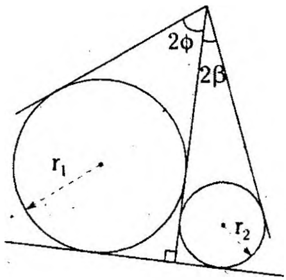
A) 1 u^2 B) 0,5 u^2 C) 2 u^2
D) 2,5 u^2 E) 3 u^2

40. Una goma elástica está sujeta, sin estirarla, a los puntos A y B que distan 4 m. La goma está situada en el segmento AB. La longitud final de la goma es proporcional al peso que soporta. Del centro C de la goma se cuelga un peso y el centro pasa a ocupar la posición D. Si se aplica el doble del peso del centro, éste pasa a ocupar la posición E. Sabiendo que el ángulo $\alpha = 60°$, halle el ángulo β, sen14,5°=0,25.



A) 14,5° B) 15,5° C) 18°
D) 17° E) 25°

41. Del gráfico, halle $M = \frac{r_1 - r_2}{r_2}$ en términos de ϕ y β



A) $\frac{1+\cot\beta}{1+\cot\phi}$ B) $\frac{\cot\beta-\cot\phi}{1+\cot\phi}$

C) $\frac{\cot\phi-\cot\beta}{\cot\phi}$

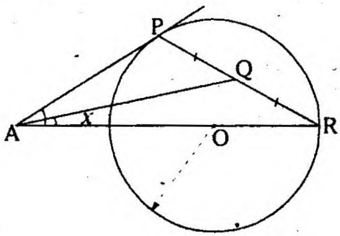
D) $\frac{1-\cot\beta}{1-\cot\phi}$ E) $\tan\beta+\tan\phi$

42. En un triángulo ABC las medianas relativas a los lados a y b se cortan perpendicularmente. Halle el menor valor de k si se verifica

$$\frac{\tan A \tan B}{\tan A+\tan B} \leq k$$

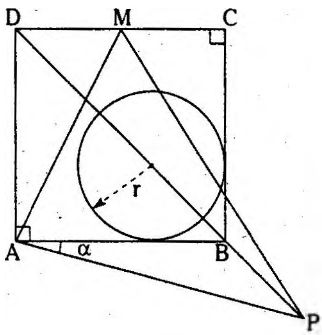
A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{2}{3}$
D) $\frac{4}{3}$ E) $\frac{3}{2}$

43. Del gráfico adjunto, halle $\tan x$, si m∢PAO=37°



A) $\frac{3}{7}$ B) $\frac{1}{8}$ C) $\frac{1}{2}$
D) $\frac{3}{14}$ E) $\frac{14}{23}$

44. Del gráfico mostrado, halle $\frac{r}{\ell}$ siendo ABCD un cuadrado de lado ℓ m∢APM=45° y $\tan\alpha = \frac{1}{5}$

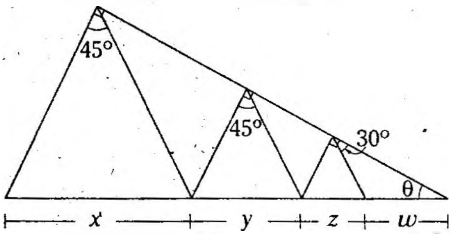


A) 1/4 B) 2/7 C) 3/7
D) 3/5 E) 1/8

45. En un triángulo ABC, la recta que une el ortocentro y el baricentro es paralelo al lado $\overline{AC}$. Halle $\tan A \tan C$

A) $\frac{1}{3}$ B) 3 C) $\frac{2}{5}$
D) $\frac{3}{8}$ E) 4

46. Del gráfico, halle $\dfrac{y+2z+5w}{x+y+\sqrt{3}z}$

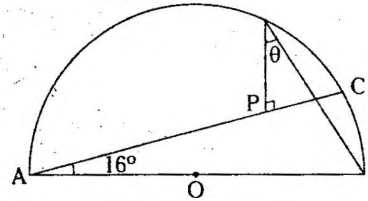


A) $\operatorname{sen}\theta$ B) $\cos\theta$ C) $\tan\theta$
D) $\cot\theta$ E) $\sec\theta$

47. Del gráfico, halle el valor que toma

$$M=40\tan\theta+7$$

si AP=5PC y O es centro.



A) $3\sqrt{41}$ B) $3\sqrt{43}$ C) $3\sqrt{47}$
D) $3\sqrt{51}$ E) $3\sqrt{53}$

48. En un triángulo ABC, determine el perímetro mínimo si las medidas de sus lados son cantidades enteras, siendo

$m\measuredangle BCA=2m\measuredangle BAC$ además $B>90°$

A) 75 B) 76 C) 77
D) 78 E) 79

49. Un poste vertical de $4\sqrt{3}$ m se encuentra sujeto a una cuerda tensa de $5\sqrt{3}$ m que está atada a una estaca en el suelo. Si una persona observa la parte superior del poste con un ángulo de elevación de 53° y observa la cuerda en su totalidad con un ángulo de 30°. Halle la distancia en la que se encuentra la persona de la estaca.

A) 14 m B) 15 m C) $3\sqrt{3}$ m
D) 16 m E) $15\sqrt{3}$ m

50. Una persona observa la parte superior de un edificio de 12 m de alto con un ángulo de elevación de 37° y la parte superior de una antena que se encuentra sobre el edificio (a 4 m del filo del edificio) con un ángulo de elevación mayor en 2° al anterior. Entonces la longitud de la antena será:
(Considerar $\tan 39° = 0{,}81$).

A) 3,3 m B) 3,4 C) 4,25
D) 4,3 m E) 4,5 m

51. Un niño y dos árboles se encuentran en una misma línea. El niño, que está entre los árboles, observa las partes superiores de dichos árboles con ángulos de elevación α y 2α. Si se sabe que sus respectivas visuales miden 30 y 35 m, calcule la altura del mayor árbol, teniendo en cuenta que, si la distancia a la que se encuentra el niño de un árbol es igual a la altura del otro árbol y este último el que se opone a 2α.
(Sugerencia $\operatorname{sen}2\alpha=2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha$).

A) $\frac{60}{7}$ m B) $\frac{40}{7}$ m C) $\frac{60\sqrt{10}}{7}$ m
D) $\frac{50\sqrt{10}}{7}$ m E) $\frac{45\sqrt{10}}{7}$ m

52. La elevación de la cumbre de una montaña vista desde un punto del suelo es 45°. Caminando desde dicho punto una distancia de 30 m en un plano horizontal en dirección a la cumbre y luego otros 260 m sobre un plano ascendente cuya inclinación tiene como cotangente 2,4 respecto de la horizontal, se encuentra que la elevación de la cumbre, vista desde esta última posición es de 53°. Calcule la altura de la cumbre.

A) 780 m B) 700 m C) 680 m
D) 720 m E) 400 m

53. Un astronauta ubicado en la parte interna de un transbordador espacial observa por una de las lunas a la Tierra, generando con ella un arco de 60°. Con la finalidad de explorar el espacio decide salir de él y para ello desciende verticalmente a una cierta distancia, desde la cual observa nuevamente la Tierra bajo un ángulo de 90°. Calcule la distancia de separación entre las dos posiciones de observación, sabiendo que el radio terrestre es de 6370 km.
(Considerar $\sqrt{2}=1,41$)

A) 3600 km B) 3745 km C) 3758,30 km
D) 3750,40 km E) 3760,50 km

54. Un avión está pasando justamente sobre un barco y en ese instante ambos son observados desde un faro (que está a una distancia D del barco) con ángulos de elevación y depresión α y β, respectivamente. Si el avión recorre en línea recta una distancia x ($x<$D) en dirección al faro y el barco recorre $4x$ pero alejándose de aquel, los nuevos ángulos de elevación y depresión serán β y α. Halle x/D
Nota: todo se realiza en un mismo plano.

A) $\dfrac{\tan\beta-\tan\alpha}{4\cot\alpha}$ B) $\dfrac{\tan\beta+\tan\alpha}{2\tan\alpha}$
C) $\dfrac{\operatorname{sen}\alpha-\operatorname{sen}\beta}{\cos\alpha}$
D) $\dfrac{1+\tan\alpha\tan\beta}{2\cot\alpha}$ E) $\dfrac{\tan\beta-\tan\alpha}{4\tan\alpha}$

55. Una persona A se encuentra en la dirección Este con respecto a la persona B. Si la persona B se desplaza en la dirección $N\frac{1}{4}NE$ y la persona A en la dirección NNO, ambos se encuentran en el punto P. Calcule la medida del menor ángulo que forman estas direcciones.

A) 32°30' B) 33°45' C) 22°30'
D) 37°30' E) 30°45'

56. Un barco navega en forma circular alrededor de una pequeña isla en sentido antihorario a una velocidad V_2 desde una isla se decide interceptar el barco con otro que se dirige hacia el NO a una velocidad constante V_1, y logra interceptarlo. Halle el rumbo en el cual se encontraba el primer barco al salir el otro en su búsqueda.

Además $\dfrac{V_2}{V_1}=\dfrac{22}{21}$ $\left(\text{considerar } \pi=\dfrac{22}{7}\right)$

A) N 30°E B) N15°O C) N 45°O
D) N15°E E) N45°E

57. A 16 km al Este de una estación de tren se encuentra una ciudad A (las vías del tren van de Sur a Norte). Además una ciudad B se encuentra a 6 km de las vías del tren y en el rumbo $N\alpha E$ con respecto a la estación $(\tan\alpha=0,3)$. Halle el punto al cual debe llegar un móvil que parte de A llegando a las vías del tren y dirigiéndose a B, (el móvil sigue la ruta más corta). Calcule la distancia de dicho punto a la estación.

A) 16 m B) $\dfrac{160}{11}$m C) $\dfrac{110}{13}$m
D) $\dfrac{150}{11}$m E) $\dfrac{170}{13}$m

58. Desde 2 puntos A y B situados al Oeste y al Norte de una torre, se observa la parte más alta de esta con ángulos de elevación α y β respectivamente, y desde el punto medio entre A y B, el ángulo de elevación es α. Halle $\tan\alpha \cot\beta$

A) $\sqrt{3}$ B) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ C) 1

D) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ E) 2

59. Dos fortalezas de observación de un puerto (de la misma altura), están separadas una cierta distancia, exactamente sobre la dirección Este–Oeste. Desde la base de una de ellas se observa un barco exactamente en la dirección Sur y desde la otra se observa en la dirección $\theta°$ hacia el Este del Sur y en ese mismo instante (desde el barco) se aprecia la parte más alta de las fortalezas con ángulos de elevación α y β, respectivamente.
Halle $\tan\alpha \cot\beta$ en términos de θ.

A) $\cos\theta$ B) $\sec\theta$ C) $\operatorname{sen}\theta$
D) $\csc\theta$ E) $\cot\theta$

60. Se tiene una paloma situada a 20 m al Norte de un cazador y al mismo nivel. La paloma alza vuelo y sigue una dirección de N37°E con ángulo de elevación de 45°. Cuando la paloma alcanza una altura de 50 m recibe el impacto de un proyectil disparado por el cazador. Halle la tangente del ángulo de inclinación con que sale el proyectil.

A) $\frac{\sqrt{5}}{3}$ B) $\frac{\sqrt{10}}{3}$ C) $\frac{\sqrt{10}}{5}$

D) $\frac{\sqrt{10}}{6}$ E) $\sqrt{5}$

61. Un ave se encuentra al Sur de un árbol de 5 m de altura y al SE de un árbol de 10 m de altura que se encuentra al Oeste del anterior. Halle el menor espacio en vuelo que debe seguir el ave hasta ubicarse en la parte superior del otro árbol, a partir del cual se observa con un ángulo de depresión de $\frac{53°}{2}$ la parte superior del otro árbol. (considere que el ave se encuentra sobre la superficie)

A) $10\sqrt{2}$m B) 10 m C) $10\sqrt{3}$m
D) 20 m E) 12 m

62. Desde la parte superior de una torre de altura 5 m una persona observa la parte superior de otra torre de 6 m de altura ubicada en la dirección NE con un ángulo de elevación α, también la parte superior de otra torre que está en el rumbo S75°E y de altura de 2 m con un ángulo de depresión β. Si desde la parte superior de la torre menor se observa al NO la parte superior de la torre mayor con un ángulo de elevación θ. Calcule $\cot^2\alpha \tan\beta\tan\theta$

A) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ B) $2\sqrt{3}$ C) $\sqrt{3}$

D) $2\sqrt{2}$ E) $4\sqrt{3}$

63. La ladera de una colina se orienta hacia el norte, y está inclinada respeto al plano horizontal un ángulo θ, una vía recta ferroviaria sobre ella está inclinada un ángulo ϕ respecto al plano horizontal, si la orientación de la vía es β grados al oeste del norte, luego podemos afirmar que:

A) $\cos\theta = \sec\phi\cot\beta$

B) $\sec\theta = \tan\phi\cot\beta$

C) $\cos\beta = \tan\theta\cot\phi$

D) $\sec\beta\cot\theta = \cot\phi$

E) $\sec\theta = \cot\phi\tan\beta$

64. Una persona que se encuentra al sur y a una cierta distancia de una torre, observa la parte superior de esta con un ángulo de elevación ϕ y al desplazarse hacia el este y encontrándose en la dirección SE con respecto a la torre, observa nuevamente la parte superior con un ángulo de elevación complementario de ϕ. Calcule $\tan\phi$.

A) $\sqrt[4]{2}$ B) $\sqrt[4]{3}$ C) $\sqrt{3}$
D) $4\sqrt{5}$ E) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

65. En una de las orillas de un río hay un edificio de 42 m de altura, sobre el que se apoya una antena de transmisión de 14 m de altura. Halle la anchura del río sabiendo que desde un punto A, situado en la orilla opuesta frente al edificio, se ve a la antena de transmisión con el mismo ángulo que se vería otra antena de 6 m situada delante del edificio mencionado.

A) 42 m B) 40 m C) 38 m
D) 60 m E) 76 m

66. Desde el pie de un poste, el ángulo de elevación de la punta de un campanario es 26° 30', desde la parte superior del poste, que tiene 10 m de altura, el ángulo de elevación es de 18°30', halle la separación entre el poste y el campanario.

A) 30 m B) 60 m C) 50 m
D) 42 m E) 45 m

67. Observando la Luna con un telescopio se ha visto que cuando el Sol está a 38°40' sobre el horizonte de la Luna, la longitud de la sombra que proyecta una determinada montaña de la Luna es de 2 km. ¿Cuál será la altura de la montaña? Dato: cot38°40'=1,25

A) 2 km B) 1,8 km C) 1,6 km
D) 1,2 km E) 1,15 km

68. Se tiene los siguientes puntos colineales, A, B, C y D los cuales están ubicados, en la superficie horizontal, desde donde se divisan lo alto de un poste vertical de alumbrado público $\overline{PQ}$ (P en el suelo) con ángulo de elevación α,β,θ y γ respectivamente. Si $\overline{AP}\perp\overline{PC}$, $\overline{BP}\perp\overline{PD}$, además BP y PC son bisectrices de los ángulos APC y BPD. Calcule

$$R=\frac{\tan^2\theta-\tan^2\beta}{\tan\alpha\tan\theta-\tan\beta\tan\gamma}$$

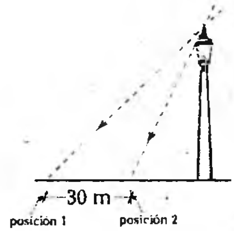
A) 1 B) 2 C) –1
D) –2 E) 0

69. Un proyectil cae con un ángulo de inclinación α por debajo de la horizonal, de este a oeste, un observador ubicado en Tierra observa el proyectil en dirección NE y luego de cierto instante hacia el norte con el mismo ángulo de elevación β. Calcule $L=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{\tan\beta}$

A) $\sqrt{2}+1$ B) $\sqrt{2}$ C) $\sqrt{3}$
D) $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ E) $\sqrt{2}-1$

70. Una persona de 1,8 m de estatura se muestra al sur de un faro donde observa la proyección de su sombra de 7,2 m de longitud y caminando en dirección norte observa nuevamente su sombra es de 9 m de longitud. Calcule la altura del faro.

A) 45,2 m
B) 30 m
C) 37,4 m
D) 41,8 m
E) 31,8 m



71. Dos aviones que vuelan a una misma altura de 300 m, en trayectorias perpendiculares, tienen como objetivo disparar misiles simultáneamente para dar a un mismo blanco. En el instante en que uno de ellos dispara un misil, al observar con un ángulo de depresión de 45° ambos aviones están separados 500 m. ¿Cuál debe ser la medida del ángulo de depresión con el que observa el otro avión al blanco para lograr su objetivo?

A) 45° B) 37° C) 24°
D) 53° E) 14°

N°	Clave	N°	Clave	N°	Clave	N°	Clave	N°	Clave
1	A	15	C	29	D	44	E	58	A
2	B	16	D	30	C	45	B	59	B
3	B	17	C	31	C	46	D	60	A
4	C	18	C	32	B	47	A	61	C
5	E	19	E	33	A	48	C	62	B
6	E	20	A	34	A	49	B	63	C
7	C	21	A	35	E	50	E	64	A
8	C	22	D	36	A	51	C	65	A
9	E	23	E	37	E	52	A	66	B
10	B	24	B	38	B	53	C	67	C
11	C	25	C	39	B	54	E	68	C
12	E	26	C	40	B	55	B	69	B
13	A	27	B	41	B	56	E	70	B
14	B	28	B	42	E	57	B	71	B
				43	D				

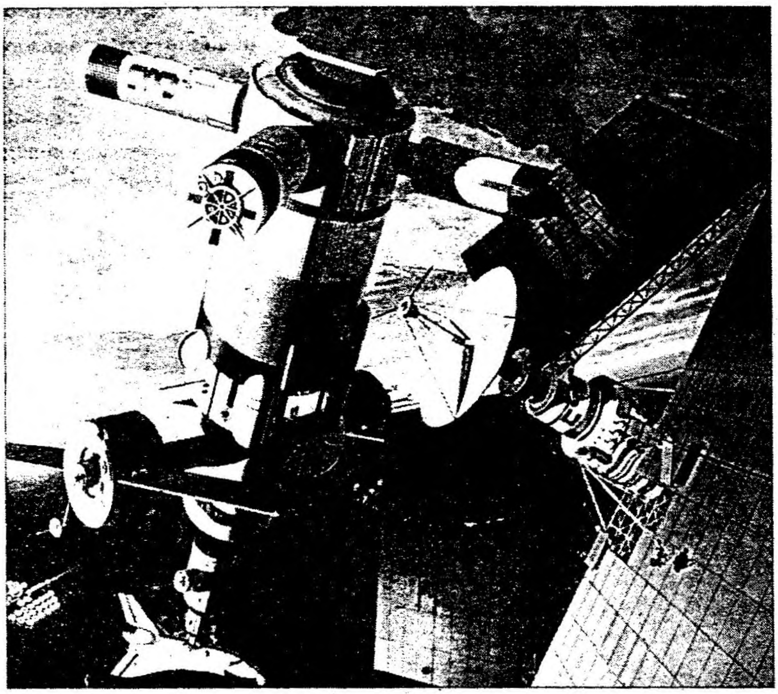
Claves

CAPÍTULO

III

Razones trigonométricas de un ángulo en posición normal

TRIGONOMETRÍA



Posición y sistemas espaciales

Para que una estación espacial realice sus funciones, sus partes deben acoplarse de manera estándar, porque sino su funcionamiento no sería óptimo. En el caso de los ángulos trigonométricos, para calcular sus razones trigonométricas éstos deben hallarse también en una forma adecuada, es decir deben encontrarse en posición normal (estándar).

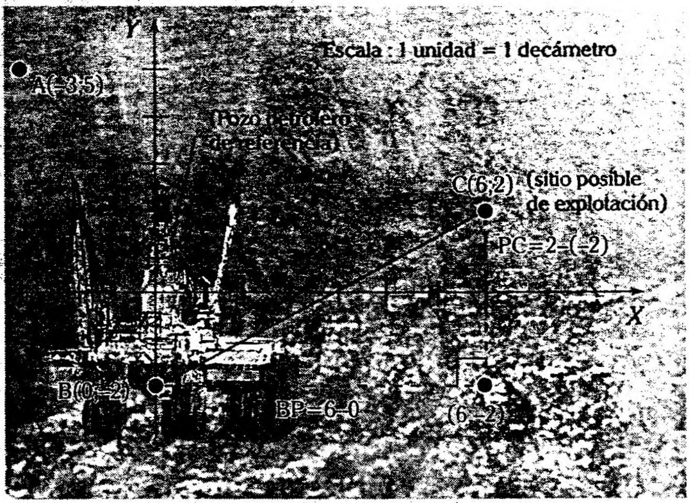
LECTURA

DESCARTES Y LA GEOMETRÍA ANALÍTICA

René Descartes (1596 – 1650) matemático, filósofo y físico francés, fue uno de los creadores de la Geometría Analítica, disciplina que combina fundamentos del Álgebra y la Geometría. Dicha ciencia ofrece un sistema de referencia ortogonal, es decir dos ejes perpendiculares graduados, usados para la realización de cálculos matemáticos.

La idea de asociar a los puntos del plano una abscisa y una ordenada, y luego traducir los datos geométricos en una ecuación, fue sin duda muy trascendental, tanto así que esta concepción no tardó en propagarse hacia toda la Geometría, mucho más allá de lo que había imaginado Descartes, quien sólo veía en ella un aspecto secundario.

Una aplicación del sistema de coordenadas la encontramos en la Geología; cuando se tiene que representar gráficamente los sitios de exploración de petróleo cercanos a la costa. Observe en la figura el pozo petrolero de referencia y la ubicación del posible sitio de explotación respecto de dicha referencia.



La explotación del petróleo es, en la actualidad, una actividad económica fundamental. Los geólogos utilizan herramientas matemáticas, como el sistema de coordenadas, para representar con mayor precisión las zonas de explotación del hidrocarburo.

Razones trigonométricas de un ángulo en posición normal

OBJETIVOS

- Estudiar el sistema de coordenadas rectangulares y sus aplicaciones en la geometría analítica.
- Reconocer los ángulos trigonométricos en posición normal.
- Definir las razones trigonométricas de ángulos en posición normal.

INTRODUCCIÓN

Hasta el momento hemos estudiado las razones trigonométricas de un ángulo agudo (ángulos positivos menores que 90°). Sin embargo, las razones trigonométricas se pueden determinar para todo tipo de ángulo, sea positivo o negativo; por ello, en el presente capítulo trataremos sobre las razones trigonométricas de ángulos en posición normal, para lo cual requerimos de un sistema referencial (llamado sistema de coordenadas cartesianas) que nos permita definir, a partir de la ubicación del lado final de un ángulo, sus respectivas razones trigonométricas.

Para entender con mayor claridad la utilidad del sistema cartesiano en la resolución de problemas de matemática e ingeniería, debemos conocer previamente lo que es una recta numérica así como conocer el conjunto de números reales y los diversos axiomas que condicionan la existencia de dicho conjunto. Es por ello que se plantean y desarrollan diversos ejercicios de modo que el lector pueda comprender y utilizar dichas herramientas en los capítulos posteriores de circunferencia trigonométrica, funciones, ecuaciones, etc.

Efectivamente es necesario entender que el hombre aprendió primero a contar y luego representó gráficamente los números. En la actualidad sabemos que desde los primeros grados escolares se enseña el proceso de conteo. Desde el sencillo conteo con los dedos se ha pasado a las modernas computadoras que permiten obtener datos numéricos con mayor rapidez y precisión que los proporcionados por el cerebro humano.

Asimismo, es muy importante ubicar los puntos en un sistema de coordenadas rectangulares ya que tiene muchas aplicaciones en ingeniería, astronomía, etc. Existe también otros sistemas de referencia, como el sistema de coordenadas polares.

INTRODUCCIÓN A LAS DESIGUALDADES

Para comprender de mejor manera los capítulos siguientes es importante familiarizarse con las propiedades y teoremas aplicados a los números reales. Para ello, mostramos a continuación algunos alcances de gran utilidad.

Un número real se puede clasificar como **racional** (Q) e **irracional** (Q'). Un número racional es cualquier número de la forma a/b, donde a y b son enteros y $b \neq 0$.

Los números racionales comprenden

I. Los enteros (positivos, negativos y cero).

$$Z = \{...-5\,;\ -4\,;-3\,;-2\,;-1\,;0\,;1\,;2\,;3\,;4\,;5\,;...\}$$

II. Las fracciones positivas y negativas, tales como

$$-\frac{3}{2}\,;\ \frac{1}{2}\,;\ \frac{3}{7}$$

III. Los decimales conmensurables positivos y negativos, tales como

$$1{,}57 = \frac{157}{100} \quad ; \quad -0{,}01416 = \frac{-1416}{100000}$$

IV. Los decimales inconmensurables periódicos positivos y negativos, tales como

$$0{,}333\ldots = \frac{1}{3} \quad ; \quad -0{,}449449449\ldots = \frac{-449}{999}$$

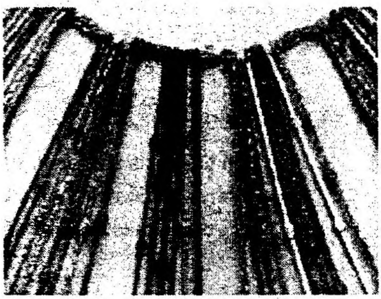


Figura 3.1

El Quipu registraba y expresaba un orden simbólico numérico según la cantidad de cuerdas y nudos que contenía, evidenciando un alto conocimiento matemático extendido en los Andes.

Los números reales que no son racionales se denominan **números irracionales**. Estos son decimales inconmensurables y no periódicos; por ejemplo

$$-\sqrt{3} = -1{,}732\ldots \quad ; \quad \sqrt{2} = 1{,}414\ldots \quad ; \quad \pi = 3{,}14159\ldots \quad ; \quad e = 2{,}7182\ldots$$

A continuación, daremos una interpretación geométrica del conjunto de número reales (R), asociándolos a los puntos de una recta llamada eje (eje de los número reales o recta numérica).

Recta Numérica

Para asociar los números reales con los puntos de una recta, primero se traza la recta, se selecciona un punto sobre ella que represente al número cero (0) y a este se le denomina origen; después se elige una unidad de distancia y dos direcciones opuestas, una positiva y otra negativa con respecto al origen. Además se hace corresponder exactamente un punto a cada número, y exactamente un número a cada punto de la recta (correspondencia biunívoca).

Comúnmente se asocia la figura de una recta numérica con una recta horizontal, pero puede ser también vertical u oblicua.

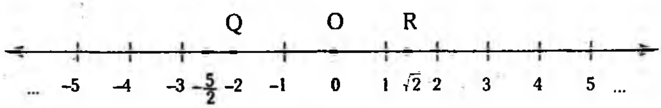


Figura 3.2

Al número real asociado a un punto sobre la recta numérica, se le denomina coordenada del punto, así en la figura 3.2 tenemos que

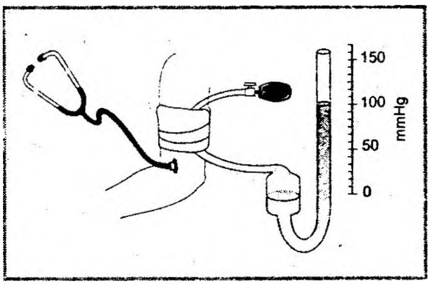
- La coordenada del punto Q es –2, se abrevia : Q(–2)
- La coordenada del punto R es $\sqrt{2}$, se abrevia : $R(\sqrt{2})$
- La coordenada del punto O es 0, se abrevia : O(0) y se denomina origen de la recta numérica.

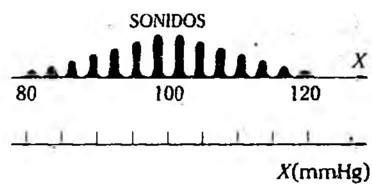
A los sistemas unidimensionales se les puede asignar una unidad de escala arbitraria, como se cita por ejemplo en la siguiente lectura, donde el sistema unidimensional tendrá como unidad de medida a 1 mmHg (un milímetro de mercurio) la cual sirve para medir la tensión arterial (fuerza ejercida por la sangre contra cualquier área de la pared vascular).

LECTURA

MEDICIÓN DE LA TENSIÓN ARTERIAL

En el hombre, la tensión arterial se mide habitualmente por **auscultación**, observe la figura. Se coloca un estetoscopio sobre la arteria humeral en el codo y se insufla un brazalete alrededor de la parte alta del brazo, que está conectado a un manómetro (que puede ser de mercurio, aneroide o electrónico).





(espectro de los ruidos de Korotkoff)

Mientras el manguito ejerce contra el brazo tan poca presión que la arteria sigue distendida por la sangre, no se perciben ruidos con el estetoscopio; pero cuando la presión en el manguito es lo suficientemente elevada para colapsar la arteria durante parte del ciclo de la tensión arterial, en el estetoscopio se percibe un ruido con cada pulsación. Estos sonidos son los llamados **Ruidos de Korotkoff** y son producidos por el flujo turbulento de la sangre al chocar contra el vaso parcialmente ocluido. Observe la dependencia de los sonidos con la medida de la presión arterial para valores entre 80 y 120 mmHg.

Entre los números reales se pueden establecer relaciones de orden como **a<b**, esto se cumple si y solo si el punto que representa al número **a** está a la izquierda del punto que representa al número **b**. Por ejemplo, el número 1 es menor que el número 3, ya que el punto 1 se encuentra a la izquierda del punto 3, o que es lo mismo escribir que 3>1 y decir que el punto 3 está a la derecha del punto 1.

Definición

Siendo **a, b** $\in$ R se cumple

i) a>b, si y solo si **a** es mayor que **b**

ii) a<b, si y solo si **a** es menor que **b**

iii) $a \geq b$, si y solo si **a>b** o **a=b**

iv) $a \leq b$, si y solo si **a<b** o **a=b**

Un número x se encuentra entre a y b, si $a < x$ y $x < b$

Esto se puede escribir como desigualdad continua de la manera siguiente

$$\boxed{a<x<b}$$

Otra desigualdad continua es

$$\boxed{a \leq x \leq b \; ; \; a \leq x < b \; ; \; a < x \leq b}$$

Definición

i) a>0, si y solo si a es número real positivo

ii) a<0, si y solo si a es número real negativo

Ejemplo: $3>0$; $-2<0$; $\text{sen}30° > 0$; $-\pi<0$

Es común leer en los problemas cierto tipo de expresiones, para las cuales ya existe una expresión matemática que las representa. Algunas de estas expresiones son:

1) "Se tiene un número no negativo"
Con lo anterior, se puede plantear que el número es positivo o cero; entonces sea **a** el número en mención, por lo tanto $\mathbf{a} \geq 0$.

2) "Se tiene un número no positivo"
Con lo anterior se puede plantear que el número es negativo o cero; entonces sea **b** el número en mención, por lo tanto, $\mathbf{b} \leq 0$

3) "Se sabe que **a** no es mayor que **b**"
Con lo anterior podemos plantear que **a** debe ser menor o igual que **b**, luego su expresión matemática será $\mathbf{a} \leq \mathbf{b}$.

4) "Se sabe que **a** no es menor que **b**"
Con lo anterior podemos plantear que **a** debe ser mayor o igual que **b**, luego su expresión matemática será $\mathbf{a} \geq \mathbf{b}$

5) "Se sabe que los valores del **sen**α son no negativos"; entonces se puede plantear que **sen**$\alpha \geq 0$

6) "Sabiendo que el **cos**α no es mayor que 0,5"; entonces se puede plantear que **cos**$\alpha \leq 0,5$

En la siguiente sección, estudiaremos algunos teoremas que le serán de gran ayuda y utilidad.

Teorema

Siendo a, b, c $\in$ R se cumple

- $a<b \Leftrightarrow a+c<b+c$
- $a>b \Leftrightarrow a+c>b+c$

Ejemplo

Despeje senα a partir de

$$\text{sen}\alpha - \frac{1}{2} > \frac{1}{4}$$

Sumamos $\frac{1}{2}$ a ambos miembros de la desigualdad

$$\text{sen}\alpha - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} > \underline{\frac{1}{4} + \frac{1}{2}}$$

Reduciendo $\quad \text{sen}\alpha > \frac{3}{4}$

Teorema

Siendo a, b y c $\in$ R se cumple

- $a<b$ si y solo si $ac<bc$; $c>0$
- $a<b$ si y solo si $ac>bc$; $c<0$

Ejemplo 1

Despeje senα a partir de

$$2\text{sen}\alpha - 1 > 0$$

Sumamos (1) a ambos miembros de la desigualdad

$$2\text{sen}\alpha - 1 + (1) > 0 + (1)$$

$$2\text{sen}\alpha > 1$$

Multiplicamos por $\left(\frac{1}{2}\right)$, como $\frac{1}{2} > 0$

El sentido de la desigualdad no se altera

$$\left(\frac{1}{2}\right) 2\text{sen}\alpha > 1 \times \left(\frac{1}{2}\right)$$

Reduciendo $\text{sen}\alpha > \frac{1}{2}$

Ejemplo 2

Despeje $\tan\alpha$ a partir de

$$1-3\tan\alpha>0$$

Sumamos (–1) a ambos miembros

$$1-3\tan\alpha+(-1)>0+(-1)$$
$$-3\tan\alpha>-1$$

Multiplicamos por $\left(-\frac{1}{3}\right)$; como $-\frac{1}{3}<0$

El sentido de la desigualdad se cambia

$$\left(-\frac{1}{3}\right)(-3\tan\alpha)<(-1)\left(-\frac{1}{3}\right)$$

Reduciendo $\tan\alpha<\frac{1}{3}$

Teorema

Siendo $a, b \in \mathbb{R}$ se cumple

$ab>0$, si y solo si a y b tienen el mismo signo

$(a>0 \wedge b>0) \vee (a<0 \wedge b<0)$

Observación

Si se presenta la desigualdad $ab>0$ se tendrá que analizar de la forma siguiente:

Paso 1: $a>0 \wedge b>0$

(al resolver estas condiciones se obtendrá un conjunto C_1).

Paso 2: $a<0 \wedge b<0$

(al resolver este segundo grupo de condiciones se obtendrá un conjunto C_2).

Paso 3: De lo anterior, el conjunto solución final será $C_1 \cup C_2$.

Ejemplo: Halle una condición para $\operatorname{sen}\alpha$ (α : agudo), a partir de $(2\operatorname{sen}\alpha-1)\cos\alpha>0$

Resolución

$$(2\operatorname{sen}\alpha-1)\cos\alpha>0$$

Los factores deben tener igual signo, por lo que analizamos los siguientes casos:

Paso 1: $2\operatorname{sen}\alpha-1<0 \wedge \cos\alpha<0$

(esta condición no puede verificarse porque al ser α agudo $\cos\alpha$ es positivo).

Dado lo anterior tendremos que analizar la siguiente posibilidad.

Paso 2: $\underline{2\operatorname{sen}\alpha-1>0} \wedge \cos\alpha>0$

De esta desigualdad se obtiene $\operatorname{sen}\alpha>\frac{1}{2}$

Teorema

Si $a, b \in \mathbb{R}$ se cumple

$ab<0 \Leftrightarrow$ a y b

tienen signos diferentes

$(a>0 \wedge b<0) \vee (a<0 \wedge b>0)$

Si se presenta la desigualdad $ab<0$ se sugiere analizar de la siguiente forma

Paso 1: $a>0 \wedge b<0$

(al resolver estas condiciones se obtendrá un conjunto C_1)

Paso 2: $a<0 \wedge b>0$

(al resolver estas condiciones se obtendrá un conjunto C_2)

Paso 3: De lo anterior, el conjunto solución será $C_1 \cup C_2$

Ejemplo: Halle una condición para

$\cos\alpha$ (α : agudo)

a partir de $(1-3\cos\alpha)\operatorname{sen}\alpha<0$

Resolución

$$(1-3\cos\alpha)(\operatorname{sen}\alpha)<0$$

Los factores deben tener signos diferentes, por lo que analizamos los casos de la forma siguiente:

Paso 1: $(1-3\cos\alpha)>0 \wedge \operatorname{sen}\alpha<0$

(esta condición no puede verificarse porque al ser α agudo $\operatorname{sen}\alpha$ es positivo).

Dado lo anterior tendremos que analizar la siguiente posibilidad.

Paso 2: $\underline{1-3\cos\alpha<0} \wedge \operatorname{sen}\alpha>0$

De esta desigualdad se obtiene

$$\cos\alpha>\frac{1}{3}$$

Teorema

$\forall x \in \mathbb{R}$ se verifica $x^2 \geq 0$

Ejemplo 1

Determine el mínimo valor de la expresión

$$E = \tan^2\theta - 4\tan\theta + 5$$

La expresión la transformamos completando cuadrados.

$$E = (\tan\theta)^2 - 2(\tan\theta)(2) + 5 + (2)^2 - (2)^2$$

Ordenando los términos

$$E = (\tan\theta)^2 - 2(\tan\theta)(2) + (2)^2 + 5 - (2)^2$$

$$E = (\tan\theta - 2)^2 + 1 \quad \ldots\ldots\ldots \text{(I)}$$

Tengamos presente que $\tan\theta$ es una cantidad real, lo cual implica también que $(\tan\theta - 2) \in \mathbb{R}$

Por teorema anterior $(\tan\theta - 2)^2 \geq 0$

Sumando 1 $\underbrace{(\tan\theta - 2)^2 + 1}_{E} \geq 1$

De donde $E \geq 1$

$\therefore$ El mínimo valor de E es 1

Ejemplo 2

Demuestre que èn todo triángulo rectángulo de hipotenusa b, el valor máximo del área de dicha región triangular viene expresado por $\frac{b^2}{4}$.

Sean las longitudes de los catetos a y c $(a>0 \wedge c>0)$.

Entonces $(a-c)$ es una cantidad real, por teorema anterior afirmamos:

$$(a-c)^2 \geq 0$$

De donde $a^2+c^2-2ac \geq 0$

Ordenando $a^2+c^2 \geq 2ac$

Recuerde que $a^2+c^2=b^2$

$$b^2 \geq 2ac \Rightarrow \frac{b^2}{4} \geq \underbrace{\frac{ac}{2}}_{\substack{\text{Área de la} \\ \text{región triangular} \\ (S)}}$$

$\therefore$ el valor de S máximo es $\frac{b^2}{4}$

Teorema

Dado $ab>0$, se cumple

i) $a>b \Leftrightarrow \frac{1}{a}<\frac{1}{b}$ *ii)* $a<b \Leftrightarrow \frac{1}{a}>\frac{1}{b}$

Todo número real tiene el mismo signo de su inverso multiplicativo (si existe).

Este teorema debe entenderse de la siguiente forma, debido a que $ab>0$, entonces a y b tienen el mismo signo, es decir se sugiere plantear los siguientes casos

Caso 1: a y b positivos

$$0<a<b \text{ si y sólo si } \frac{1}{a}>\frac{1}{b}>0$$

Caso 2: a y b negativos

$$0>a>b \text{ si y sólo si } \frac{1}{a}<\frac{1}{b}<0$$

Ejemplo 1

i) $\operatorname{sen}\alpha > \frac{1}{2}$ ...... (1)

Se observa que $\operatorname{sen}\alpha$ es positivo, entonces su recíproco $\left(\frac{1}{\operatorname{sen}\alpha}\right)$ también debe serlo, esto es

$$\frac{1}{\operatorname{sen}\alpha} > 0 \quad \ldots\ldots (2)$$

De (1) $\frac{1}{\operatorname{sen}\alpha} < 2$ ...... (3)

De (2) y (3) $0 < \frac{1}{\operatorname{sen}\alpha} < 2$

ii) $\cos\beta > \frac{\sqrt{2}}{2}$ ...... (1)

Se observa que $\cos\beta$ es positivo, entonces su recíproco $\left(\frac{1}{\cos\beta}\right)$ también debe serlo, esto es

$$\frac{1}{\cos\beta} > 0 \quad \ldots\ldots (2)$$

De (1) $\frac{1}{\cos\beta} < \sqrt{2}$ .... (3)

De (2) y (3) $0 < \frac{1}{\cos\beta} < \sqrt{2}$

Ejemplo 2

Halle la variación de $\frac{1}{\text{sen}\alpha+1}$ a partir de

$\text{sen}\alpha-\frac{1}{2}>0$

Resolución

$$\text{sen}\alpha-\frac{1}{2}>0$$

Sumamos $\left(\frac{3}{2}\right)$

$$\text{sen}\alpha-\frac{1}{2}+\left(\frac{3}{2}\right)>\left(\frac{3}{2}\right)+0$$

Reduciendo $\text{sen}\alpha+1>\frac{3}{2}$

Tomando el recíproco obtenemos

$$\Rightarrow \frac{1}{\text{sen}\alpha+1}<\frac{2}{3}$$

Pero como $\text{sen}\alpha+1$ es positivo, entonces su recíproco $\left(\frac{1}{\text{sen}\alpha+1}\right)$ también debe ser positivo, por lo que se plantea

$$0<\frac{1}{\text{sen}\alpha+1}<\frac{2}{3}$$

Ejemplo 3

A partir de $-3<\csc\alpha<-2$ halle la variación para $\text{sen}\alpha$.

Resolución

$$-3<\csc\alpha<-2$$

Debe usted notar que $\csc\alpha$ se halla entre –3 y –2, es decir siempre será un número negativo.

Por lo que se puede tomar el recíproco

$$\frac{-1}{3}>\frac{1}{\csc\alpha}>\frac{-1}{2}$$

Observe que el sentido de la desigualdad se cambia, es decir

$$-\frac{1}{3}>\text{sen}\alpha>-\frac{1}{2}$$

Nota

El teorema visto anteriormente no es aplicable para números o cantidades que tengan signos diferentes.
A continuación mostramos un ejemplo, el cual ilustra el error que se puede cometer.

Como $-3<2$, entonces $-\frac{1}{3}>\frac{1}{2}$ (usted notará que esta condición es falsa)
Por lo que para tomar recíprocos se sugiere analizar primero los signos.

Teorema

Si a, b, c y $d\in\mathbb{R}$ tal que verifican

$$a>b$$
$$c>d$$

entonces $a+c>b+d$

Debemos mencionar que también se puede presentar los siguientes casos

	Caso 1	Caso 2
	$a\geq b$	$a\geq b$
	$c\geq d$	$c>d$
entonces	$a+c\geq b+d$	$a+c>b+d$

Ejemplo

Siendo α y β ángulos agudos e independientes entre sí, halle una condición para $\text{sen}\alpha+\cos\beta$ a partir de

$$\text{sen}\alpha>\frac{1}{2} \quad \text{.....................} \quad (1)$$

$$\cos\beta>\frac{1}{3} \quad \text{.....................} \quad (2)$$

Resolución

$$\text{sen}\alpha>\frac{1}{2}$$

$$\cos\beta>\frac{1}{3}$$

entonces $\text{sen}\alpha+\cos\beta>\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$

Reduciendo obtenemos $\text{sen}\alpha+\cos\beta>\frac{5}{6}$

Intervalos

Un intervalo es un conjunto de infinitos elementos que representa a todo número real comprendido entre 2 extremos.

I. Intervalos acotados

a. *Intervalo abierto*

El conjunto de todos los números x que cumplen la desigualdad continua $a<x<b$ se denomina **intervalo abierto** y se denota por $\langle a;b\rangle$. Por tanto

$$\langle a;b\rangle=\{x\in \mathbb{R}/a<x<b\}$$

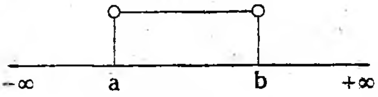


Figura 3.3

La figura 3.3 ilustra el intervalo $\langle a;b\rangle$ (tener en cuenta que $a<b$).

b. *Intervalo cerrado*

El intervalo cerrado de **a** a **b** es el intervalo abierto $\langle a;b\rangle$ junto con los puntos extremos **a** y **b** y se simboliza por $[a;b]$. Así,

$$[a;b]=\{x\in \mathbb{R}/a\leq x\leq b\}$$



Figura 3.4

La figura 3.4 ilustra el intervalo cerrado $[a;b]$.

Nota

También suelen presentarse intervalos semiabiertos o semicerrados:

i) Un intervalo abierto $\langle a;b\rangle$ junto con el punto extremo derecho **b**. Esto se representa por $\langle a;b]$. Así

$$\langle a;b]=\{x\in \mathbb{R}/a<x\leq b\}$$



Figura 3.5

La figura 3.5 ilustra el intervalo $\langle a;b]$

ii) Un intervalo abierto $\langle a;b\rangle$ junto con el punto extremo izquierdo **a** lo denotamos por $[a;b\rangle$. Así

$$[a;b\rangle=\{x\in \mathbb{R}/a\leq x<b\}$$

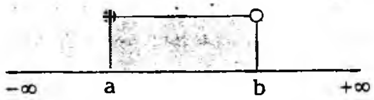


Figura 3.6

La figura 3.6 ilustra el intervalo $[a;b\rangle$.

Observación

A los intervalos $\langle a;b\rangle$, $[a;b]$, $\langle a;b]$ y $[a;b\rangle$, se les denomina **intervalos acotados** cuyos extremos o cotas son los puntos **a** y **b**.

II. Intervalos infinitos o no acotados

Usaremos el símbolo $+\infty$ (más infinito o infinito positivo) y el símbolo $-\infty$ (menos infinito o infinito negativo); sin embargo, se debe tener cuidado de no confundir estos símbolos con números reales, ya que no obedecen las propiedades de estos últimos. Los intervalos infinitos o no acotados se muestran a continuación en la figura 3.7.

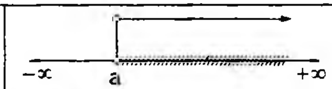
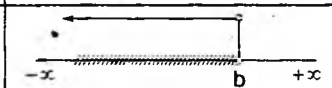
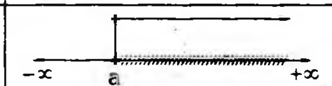
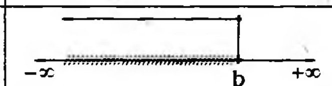
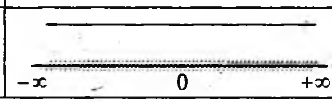
Intervalo	Representación
$\langle a;+\infty\rangle = \{x / x > a\}$	
$\langle -\infty;b\rangle = \{x / x < b\}$	
$[a;+\infty\rangle = \{x / x \geq a\}$	
$\langle -\infty;b] = \{x / x \leq b\}$	
$\langle -\infty;+\infty\rangle = \mathbb{R}$	

Figura 3.7

Nota

El lector no debe olvidar que los intervalos también se pueden representar de otra forma, como se muestra en los ejemplos siguientes:

Intervalo

1) $\langle a;b\rangle = \{x / a < x < b\}$

2) $[a;b\rangle = \{x / a \leq x < b\}$

3) $\langle -\infty;b\rangle = \{x / x < b\}$

Representación gráfica

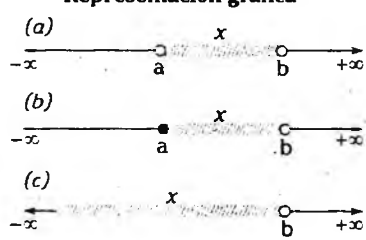


Figura 3.8

Pero como más adelante veremos, será necesario realizar operaciones con intervalos como son la unión, intersección, diferencia, etc.; para realizar dichas operaciones se sugiere utilizar los esquemas para los intervalos mostrados en la figura 3.7, puesto que lo ayudarán a entender con mayor facilidad.

Expuesto lo anterior se recomienda seguir con la secuencia de los siguientes ejemplos para consolidar lo explicado anteriormente.

Ejemplo 1

A partir de la condición $\frac{3}{2}<\operatorname{sen}\alpha+2<2$ halle el intervalo para $\operatorname{sen}\alpha$.

Resolución

Sea $\frac{3}{2}<\operatorname{sen}\alpha+2<2 \qquad \ldots(1)$

Como se pide el intervalo de $\operatorname{sen}\alpha$ tendremos que despejar $\operatorname{sen}\alpha$ a partir de (1)

Sumamos (–2)

$$\frac{3}{2}+(-2)<\operatorname{sen}\alpha+2+(-2)<2+(-2)$$

Reduciendo se obtiene $-\frac{1}{2}<\operatorname{sen}\alpha<0$

y como intervalo se tendrá que $\operatorname{sen}\alpha\in\left\langle-\frac{1}{2};0\right\rangle$

Gráficamente se puede representar mediante la figura 3.9(a) o la figura 3.9(b).

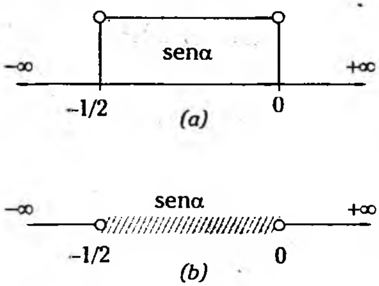


Figura 3.9

Ejemplo 2

Obtenga los valores de $\tan\alpha$ si se verifica la siguiente condición $5<2\tan\alpha-1\leq 9$

Resolución

Sea $5<2\tan\alpha-1\leq 9 \qquad \ldots(1)$

Como se pide el intervalo de $\tan\alpha$ se tendrá que despejar $\tan\alpha$ a partir de (1)

Sumamos 1

$$5+(1)<2\tan\alpha-1+(1)\leq 9+(1)$$

Reduciendo se obtiene

$$6<2\tan\alpha\leq 10$$

Multiplicando por $\frac{1}{2}$

$$\left(\frac{1}{2}\right)6<\left(\frac{1}{2}\right)2\tan\alpha\leq\left(\frac{1}{2}\right)10$$

Reduciendo se obtiene $3<\tan\alpha\leq 5$

Como intervalo se tendrá que $\tan\alpha\in\langle 3;5]$ y gráficamente se puede representar mediante la figura 3.10(a) o la figura 3.10(b)

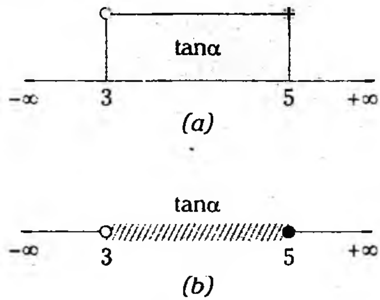


Figura 3.10

Ejemplo 3

Halle los valores de $\sec\beta+1$ a partir de la siguiente condición: $-3\leq 5-2\sec\beta\leq 1$

Resolución

Sea $-3\leq 5-2\sec\beta\leq 1 \qquad \ldots(1)$

Como se pide el intervalo de $\sec\beta+1$ se tendrá que formar $\sec\beta+1$ a partir de (1), para esto se sugiere primero despejar $\sec\beta$ y luego generar $\sec\beta+1$; veamos

Sumando -5

$$-3+(-5)\leq 5-2\sec\beta+(-5)\leq 1+(-5)$$

Reduciendo se obtiene

$$-8\leq -2\sec\beta\leq -4$$

Multiplicando por $\left(-\frac{1}{2}\right)$

$$-8\left(-\frac{1}{2}\right) \geq \left(-\frac{1}{2}\right)(-2\sec\beta) \geq -4\left(-\frac{1}{2}\right)$$

Reduciendo se obtiene $4 \geq \sec\beta \geq 2$

o su equivalente $2 \leq \sec\beta \leq 4$

Sumando (1)

$$2+(1) \leq \sec\beta + (1) \leq 4+(1)$$

Reduciendo se obtiene

$$3 \leq \sec\beta + 1 \leq 5$$

Como intervalo se tendrá que

$$(\sec\beta + 1) = [3\,;5]$$

Gráficamente se puede representar mediante la figura 3.11(a) o la figura 3.11(b).

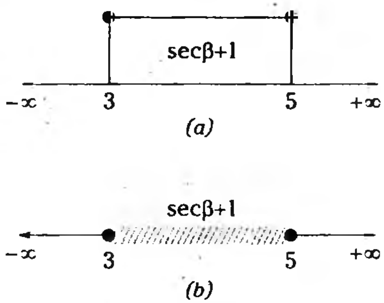


Figura 3.11

Ejemplo 4

Halle los valores que toma la expresión $\dfrac{1}{\tan\beta + 2}$ a partir de la siguiente condición $16 < 2\tan\beta - 4 < 18$

Resolución

Sea $16 < 2\tan\beta - 4 < 18$ ... (1)

Sumando 4

$$16+(4) < 2\tan\beta - 4 + (4) < 18+(4)$$

Reduciendo se obtiene

$$20 < 2\tan\beta < 22$$

Multiplicando por $\frac{1}{2}$

$$20\left(\frac{1}{2}\right) < \left(\frac{1}{2}\right)2\tan\beta < \left(\frac{1}{2}\right)22$$

Reduciendo se obtiene

$$10 < \tan\beta < 11$$

Sumando 2

$$10+(2) < \tan\beta + (2) < 11+(2)$$

Reduciendo se obtiene

$$12 < \tan\beta + 2 < 13 \quad \text{... (2)}$$

Observamos que dada la relación (2) todos los valores que toma $\tan\beta + 2$ son siempre positivos, por lo que se puede tomar el recíproco de cada término obteniendo la siguiente desigualdad:

$$\frac{1}{12} > \frac{1}{\tan\beta + 2} > \frac{1}{13}$$

o su equivalente

$$\frac{1}{13} < \frac{1}{\tan\beta + 2} < \frac{1}{12}$$

Como intervalo se tiene que

$$\frac{1}{\tan\beta + 2} = \left\langle \frac{1}{13}; \frac{1}{12} \right\rangle$$

Gráficamente se puede representar mediante la figura 3.12(a) o la figura 3.12(b).

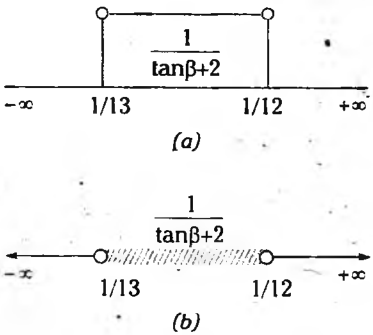


Figura 3.12

Ejemplo 5

Si $\operatorname{sen}\alpha \in [-1;1]$, halle todos los valores que puede admitir $\dfrac{1}{\operatorname{sen}\alpha}$

Resolución

Debido a que por condición $\operatorname{sen}\alpha \in [-1;1]$ entonces se tiene

$$-1 \leq \operatorname{sen}\alpha \leq 1 \quad \ldots \quad (1)$$

Debe notar usted que en la condición (1) los números −1 y 1 tienen signos diferentes, entonces los teoremas antes mencionados no serán aplicables a la desigualdad $-1 \leq \operatorname{sen}\alpha \leq 1$

Como se pide valores de $\dfrac{1}{\operatorname{sen}\alpha}$

entonces $\operatorname{sen}\alpha \neq 0$

Por lo que los valores de $\operatorname{sen}\alpha$ que son admisibles para $\dfrac{1}{\operatorname{sen}\alpha}$ serán

$$-1 \leq \operatorname{sen}\alpha < 0 \quad \vee \quad 0 < \operatorname{sen}\alpha \leq 1$$

$$\Rightarrow \ -1 \geq \frac{1}{\operatorname{sen}\alpha} \quad \vee \quad \Rightarrow \ \frac{1}{\operatorname{sen}\alpha} \geq 1$$

o su equivalente — de donde su intervalo será

$$\frac{1}{\operatorname{sen}\alpha} \leq -1 \quad \vee \quad \Rightarrow \ 1 \leq \frac{1}{\operatorname{sen}\alpha}$$

$$\Rightarrow \ \frac{1}{\operatorname{sen}\alpha} = \langle -\infty; -1] \quad \vee \quad \Rightarrow \ \frac{1}{\operatorname{sen}\alpha} = [1; +\infty\rangle$$

Luego uniendo los 2 conjuntos obtenemos

$$\therefore \ \frac{1}{\operatorname{sen}\alpha} = \langle -\infty; -1] \cup [1; +\infty\rangle$$

Los valores de $\operatorname{sen}\alpha$ y $\dfrac{1}{\operatorname{sen}\alpha}$ se ilustran en las figuras 3.13(a) y la figura 3.13(b) respectivamente.

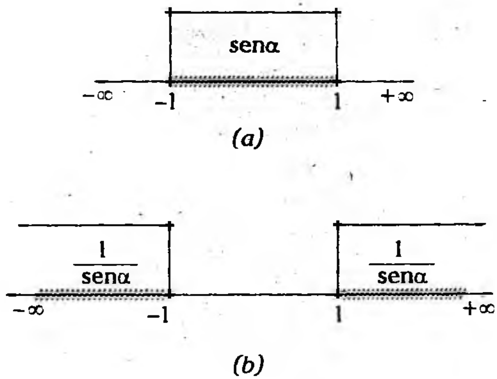


Figura 3.13

Como más adelante veremos, en una gran parte de los problemas se realizan operaciones con intervalos, como son la unión, representada por el símbolo $\cup$, y la intersección, representada por el símbolo $\cap$. Por tal motivo, para que tengamos un mejor panorama acerca de lo planteado se muestran los siguientes ejemplos, en los cuales se utilizará la siguiente notación

- I_1 : Representa a todos los elementos del intervalo 1.
- I_2 : Representa a todos los elementos del intervalo 2.
- $I_1 \cap I_2$: Representa a todos los elementos (números) comunes a ambos intervalos.
- $I_1 \cup I_2$: Representa a todos los elementos (números) comunes y no comunes a ambos intervalos.

Ejemplo 1

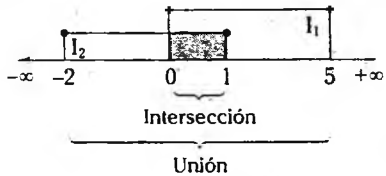


Figura 3.14

$I_1 \cap I_2 = [0;1]$

$I_2 \cup I_2 = [-2;5]$

Ejemplo 2

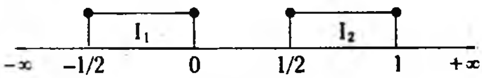


Figura 3.15

Se observa que no hay elementos comunes, por lo que

$I_1 \cap I_2 = \phi$

$I_1 \cup I_2 = \left[-\frac{1}{2};0\right] \cup \left[\frac{1}{2};1\right]$

Ejemplo 3

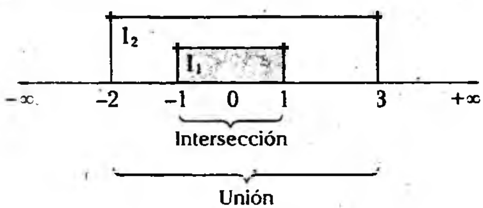


Figura 3.16

$I_1 \cup I_2 = [-2;3]$

$I_1 \cap I_2 = [-1;1]$

Ejemplo 4

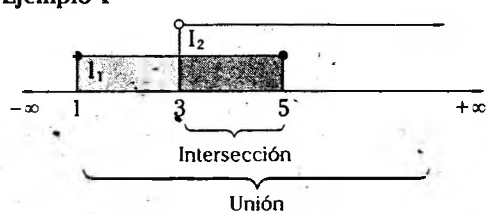


Figura 3.17

$I_1 \cap I_2 = \langle 3;5]$

(Observe que en 3 es abierto porque pertenece a I_1 pero no a I_2; en la intersección los elementos deben pertenecer a ambos conjuntos.)

$I_1 \cup I_2 = [1;+\infty\rangle$

Ejemplo 5

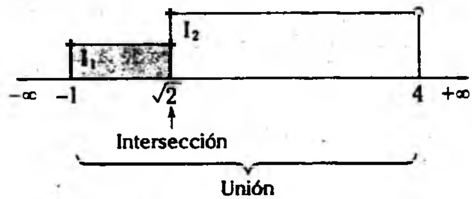


Figura 3.18

$I_1 \cap I_2 = \{\sqrt{2}\}$

$I_1 \cup I_2 = [-1;4\rangle$

Para ver una aplicación de estos ejemplos le sugerimos repasar el siguiente ejemplo.

Ejemplo 6

Halle el conjunto de valores de la $\tan\alpha$, los cuales satisfacen la siguiente desigualdad $\tan^2\alpha + \tan\alpha < 6$, sabiendo además que α es un ángulo agudo.

Resolución

A partir de la desigualdad

$$\tan^2\alpha + \tan\alpha < 6$$

Sumando (−6)

$$\tan^2\alpha + \tan\alpha + (-6) < 6 + (-6)$$

Reduciendo obtenemos

$$\tan^2\alpha + \tan\alpha - 6 < 0 \quad \text{.......................} \quad (1)$$

Por reglas de factorización obtenemos que

$$\tan^2\alpha + \tan\alpha - 6 = (\tan\alpha + 3)(\tan\alpha - 2)$$

Reemplazando en la desigualdad (1) obtenemos

$$(\tan\alpha + 3)(\tan\alpha - 2) < 0 \quad \text{...............} \quad (2)$$

Por lo visto anteriormente en la página **135** podemos afirmar que estos dos factores $(\tan\alpha+3)$ y $(\tan\alpha-2)$ tienen signos diferentes, por lo que se tiene que analizar los siguientes casos

1ro. $\tan\alpha+3>0 \wedge \tan\alpha-2<0$ ó

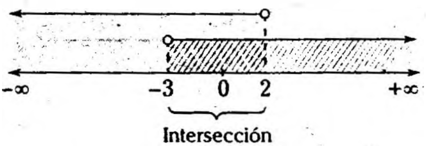
2do. $\tan\alpha+3<0 \wedge \tan\alpha-2>0$

A continuación se desarrollará el 1er. caso

$$\tan\alpha+3>0 \wedge \tan\alpha-2<0$$

$$\Rightarrow \tan\alpha>-3 \wedge \tan\alpha<2 \quad \text{.................} \quad (3)$$

La figura 3.19(a) ilustra los valores de la $\tan\alpha$ que cumplen las desigualdades anteriores (3)



(a)

Los valores de la $\tan\alpha$ serán todos los números que se encuentran en la intersección, así de la figura 3.19(a) se obtiene

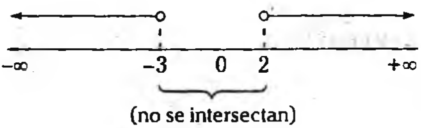
$\Rightarrow \tan\alpha=\langle-3;2\rangle$.... C_1 (conjunto 1)

Ahora se verá el desarrollo del 2do. caso

$$\tan\alpha+3<0 \quad \wedge \quad \tan\alpha-2>0$$

$$\Rightarrow \tan\alpha<-3 \quad \wedge \quad \tan\alpha>2 \text{ ....} (4)$$

La figura 3.19(b) ilustra los valores de la $\tan\alpha$ que cumplen las desigualdades anteriores (4).



(b)

Figura 3.19

Los valores de la $\tan\alpha$ **serán todos los números** que se encuentran **en la intersección** de la figura 3.19(b). Pero nota**mos que no hay** intersección alguna, por lo que **afirmamos que** es un conjunto vacío(*) el cual lo **denotamos por**

$\tan\alpha=\{\ \}$ ... C_2 **(conjunto 2)**

Entonces, $\tan\alpha$ debe **pertenecer a la unión** de los dos conjuntos, esto es

$$\tan\alpha=\langle-3;2\rangle\cup\{\ \}$$

Por lo tanto $\tan\alpha=\langle-3;2\rangle$

Nota

Otro método que simplifica la solución de la desigualdad (2) $(\tan\alpha+3)(\tan\alpha-2)<0$, es el de los puntos críticos, estos puntos se hallan al igualar cada uno de los factores

$(\tan\alpha+3)$ y $(\tan\alpha-2)$ a cero, esto es:

$\tan\alpha+3=0 \Rightarrow \tan\alpha=-3$

$\tan\alpha-2=0 \Rightarrow \tan\alpha=2$

Luego los puntos críticos serán (−3 y 2) los cuales a continuación deberán ser ubicados sobre una recta numérica (figura 3.20). Observe que sobre los números −3 y 2 hay una pequeña circunferencia la cual indica que la $\tan\alpha$ no puede tomar los valores de −3 y 2 sobreentendido por la desigualdad "<".

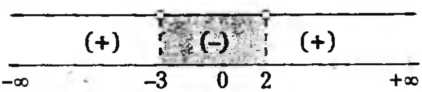


Figura 3.20

En la figura 3.20 comenzando de la derecha se ha marcado el signo (+), luego el signo menos (−) y finalmente el signo (+); ahora, como $(\tan\alpha+3)(\tan\alpha-2)$ es negativo, se escogerá la "región" marcada por (−) excluyendo los puntos −3 y 2, entonces $\tan\alpha=\langle-3;2\rangle$.

(*) Al conjunto vacío se le puede representar como { } ó ø

A continuación, sugerimos prestar bastante atención a lo siguiente. Este último intervalo debería de quedar como respuesta, siempre y cuando no haya alguna condición más para α, pero el problema menciona que α es la medida de un ángulo agudo y como usted recordará en el capítulo II (página **80**) se determinó que cualquier razón trigonométrica de un ángulo agudo siempre es positiva, por lo que adicionalmente este intervalo $(\tan\alpha = \langle -3;2\rangle)$ deberá cumplir la condición siguiente: $\tan\alpha > 0$. Es decir $\tan\alpha = \langle 0;+\infty\rangle$.

Expuesto lo anterior, los valores de la $\tan\alpha$ serán obtenidos a partir de la intersección de los intervalos siguientes: $\langle -3;2\rangle \wedge \langle 0;+\infty\rangle$.

La figura 3.21 nos ilustra la intersección

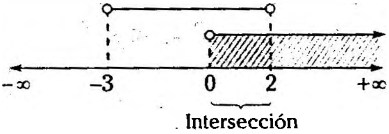


Figura 3.21

Finalmente los valores de $\tan\alpha$ que verifican las condiciones del problema serán los números pertenecientes a la intersección, es decir el intervalo $\langle 0;2\rangle$.

$\therefore\ \tan\alpha = \langle 0;2\rangle$

Ejemplo 1

Siendo α un ángulo agudo, halle los valores de la $\tan\alpha$, los cuales verifiquen la siguiente condición:

$$(\tan\alpha+1)(\tan\alpha-2)(\tan\alpha-5)\geq 0$$

Resolución

Dada la desigualdad

$$(\tan\alpha+1)(\tan\alpha-2)(\tan\alpha-5)\geq 0$$

Aplicamos el método de los puntos críticos (cada factor se iguala a cero y se hallan los valores de la $\tan\alpha$).

Factores $(\tan\alpha+1);(\tan\alpha-2);(\tan\alpha-5)$

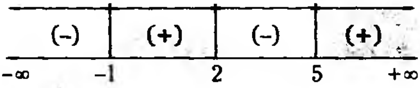
$$\tan\alpha+1=0 \Rightarrow \tan\alpha=-1$$

$$\tan\alpha-2=0 \Rightarrow \tan\alpha=2$$

$$\tan\alpha-5=0 \Rightarrow \tan\alpha=5$$

Luego los puntos críticos serán -1, 2 y 5, los cuales a continuación deberán ser ubicados sobre una recta numérica (figura 3.22(a)). Observe que a comparación del ejemplo anterior, sobre los números -1, 2, 5 hay puntos, los cuales indican que la $\tan\alpha$ puede tomar estos valores, esto queda sobreentendido por la desigualdad $\geq$ dada por la condición inicial

$$(\tan\alpha+1)(\tan\alpha-2)(\tan\alpha-5)\geq 0$$



(a)

Como $(\tan\alpha+1)(\tan\alpha-2)(\tan\alpha-5)$ es positivo o cero, escogemos las regiones marcadas con (+), incluyendo los puntos -1, 2 y 5.

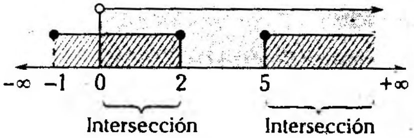
Así pues obtenemos el siguiente conjunto solución $\tan\alpha\in[-1;2]\cup[5;+\infty\rangle$.

Adicionalmente la $\tan\alpha$ debe verificar la condición de que α es un ángulo agudo, esto es debe cumplir $\tan\alpha>0$, es decir $\tan\alpha\in\langle 0;+\infty\rangle$.

Luego, expuesto lo anterior los valores de la tangente de α serán obtenidos a partir de la intersección de los siguientes intervalos

$$\left([-1;2]\cup[5;+\infty\rangle\right)\cap\langle 0;+\infty\rangle$$

La figura 3.22(b) ilustra la intersección



(b)

Figura 3.22

Finalmente los valores de la tangente de α que verifican la condición del problema serán los números pertenecientes a la intersección, es decir los intervalos $\langle 0;2] \cup [5;+\infty\rangle$

$\therefore\ \tan\alpha = \langle 0;2] \cup [5;+\infty\rangle$

Ejemplo 2

Si $\cot\alpha \in \mathbb{R}$ (puede asumir cualquier valor positivo, negativo o cero). Halle los valores de la $\cot\alpha$, a partir de la siguiente condición

$$(2-\cot\alpha)(2\cot\alpha+1)>0$$

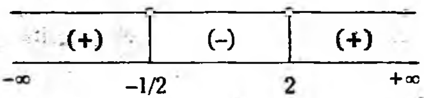
Resolución

Cuidado con resolver utilizando los puntos críticos

$$2-\cot\alpha=0 \;\Rightarrow\; \cot\alpha=2$$

$$2\cot\alpha+1=0 \;\Rightarrow\; \cot\alpha=-\frac{1}{2}$$

Luego los puntos críticos serán 2 y $-\frac{1}{2}$, a continuación se representan en una recta numérica (figura 3.23(a))



(a)

Y del gráfico concluimos que

$$\cot\alpha = \left\langle -\infty; -\frac{1}{2}\right\rangle \cup \langle 2;+\infty\rangle$$

Es fácil verificar el error, ya que según esta respuesta un valor de $\cot\alpha$ podrá ser 3, entonces el producto

$$(2-\cot\alpha)(2\cot\alpha+1)=(2-3)(2\times 3+1)=-7$$

resulta negativo lo cual evidentemente no cumple la desigualdad

$$(2-\cot\alpha)(2\cot\alpha+1)>0$$

Nota

Para aplicar el método de los puntos críticos, los coeficientes de la variable elegida deberán ser necesariamente positivos (coeficiente principal).

Según lo expuesto anteriormente, la forma correcta de resolver la desigualdad

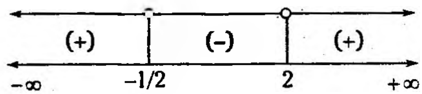
$$(2-\cot\alpha)(2\cot\alpha+1)>0$$

es la siguiente: multiplicando $\times(-1)$ ambos miembros de la izquierda.

$$\Rightarrow (\cot\alpha-2)(2\cot\alpha+1)<0$$

(debe notar que los coeficientes de $\cot\alpha$ son positivos)

Por lo que los puntos críticos correctos serán 2 y $-\frac{1}{2}$.



(b)

Figura 3.23

Y como hemos explicado anteriormente, debido a que la desigualdad indica que el producto es negativo, escogemos las regiones marcadas con (–), esto es $\left\langle -\frac{1}{2};2\right\rangle$

$$\therefore\ \cot\alpha = \left\langle -\frac{1}{2};2\right\rangle$$

Valor Absoluto

El valor absoluto de x, denotado por $|x|$, se define como

$$|x| = \begin{cases} x & ;\ \text{si } x \geq 0 \\ -x & ;\ \text{si } x < 0 \end{cases}$$

De lo anterior podemos plantear que el valor absoluto de un número real x ($|x|$), es el mismo número x, si x es mayor o igual a cero; y será igual a su opuesto aditivo $-x$ si x es menor a cero.

Para un mejor entendimiento de los siguientes ejemplos, mantenga su atención en cuál de las desigualdades se cumple que el número afectado por el operador valor absoluto $|\ |$ es mayor o igual a cero o menor a cero (≥ 0 ó <0).

- Para $|3|$; como 3 cumple la desigualdad $3 \geq 0 \Rightarrow |3|=3$
- Para $|3-\pi| = -(3-\pi) = \pi - 3 = 0{,}1416$, puesto que $3-\pi<0$
- Para $|-2|$; como -2 cumple la desigualdad $-2<0 \Rightarrow |-2| = -(-2)$

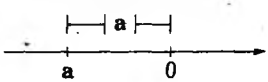
Reduciendo obtenemos $|-2|=2$

- Para $|\tan 45°| = \tan 45°$, porque $\tan 45°$ cumple la desigualdad $\tan 45° \geq 0$
- Para $|\cos 120°|$, como más adelante comprobaremos $\cos 120° = -\frac{1}{2}$

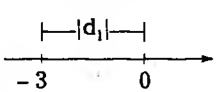
  esto es $\cos 120°<0$

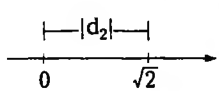
  $\therefore |\cos 120°| = -\cos 120°$

Geométricamente el valor absoluto de un número real **a** es la distancia del número al origen



Ejemplo
Calcule d_1 y d_2 (distancias), en las siguientes rectas numéricas.





Resolución

$$d_1 = |-3| = -(-3) = 3 \quad ; \quad d_2 = |\sqrt{2}| = \sqrt{2}$$

Por la definición vemos que el valor absoluto de un número real es un número positivo o cero, es decir, es no negativo.

Por consiguiente, se plantea los siguientes teoremas:

Teorema

$$|x| \geq 0 \ ; \ \forall x \in \mathbb{R}$$

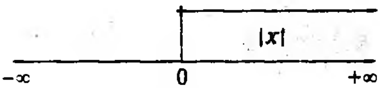


Figura 3.24

Ejemplo
Si $x \in \mathbb{R}$, halle los valores de $\tan\alpha$ a partir de la desigualdad $\tan\alpha = |x| + 2$.

Resolución
Debido a que $x \in \mathbb{R}$. $|x| \geq 0$ ... (1)

Sumando 2 a la desigualdad (1)

$|x| + 2 \geq 0 + 2$, reduciendo

$\underbrace{|x|+2} \geq 2$

esta expresión es idéntica a $\tan\alpha \Rightarrow \tan\alpha \geq 2$ y como intervalo

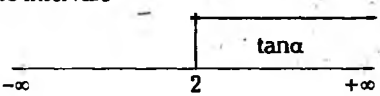


Figura 3.25

$\therefore \tan\alpha = [2; +\infty\rangle$

Teorema

$$\sqrt{x^2} = |x| \ ; \ \forall x \in \mathbb{R}$$

Ejemplo 1
- $\sqrt{3^2} = |3| = 3$
- $\sqrt{\tan^2 45°} = |\tan 45°| = \tan 45°$
- $\sqrt{\operatorname{sen}^2\alpha} = |\operatorname{sen}\alpha|$
- $\sqrt{(-10)^2} = |-10| = 10$
- $\sqrt{\cos^2 120°} = |\cos 120°| = -\cos 120°$
- Si α es un ángulo agudo, simplifique $\sqrt{\tan^2\alpha} = |\tan\alpha|$, pero por ser α un ángulo agudo $\Rightarrow \tan\alpha > 0$, luego $|\tan\alpha| = \tan\alpha$

  $\therefore \sqrt{\tan^2\alpha} = \tan\alpha$

Ejemplo 2

Si $x \in \mathbb{R}$, halle los valores de la $\cot\alpha$, tal que se verifica la siguiente condición: $\cot\alpha = \sqrt{x^2} + 4$

Resolución

$\cot\alpha = \sqrt{x^2} + 4$

Aplicando el teorema anterior se obtiene

$\cot\alpha = |x| + 4 \quad \ldots (\alpha)$

$|x| \geq 0$, sumando 4

$|x| + 4 \geq 0 + 4$, obtenemos

$\cot\alpha \geq 4$

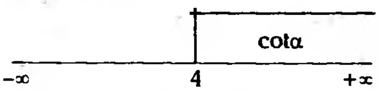


Figura 3.26

$\therefore \cot\alpha \in [4; +\infty\rangle$

Teorema

Si $x, y \in \mathbb{R}$ entonces $|xy| = |x|\,|y|$

Ejemplo

- $|3(-2)| = |3|\,|-2|$
- $|2\cos\alpha| = |2|\,|\cos\alpha|$
- $|3\operatorname{sen}\alpha + 3| = |3(\operatorname{sen}\alpha + 1)|$

  $|3\operatorname{sen}\alpha + 3| = |3|\,|\operatorname{sen}\alpha + 1|$

  $|3\operatorname{sen}\alpha + 3| = 3|\operatorname{sen}\alpha + 1|$

Teorema

Si $x, y \in \mathbb{R}$, entonces

$$\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}\ ;\ y \neq 0$$

Ejemplo 1

- $\left|\dfrac{\sec\alpha}{2}\right| = \dfrac{|\sec\alpha|}{|2|}$
- $\left|\dfrac{\pi}{\sqrt{2}}\right| = \dfrac{|\pi|}{|\sqrt{2}|} = \dfrac{\pi}{\sqrt{2}}$
- Halle el equivalente para la siguiente expresión:

  $\left|\dfrac{2\cos\alpha + 2\operatorname{sen}\alpha}{3\operatorname{sen}\alpha - 3\cos\alpha}\right|$

Resolución

Sea

$$R = \left|\frac{2\cos\alpha + 2\operatorname{sen}\alpha}{3\operatorname{sen}\alpha - 3\cos\alpha}\right|$$

Aplicamos el teorema anterior

$$R = \frac{|2\cos\alpha + 2\operatorname{sen}\alpha|}{|3\operatorname{sen}\alpha - 3\cos\alpha|}$$

Factorizando

$$R = \frac{|2(\operatorname{sen}\alpha + \cos\alpha)|}{|3(\operatorname{sen}\alpha - \cos\alpha)|} = \frac{|2|\,|\operatorname{sen}\alpha + \cos\alpha|}{|3|\,|\operatorname{sen}\alpha - \cos\alpha|}$$

$$R = \frac{2|\operatorname{sen}\alpha + \cos\alpha|}{3|\operatorname{sen}\alpha - \cos\alpha|}$$

Ejemplo 2

Si $\cos\alpha < 0$, entonces la expresión $|-3\cos\alpha| + 3\cos\alpha$ es igual a

Resolución

Sea M la expresión en análisis

$\Rightarrow M = |-3\cos\alpha| + 3\cos\alpha$

A partir de

$M = |-3\cos\alpha| + 3\cos\alpha$

$M = |-3|\,|\cos\alpha| + 3\cos\alpha$

$M = 3|\cos\alpha| + 3\cos\alpha \ldots (1)$

En (1) falta reducir el $|\cos\alpha|$, para ello el problema da la información siguiente

$\cos\alpha < 0$

$\Rightarrow |\cos\alpha| = -\cos\alpha \ \ldots (2)$

porque $\cos\alpha$ verifica la desigualdad $\cos\alpha < 0$

Reemplazando (2) en (1) obtenemos

$M = 3(-\cos\alpha) + 3\cos\alpha$

Reduciendo obtenemos $M = 0$

$\therefore |-3\cos\alpha| + 3\cos\alpha = 0$

Teorema

$$|x|=|-x| \; ; \; \forall x \in \mathbb{R}$$

Ejemplos

- $|3|=|-3|=3$
- $|x-y|$; vea a $x-y$ como un solo elemento; por el teorema

  $|x-y|=|(x-y)|=|\underbrace{-(x-y)}_{-x+y}|$

  Ordenando obtenemos $|x-y|=|y-x|$

  esto es $|\cos\alpha-\operatorname{sen}\alpha|=|\operatorname{sen}\alpha-\cos\alpha|$

  De igual forma $|1-\tan\alpha|=|\tan\alpha-1|$

Teorema

$$\forall\, x; y \in \mathbb{R}$$
$$|x|=|y| \Leftrightarrow \text{si } x=y \vee x=-y$$

Ejemplo 1

Resuelva $|x-2|=|3|$

Resolución

$x-2=3$ ó $x-2=-3$

$x=5$ ó $x=-1$

$\therefore$ El conjunto solución es -1 y 5

Ejemplo 2

Halle los valores de la $\tan\alpha$ sabiendo que α es un ángulo agudo que verifica la siguiente igualdad

$$|\tan\alpha-3|=|4|$$

Resolución

De lo anterior se tiene

$\tan\alpha-3=4$ ó $\tan\alpha-3=-4$

$\tan\alpha=7$ ó $\tan\alpha=-1$

Aparentemente los valores de la $\tan\alpha$ son $\{-1;7\}$, pero falta que estos valores verifiquen que α es agudo, es decir $\tan\alpha>0$

Por lo que el único valor de $\tan\alpha$ que verifica dicha desigualdad es 7.

$\therefore \tan\alpha=7$

Ejemplo 3

Siendo θ un ángulo agudo, calcule $\tan\theta$; si se verifica la siguiente condición

$$\left|\operatorname{sen}\theta+\frac{1}{2}\right|=1$$

Resolución

Como $1=|1|$, entonces la igualdad será

$$\left|\operatorname{sen}\theta+\frac{1}{2}\right|=|1|$$

Aplicando el teorema anterior

$\Rightarrow \operatorname{sen}\theta+\frac{1}{2}=1$ ó $\operatorname{sen}\theta+\frac{1}{2}=-1$

$\Rightarrow \operatorname{sen}\theta=\frac{1}{2}$ ó $\operatorname{sen}\theta=-\frac{3}{2}$

Para θ agudo, se cumple $0<\operatorname{sen}\theta$, por lo que se elige $\operatorname{sen}\theta=\frac{1}{2}$, con la ayuda de la figura 3.27 obtenemos el valor de la $\tan\theta$, que como usted recordará

$$\tan\theta=\frac{\text{cateto opuesto al ángulo }\theta}{\text{cateto adyacente al ángulo }\theta}=\frac{1k}{\sqrt{3}k}=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

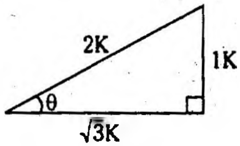


Figura 3.27

Racionalizando se obtiene

$$\tan\theta=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

Teorema

$$\forall x \in \mathbb{R} \; ; \; |x|^2=|x^2|=x^2$$

Ejemplos

- $|-3|^2=|(-3)^2|=(-3)^2=9$
- $|\cos\theta|^2=\cos^2\theta$

Teorema

$$|x|<a \Leftrightarrow -a<x<a \text{, donde } a>0$$

Ejemplos

- $|x|<2 \Leftrightarrow -2<x<2$
- $|\cos\alpha|<\frac{1}{2} \Leftrightarrow -\frac{1}{2}<\cos\alpha<\frac{1}{2}$
- $|\tan\alpha|<4 \Leftrightarrow -4<\tan\alpha<4$

Teorema

$$|x|\leq a \wedge a>0 \Leftrightarrow -a\leq x\leq a$$

Ejemplo 1

- $|\operatorname{sen}\alpha|\leq\frac{1}{2} \Leftrightarrow -\frac{1}{2}\leq \operatorname{sen}\alpha\leq\frac{1}{2}$
- $|\tan\alpha|\leq 3 \Leftrightarrow -3\leq \tan\alpha\leq 3$

Ejemplo 2

Determine el conjunto solución que satisfaga a la desigualdad

$$\left|x\tan\frac{\pi}{4}-5\right|<\sec^4\frac{\pi}{4}$$

Resolución

Como $\tan\frac{\pi}{4}=1$ y $\sec^4\frac{\pi}{4}=4$, entonces la desigualdad será $|x-5|<4 \Leftrightarrow -4<x-5<4$

$$\Rightarrow 1<x<9$$

Expresamos como intervalo

$\therefore x\in\langle 1;9\rangle$

Ejemplo 3

Halle los valores de la $\tan\alpha$, tal que se verifique las siguientes condiciones

$\tan\alpha+2\geq 0$ ....(1)

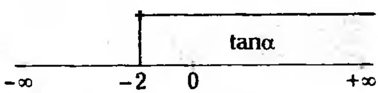
$|\tan\alpha|\leq 5$ ....(2)

Resolución

A partir de (1) se obtiene

$\tan\alpha\geq -2$ ....(3)

La figura 3.28(a) muestra los valores de la $\tan\alpha$ para esta condición.



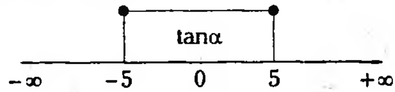
(a)

$\Rightarrow \tan\alpha=[-2;+\infty\rangle$ .... (4)

De (2) aplicamos el teorema obteniendo

$-5\leq\tan\alpha\leq 5$ .... (5)

La figura 3.28(b) muestra los valores de la $\tan\alpha$ para esta condición.

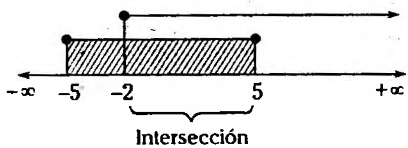


(b)

$\Rightarrow \tan=[-5;5]$ .... (6)

Expuesto lo anterior, los valores de la $\tan\alpha$ que verifican las dos condiciones serán aquellos que verifican o se encuentran en la intersección de los intervalos (4) y (6), los cuales respectivamente son $[-2;+\infty\rangle$ y $[-5;5]$.

La figura 3.28(c) ilustra la intersección



(c)

Figura 3.28

$\therefore \tan\alpha=[-2;5]$

Teorema

$$|x|>a \wedge a>0 \Rightarrow x<-a \vee x>a$$

Ejemplos

- $|x|>3 \Leftrightarrow x<-3 \vee x>3$
- $|\tan\beta|>2 \Rightarrow \tan\beta<-2 \vee \tan\beta>2$
- $|\csc\alpha|>1 \Rightarrow \csc\alpha<-1 \vee \csc\alpha>1$

Teorema

$$|x|\geq a \Leftrightarrow x\leq -a \vee x\geq a\text{, donde } a>0$$

Ejemplo 1

- $|x|\geq 3 \Leftrightarrow x\leq -3 \vee x\leq 3$
- $|\cot\phi|\geq 4 \Leftrightarrow \cot\phi\leq -4 \vee \cot\phi\geq 4$

Ejemplo 2

Si $\operatorname{sen}\alpha \in [-1;1]$, halle los valores de $\operatorname{sen}\alpha$ que verifiquen la siguiente condición.

$$|\operatorname{sen}\alpha| \geq \frac{1}{2}$$

Resolución

A partir del enunciado podemos plantear dos condiciones

$\operatorname{sen}\alpha \in [-1;1]$ .... (1)

$|\operatorname{sen}\alpha| \geq \frac{1}{2}$ .... (2)

De (2) aplicamos el teorema indicado anteriormente, obteniéndose

$\operatorname{sen}\alpha \leq -\frac{1}{2} \vee \operatorname{sen}\alpha \geq \frac{1}{2}$ .... (3)

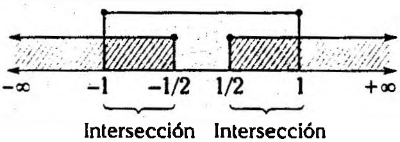
La figura 3.29(a) muestra los valores de $\operatorname{sen}\alpha$ para esta última condición (3).



(a)

$$\Rightarrow \operatorname{sen}\alpha \in \left\langle -\infty; -\frac{1}{2}\right] \cup \left[\frac{1}{2}; +\infty\right\rangle \text{ ... (4)}$$

Expuesto lo anterior, los valores de $\operatorname{sen}\alpha$ que verifican las dos condiciones planteadas inicialmente (1) y (2), serán aquellos valores de $\operatorname{sen}\alpha$ que verifican los intervalos (1) y (4) en simultáneo (intersección). La figura 3.29(b) ilustra mejor esta deducción.



(b)

Figura 3.29

$$\therefore \operatorname{sen}\alpha = \left[-1; -\frac{1}{2}\right] \cup \left[\frac{1}{2}; 1\right]$$

Ejemplo 3

Halle todos los valores que puede tomar $\csc\theta$ (θ: ángulo agudo), los cuales verifiquen la desigualdad $|\csc\theta - 2| \geq 2$

Resolución

Como θ es agudo, se debe verificar que $\csc\theta > 1$ (Esto se determinó en el Capítulo II)

Entonces

$|\csc\theta - 2| \geq 2 \Leftrightarrow \csc\theta - 2 \leq -2 \vee \csc\theta - 2 \geq 2$ ... (1)

Si a partir de (1) reducimos obtenemos

$\csc\theta \leq 0 \vee \csc\theta \geq 4$ ...(2)

Como usted observará tenemos dos posibilidades de las cuales, como $\csc\theta > 1$ (por ser θ agudo), solo se podrá considerar que

$\csc\theta \geq 4$ ...(3)

Representando esta última desigualdad en una recta numérica la cual se ilustra en la figura 3.30

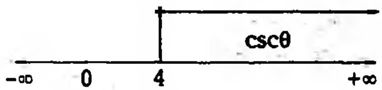


Figura 3.30

Del gráfico se obtiene

$\therefore \csc\theta = [4; +\infty\rangle$

Teorema

Sean $a, b \in \mathbb{R}^+$ (constantes)

$x \in \mathbb{R} - \{0\}$ (variable)

Entonces se establece

i) $ax + \frac{b}{x} \geq 2\sqrt{ab}$; si $x > 0$

ii) $ax + \frac{b}{x} \leq -2\sqrt{ab}$; si $x < 0$

Observación

El valor de x que verifica la igualdad en la proposición (*i*) se determina por $x = \sqrt{\frac{b}{a}}$

En forma análoga para la proposición (*ii*)

El valor de x que cumple la igualdad, se obtiene por $x = -\sqrt{\frac{b}{a}}$

Ejemplo 1

Se quiere cercar con alambre el perímetro de un terreno de forma rectangular cuya superficie es 11 km^2. Determine la menor cantidad de alambre a emplear.

Resolución

Del esquema, sea x e y las longitudes del rectángulo

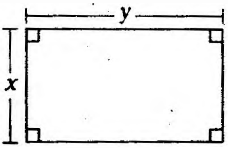


Figura 3.31

Tenemos $xy=11$ .... (I)

Perímetro: $E=2x+2y$ ..... (II)

Se pide el mínimo valor de E, donde $x>0$.

De la condición (I) $y=\dfrac{11}{x}$

Reemplazando en (II) $E=2x+2\left(\dfrac{11}{x}\right)$

$\Rightarrow E=2x+\dfrac{22}{x}$ .... (III)

Por teorema anterior

$$\underbrace{2x+\frac{22}{x}}_{E}\geq 2\sqrt{2\times 22}$$

De donde $E\geq 4\sqrt{11}$

$\therefore$ La menor cantidad de alambre será $4\sqrt{11}$ km

Ejemplo 2

Determine $\operatorname{sen}\theta.\cos\theta$, si la expresión

$$E=2\tan\theta+6\cot\theta$$

toma su mínimo valor. Considere al ángulo θ agudo.

Resolución

Como $\theta\in\langle 0;90^\circ\rangle \Rightarrow \tan\theta>0$

Luego la expresión E toma la forma

$$E=2(\tan\theta)+\frac{6}{\tan\theta}$$

Por el teorema $E\geq 2\sqrt{(2)(6)}$ .... (I)

Por la observación anterior la igualdad en (I) se verifica cuando

$$\tan\theta=\sqrt{\frac{6}{2}} \Rightarrow \tan\theta=\sqrt{3}$$

$\Rightarrow \theta=60^\circ$

Se puede calcular

$M=\operatorname{sen}\theta\cos\theta$

$M=\operatorname{sen}60^\circ.\cos 60^\circ$

$\therefore M=\sqrt{3}/4$

Teorema

i) Si $a<x<b$ y $a;b>0$

$\Rightarrow a^2<x^2<b^2$

$\Leftrightarrow |a|<|x|<|b|$

ii) Si $a<x<b$ y $a;b<0$

$\Rightarrow a^2>x^2>b^2$

$\Leftrightarrow |a|>|x|>|b|$

iii) Si $a<x<b$ y $a<0$; $b>0$

$\Rightarrow 0\leq x^2<$ se elije el mayor entre a^2 o b^2

$\Leftrightarrow 0\leq |x|<$ se elije el mayor entre $|a|$ o $|b|$

Ejemplos

i) Si $2<x<5$

$\Rightarrow 4<x^2<25$

$\Rightarrow 2<|x|<5$

ii) Si $-3<x<-1$

$\Rightarrow 9>x^2>1$

$\Rightarrow 3>|x|>1$

iii) Si $-3<x<2$

$\Rightarrow 0\leq x^2<9$

$\Rightarrow 0\leq |x|<3$

iv) Si $-2\leq x<4$

$\Rightarrow 0\leq x^2<16$

$\Rightarrow 0\leq |x|<4$

Distancia entre Dos Puntos en la Recta Numérica

La distancia entre los números reales x_1 y x_2 está dado por el valor absoluto de la diferencia de estos.

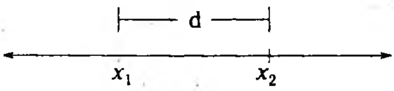


Figura 3.32

De la figura 3.32 se cumple

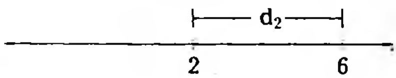
$$d = |x_1 - x_2| = |x_2 - x_1|$$

Ejemplo

De la figura 3.33(a) y 3.33(b), calcule la distancia d_1 y d_2.



(a)



(b)

Figura 3.33

Resolución

Empleando la fórmula para la distancia entre dos puntos, tenemos

$$d_1 = |(-2)-(3)| = 5 \quad ó \quad d_1 = |(3)-(-2)| = 5$$

$$d_2 = |(2)-(6)| = 4 \quad ó \quad d_2 = |(6)-(2)| = 4$$

Observación

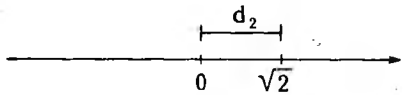
La distancia de un número real x al origen está dado por $|x|$.

Ejemplo

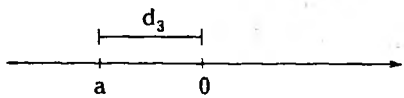
De las figuras 3.34(a), 3.34(b) y 3.34(c), halle las distancias d_1, d_2 y d_3 respectivamente.



(a)



(b)



(c)

Figura 3.34

Resolución

$$d_1 = |-3| = -(-3) = 3$$

$$d_2 = |\sqrt{2}| = \sqrt{2}$$

$$d_3 = |a| = -a \text{ ; puesto que } a<0$$

Segmento Dirigido

Se llama segmento dirigido al segmento orientado por un eje (recta numérica).

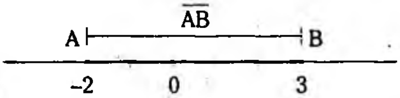
En la figura 3.35 el segmento $\overline{AB}$ (A es el origen del segmento, B es el extremo o fin)



Figura 3.35

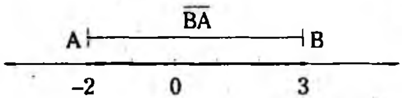
La notación $\overline{AB}$ indica un segmento dirigido.

Un segmento dirigido se considera positivo si su dirección coincide con la del eje, o negativo si su dirección es contraria a la del eje.



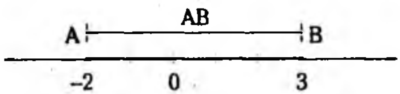
(a)

$\overline{AB} = B - A = (3) - (-2) = 5$



(b)

$\overline{BA} = A - B = (-2) - (3) = -5$



(c)

Figura 3.36

La longitud del segmento AB es

$AB = |\overline{AB}| = |\overline{BA}|$

$\Rightarrow AB = |3 - (-2)| = |-2 - 3| = 5$

Así pues, la porción de la recta entre los puntos A y B tiene por longitud 5. El segmento dirigido $\overline{AB} = 5$ es positivo, porque sigue el sentido positivo del eje. En cambio, $\overline{BA} = -5$ es negativo, porque sigue el sentido negativo del eje.

Es evidente que al permutar las letras en la designación de un segmento dirigido, variamos su orientación y, por ello, el segmento cambia de signo, conservando su valor absoluto.

En general

Dados A y B los puntos en la recta numérica, el valor de los segmentos dirigidos $\overline{AB}$ y $\overline{BA}$ respectivamente se obtiene así

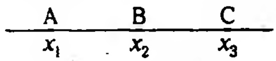
$\overline{AB} = B - A$; $\overline{BA} = A - B$

En consecuencia, se cumple

$\overline{AB} = -\overline{BA}$; $|\overline{AB}| = |\overline{BA}|$

Ejemplos

i) Siendo x_1, x_2 y x_3 coordenadas de los puntos A, B y C respectivamente.



De la recta numérica tenemos

$\overline{AB} = B - A = x_2 - x_1$

$\overline{BC} = C - B = x_3 - x_2$

$\overline{AC} = C - A = x_3 - x_1$

$\overline{CB} = B - C = x_2 - x_3$

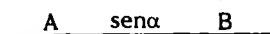
También se tiene

$AB = |x_2 - x_1| = x_2 - x_1$

$BC = |x_3 - x_2| = x_3 - x_2$

$AC = |x_3 - x_1| = x_3 - x_1$

ii)



$AB = |\text{sen}\alpha| = \text{sen}\alpha$

$\overline{AB} = \text{sen}\alpha$

iii)



$QP = |\cos\theta| = -\cos\theta$

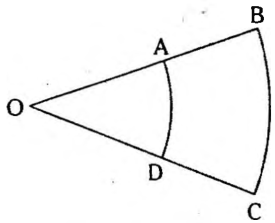
$\overline{QP} = \cos\theta$

Los criterios del ejemplo **ii** y **iii** **se aplicarán** en circunferencia trigonométrica.

Problemas Resueltos

Problema 1

En la figura 3.37(a) AOD y BOC son sectores circulares con centro común O. Calcule el área máxima de la región sombreada, siendo su perímetro 10 m.

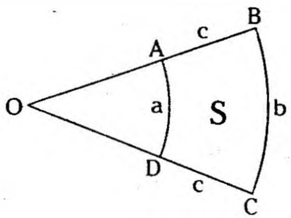


(a)

Resolución

En la figura 3.37(b), se ha considerado la longitud del arco AD y BC como a y b respectivamente.

Además $AB=c \Rightarrow DC=c$



(b)

Si S es el área del trapecio circular ABCD

$$\Rightarrow S=\frac{(a+b)c}{2} \text{ .... (1)}$$

Pero $a+b+2c=10$

$$\Rightarrow \frac{a+b}{2}=5-c \text{ .... (2)}$$

Reemplazando (2) en (1)

$$S=(5-c)c$$

$$\Rightarrow S=5c-c^2$$

Completando cuadrados, tenemos

$$S=-\left[c^2-2c\left(\frac{5}{2}\right)+\frac{25}{4}\right]+\frac{25}{4}$$

$$S=-\left[c-\frac{5}{2}\right]^2+\frac{25}{4} \text{..........(3)}$$

En este problema se debe tener presente que cualquier número real elevado al cuadrado es positivo o cero, es decir

$$x^2\geq 0\ ;\ \forall x\in R$$

Entonces

$$\left[c-\frac{5}{2}\right]^2\geq 0 \text{ de (3)}$$

De (3) tenemos

$$\left[c-\frac{5}{2}\right]^2=\frac{25}{4}-S$$

$$\Rightarrow \frac{25}{4}-S\geq 0$$

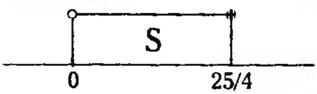
$$\Rightarrow \frac{25}{4}\geq S \text{..........(4)}$$

Pero, como usted comprenderá el área es una cantidad positiva, por lo que planteamos

$$S>0 \text{ .... (5)}$$

De (4) y (5) obtenemos $0<S\leq\frac{25}{4}$

Los valores que toma el área S se puede visualizar en una recta numérica.



(c)

Figura 3.37

Los valores de S se ilustran en la figura 3.37(c) (tener en cuenta que S es positivo).

Entonces el máximo valor de S es 25/4.

Problema 2

Siendo β la medida de un ángulo agudo, halle la variación de

$$E=\frac{\operatorname{sen}\beta-2}{\operatorname{sen}\beta+2}$$

Resolución

Para resolver este problema, hacemos aparecer en el numerador la forma del denominador (sumamos y restamos 2 en el numerador).

$$\Rightarrow E=\frac{\operatorname{sen}\beta+2-2-2}{\operatorname{sen}\beta+2}$$

$$\Rightarrow E=\frac{\operatorname{sen}\beta+2-4}{\operatorname{sen}\beta+2}$$

Descomponiendo en fracciones parciales

$$E=\frac{\operatorname{sen}\beta+2}{\operatorname{sen}\beta+2}-\frac{4}{\operatorname{sen}\beta+2}$$

$$E=1-\frac{4}{\operatorname{sen}\beta+2}$$

Nota

El objetivo de estos artificios es analizar la variable ($\operatorname{sen}\beta$) sólo en el denominador.

Como β es un ángulo agudo, se cumple

$$0<\operatorname{sen}\beta<1$$

Sumando 2

$$2<\operatorname{sen}\beta+2<3$$

Invirtiendo

$$\frac{1}{2}>\frac{1}{\operatorname{sen}\beta+2}>\frac{1}{3}$$

Multiplicando -4

$$-2<\frac{-4}{\operatorname{sen}\beta+2}<\frac{-4}{3}$$

Sumando 1

$$-1<\underbrace{1-\frac{4}{\operatorname{sen}\beta+2}}_{E}<-\frac{1}{3}$$

$$-1<E<-\frac{1}{3}$$

$$\therefore E=\left\langle -1;-\frac{1}{3}\right\rangle$$

Problema 3

Siendo α, β y θ las medidas de ángulos agudos y se cumple

$$\left(\operatorname{sen}\alpha-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\cos\beta-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2=-\sqrt{(\tan\theta-1)^2}$$

calcule $E=\dfrac{\cos\alpha\tan\beta}{\operatorname{sen}\theta}$

Resolución

Del dato, analizamos el segundo miembro

$$\left(\operatorname{sen}\alpha-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\cos\beta-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2=-|\tan\theta-1|$$

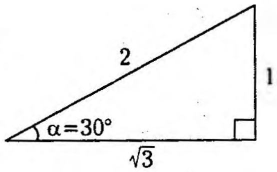
$$\Rightarrow\left(\operatorname{sen}\alpha-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\cos\beta-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2+|\tan\theta-1|=0$$

Como $\left(\operatorname{sen}\alpha-\frac{1}{2}\right)^2$; $\left(\cos\beta-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2$ y $|\tan\theta-1|$

son cantidades no negativas, entonces la suma de estas cantidades es siempre no negativa. En el problema como la suma de estas cantidades es cero, entonces cada cantidad deberá ser cero, entonces

- $\left(\operatorname{sen}\alpha-\frac{1}{2}\right)^2=0$

$$\Rightarrow \operatorname{sen}\alpha=\frac{1}{2}$$

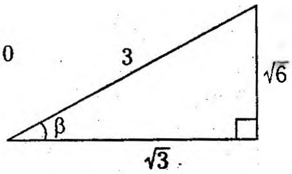


(a)

$$\Rightarrow \cos\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

- $\left(\cos\beta-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2=0$

$$\Rightarrow \cos\beta=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

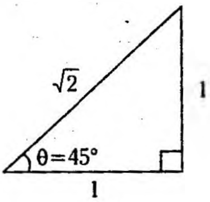


(b)

$$\Rightarrow \tan\beta=\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}}=\sqrt{2}$$

- $|\tan\theta - 1| = 0$

  $\Rightarrow \tan\theta = 1$



(c)

Figura 3.38

$$\Rightarrow \operatorname{sen}\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Reemplazando en E

$$E = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} \times \sqrt{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{3}$$

$\therefore E = \sqrt{3}$

Teniendo en cuenta este problema podemos comprender las conclusiones a partir de la siguiente suma

$$\sqrt{2\operatorname{sen}\alpha - 1} + |\cos\beta - 1| + (\cot\theta - \sqrt{3})^2 = 0 \ldots (1)$$

debido a que $\sqrt{2\operatorname{sen}\alpha - 1} \geq 0$

$$|\cos\beta - 1| \geq 0$$

$$(\cot\theta - \sqrt{3})^2 \geq 0$$

Entonces, para que dicha suma (1) sea cero se debe cumplir

$$2\operatorname{sen}\alpha - 1 = 0 \Rightarrow \operatorname{sen}\alpha = \frac{1}{2}$$

$$\cos\beta - 1 = 0 \Rightarrow \cos\beta = 1$$

$$\cot\theta - \sqrt{3} = 0 \Rightarrow \cot\theta = \sqrt{3}$$

Problema 4

Siendo θ un ángulo agudo halle todos los valores de $E = \tan\theta + \cot\theta$

Resolución

Como $\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$, reemplazando en E tenemos

$$E = \tan\theta + \frac{1}{\tan\theta} \Rightarrow E = \frac{\tan^2\theta + 1}{\tan\theta}$$

$$\Rightarrow \tan^2\theta - E\tan\theta + 1 = 0$$

Por ecuación cuadrática

$$\Delta \geq 0 \Rightarrow (-E)^2 - 4(1)(1) \geq 0$$

$$\Rightarrow E^2 - 4 \geq 0$$

$$\Rightarrow (E+2)(E-2) \geq 0$$

Graficando el intervalo

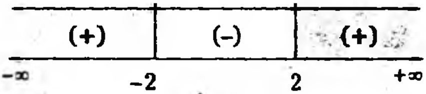


Figura 3.39

Como $\tan\theta > 0 \Rightarrow E > 0$

$\therefore E \geq 2$

Nota

Siendo θ un ángulo agudo se cumple

$$\tan\theta + \cot\theta \geq 2$$

Además, si $\tan\theta + \cot\theta = 2 \Rightarrow \tan\theta = 1$

Adicionalmente, de lo anterior se cumplen los siguientes teoremas

Teorema

i) $\tan\theta + \cot\theta \geq 2$; si $\tan\theta > 0$

ii) $\tan\theta + \cot\theta \leq -2$; si $\tan\theta < 0$

Teorema

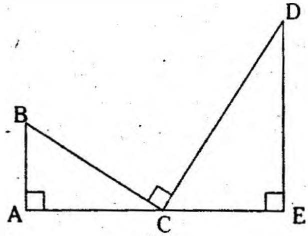
Siendo $a, b \in \mathbb{R}^+$

i) $a\tan\theta + b\cot\theta \geq 2\sqrt{ab}$; si $\tan\theta > 0$

ii) $a\tan\theta + b\cot\theta \leq -2\sqrt{ab}$; si $\tan\theta < 0$

Problema 5

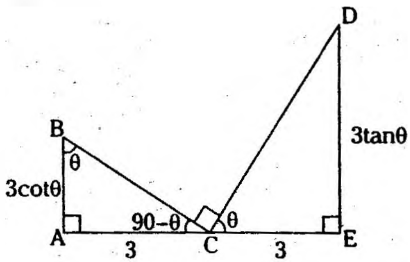
De la figura adjunta, halle el mínimo valor de (AB+DE). Dato: AC=CE=3



(a)

Resolución

En la figura 3.40(b) se ha considerado que $m\sphericalangle CBA=\theta$.



(b)

Figura 3.40

Entonces $(AB+DE)=3\cot\theta+3\tan\theta$

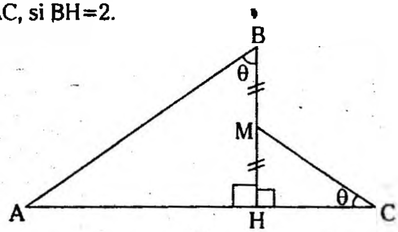
$$(AB+DE)=3\underbrace{(\cot\theta+\tan\theta)}_{\text{es}\geq 2}$$

Para que (AB+DE) sea mínimo $(\cot\theta+\tan\theta)$ deberá tomar su mínimo valor, es decir $\cot\theta+\tan\theta=2$.

$\therefore\ (AB+DE)_{min}=3(2)=6$

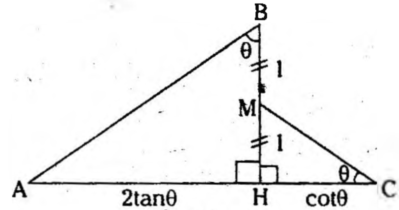
Problema 6

De la figura mostrada, determine el mínimo valor de AC, si BH=2.



(a)

Resolución



(b)

Figura 3.41

En la figura 3.36(b), por resolución de triángulos, tenemos $AH=2\tan\theta$; $HC=\cot\theta$

$\Rightarrow\ AC=2\tan\theta+\cot\theta$

Como $\tan\theta$ es positivo, entonces por teorema tenemos $2\tan\theta+\dfrac{1}{\tan\theta}\geq 2\sqrt{2\times 1}$

$\Rightarrow\ \underline{2\tan\theta+\cot\theta}\geq 2\sqrt{2}$

$\Rightarrow\quad AC\quad\geq 2\sqrt{2}$

$\therefore\ AC_{min}=2\sqrt{2}$

Problema 7

Siendo θ un ángulo agudo, halle los valores de A y B, si

$$A=\operatorname{sen}^2\theta-\operatorname{sen}\theta\ \ ;\ \ B=|2-3\cos\theta|+5$$

Resolución

i) En A, completamos cuadrados

$$A=\underbrace{\operatorname{sen}^2\theta-2\operatorname{sen}\theta\times\left(\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{4}}-\frac{1}{4}$$

$$A=\left(\operatorname{sen}\theta-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}$$

Como θ es agudo, tenemos

$$0<\operatorname{sen}\theta<1\Rightarrow -\frac{1}{2}<\operatorname{sen}\theta-\frac{1}{2}<\frac{1}{2}$$

Por el teorema (página **152**) tenemos

$$\Rightarrow\ 0\leq\left(\operatorname{sen}\theta-\frac{1}{2}\right)^2<\frac{1}{4}$$

Sumando $-\frac{1}{4}$

$$\Rightarrow -\frac{1}{4} \leq \underbrace{\left(\operatorname{sen}\theta - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}} < 0$$

$$\Rightarrow \qquad -\frac{1}{4} \leq A < 0$$

$$\therefore\ A = \left[-\frac{1}{4}; 0\right\rangle$$

ii) Como θ es agudo, tenemos

$0 < \cos\theta < 1 \Rightarrow -3 < -3\cos\theta < 0$

$\Rightarrow -1 < 2 - 3\cos\theta < 2$

Por el teorema (página **152**)

$$\Rightarrow 0 \leq |2 - 3\cos\theta| < 2$$

$$\Rightarrow 5 \leq \underbrace{|2 - 3\cos\theta| + 5} < 7$$

$$\Rightarrow \qquad 5 \leq B < 7$$

$$\therefore\ B = [5; 7\rangle$$

Problema 8

Siendo α, θ y ϕ ángulos agudos que verifican

$$\sqrt{\sqrt{5} - \cot\alpha} + \sqrt{\cot\alpha - \sqrt{5}} = (3\operatorname{sen}\theta - 1)^2 + \left(\sqrt{3} - \sec\phi\right)^2$$

Calcule $P = \sec^2\phi\csc\theta - \cot^2\alpha$

Resolución

Se define $\sqrt{x} \geq 0 \quad ; \forall\ x \geq 0$

Entonces de la condición del problema, tenemos

$$\sqrt{5} - \cot\alpha \geq 0 \quad \text{y} \quad \cot\alpha - \sqrt{5} \geq 0$$

$$\Rightarrow \sqrt{5} \geq \cot\alpha \ \text{ y } \ \cot\alpha \geq \sqrt{5}$$

De lo anterior se deduce que $\cot\alpha = \sqrt{5}$ es el único valor que satisface ambas desigualdades.

Reemplazando $\cot\alpha = \sqrt{5}$ en la condición del problema tenemos

$$\sqrt{\sqrt{5} - \sqrt{5}} + \sqrt{\sqrt{5} - \sqrt{5}} = (3\operatorname{sen}\theta - 1)^2 + \left(\sqrt{3} - \sec\phi\right)^2$$

$$0 = (3\operatorname{sen}\theta - 1)^2 + \left(\sqrt{3} - \sec\phi\right)^2$$

De lo analizado en el problema (3) de este capítulo tenemos que

$$3\operatorname{sen}\theta - 1 = 0 \ \text{ y } \ \sqrt{3} - \sec\phi = 0$$

$$\Rightarrow \operatorname{sen}\theta = \frac{1}{3} \ \text{ y } \ \sec\phi = \sqrt{3}$$

$$\therefore\ \csc\theta = 3$$

Finalmente, reemplazando en P los valores $\cot\alpha = \sqrt{5}$, $\csc\theta = 3$ y $\sec\phi = \sqrt{3}$, tenemos

$$P = \left(\sqrt{3}\right)^2(3) - \left(\sqrt{5}\right)^2 = 9 - 5 = 4$$

$$\therefore\ P = 4$$

Problema 9

Analice la verdad o falsedad de las siguientes proposiciones, siendo θ la medida de un ángulo agudo.

i) $|1 - \operatorname{sen}\theta| = 1 - \operatorname{sen}\theta$

ii) $|\tan\theta - 2002| = 2002 - \tan\theta$

iii) $\sqrt{(0{,}5 - \sec\theta)^2} = \sec\theta - 0{,}5$

iv) Si $D = \tan\theta - \cot\theta \Rightarrow D \in \mathbb{R}$

Resolución

Como θ es la medida de un ángulo agudo, se cumple

$$0 < \operatorname{sen}\theta < 1 \ ; \ \tan\theta > 0 \ \text{ y } \ \sec\theta > 1$$

Entonces

i) $0 > -\operatorname{sen}\theta > -1$

$1 > 1 - \operatorname{sen}\theta > 0 \Rightarrow |\underbrace{1 - \operatorname{sen}\theta}_{\text{es }(+)}| = 1 - \operatorname{sen}\theta$

Se concluye que la proposición **I** es **verdadera**.

ii) Como $\tan\theta > 0$ sumando -2002, tenemos

$\tan\theta - 2002 > -2002$

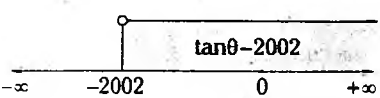


Figura 3.42

El gráfico ilustra los valores negativos, cero y positivos que toma $(\tan\theta-2002)$, entonces

$$|\tan\theta-2002|=\begin{cases}\tan\theta-2002\,;\ \text{si } \tan\theta-2002\geq 0\\ 2002-\tan\theta\,;\ \text{si } \tan\theta-2002<0\end{cases}$$

Por lo tanto la proposición **ii** resulta ser **falsa**.

iii) Por teorema, se cumple

$$\sqrt{(0{,}5-\sec\theta)^2}=|0{,}5-\sec\theta|$$

Como $\sec\theta>1$

$\Rightarrow\ -\sec\theta<-1$

$\Rightarrow\ 0{,}5-\sec\theta<-0{,}5$

$\Rightarrow\ |\underbrace{0{,}5-\sec\theta}_{\text{es }(-)}|=-(0{,}5-\sec\theta)=\sec\theta-0{,}5$

$\therefore\ \sqrt{(0{,}5-\sec\theta)^2}=\sec\theta-0{,}5$

Se concluye que la proposición **iii** es **verdadera**.

iv) Del dato

$D=\tan\theta-\cot\theta$

$D=\tan\theta-\dfrac{1}{\tan\theta}$

Ordenando

$\tan^2\theta-D\cdot\tan\theta-1=0$

Luego

$(-D)^2-4(1)(-1)\geq 0$

$D^2+4\geq 0$

Esto se cumple $\forall\, D\in\mathbb{R}$

Se concluye que la proposición **iv** es **verdadera**.

Problema 10

Siendo θ un ángulo agudo, que verifica

$$\frac{\tan\theta-1}{1+\sec\theta}\geq 0$$

halle el valor el máximo valor de

$$y=\sqrt{\cot^2\theta-4\cot\theta+4}+2\cot\theta$$

Resolución

La desigualdad se cumple cuando $(\tan\theta-1)$ y $(1+\sec\theta)$ tengan el mismo signo o si $(\tan\theta-1)=0$ como $\sec\theta>1\Rightarrow 1+\sec\theta>2$, entonces el signo de $(1+\sec\theta)$ es positivo, por consiguiente se cumplirá

$$\tan\theta-1\geq 0\ \Rightarrow\ \tan\theta\geq 1$$

Como la expresión y está en términos de $\cot\theta$, tenemos

$\tan\theta\geq 1$ obteniendo $\dfrac{1}{\tan\theta}\leq 1$

$\dfrac{1}{\tan\theta}\leq 1\ \Rightarrow\ \cot\theta\leq 1$

Pero $\cot\theta$ es positivo (por ser θ un ángulo agudo)

$\Rightarrow\ 0<\cot\theta\leq 1$ .... (1)

Reduciendo y, tenemos

$$y=\sqrt{\cot^2\theta-2(\cot\theta)(2)+(2)^2}+2\cot\theta$$

$$y=\sqrt{(\cot\theta-2)^2}+2\cot\theta$$

$$y=|\cot\theta-2|+2\cot\theta\ \text{...........}\ (2)$$

De (1) tenemos

$-2<\cot\theta-2\leq-1$

$\Rightarrow\ |\underbrace{\cot\theta-2}_{\text{es }(-)}|=2-\cot\theta$ .... (3)

(3) en (2) $\quad y=2-\cot\theta+2\cot\theta$

$\quad y=2+\cot\theta$

De (1) $\quad 2<2+\cot\theta\leq 3$

$\quad 2<y\leq 3$

$\therefore\ y_{max}=3$

SISTEMA DE COORDENADAS RECTANGULARES

Sistema formado por dos rectas numéricas que se cortan perpendicularmente en su origen (una horizontal y otra vertical, además ambas rectas tienen la misma unidad de distancia).

A la recta horizontal se le denomina eje de abscisas (X), mientras que a la recta vertical se le denomina eje de las ordenadas (Y). El punto de intersección de dichos ejes (O) se denomina origen de coordenadas, y el plano formado por los ejes se llama plano de coordenadas o plano cartesiano, (véase en la figura 3.43).

Los ejes X e Y dividen el plano cartesiano en cuatro partes llamados cuadrantes.

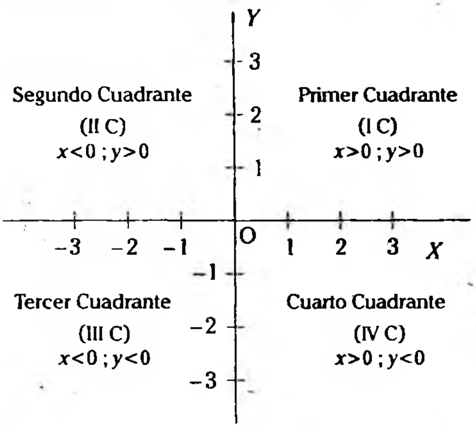


Figura 3.43

Podemos identificar en el plano cartesiano (figura 3.44) un punto P con el par ordenado (a;b), donde **a** es la abscisa y **b** es la ordenada del punto P (los valores de a y b se ubican trazando las perpendiculares desde P a los ejes X e Y respectivamente). Análogamente **c** es la abscisa y **d** es la ordenada del punto Q.

De esta manera, a cada punto del plano cartesiano le corresponde un par de números $(x;y)$ y viceversa, a cada par de números $(x;y)$ le corresponde en el plano de coordenadas un punto y solo uno, tal que su abscisa es igual a x y su ordenada es igual a y.

Observación

Se llama par ordenado al conjunto de dos números en el cual se indica qué número es primero y qué número es segundo. Así en el par ordenado $(x;y)$, el primer elemento es x y el segundo es y.

Así pues, el sistema rectangular de coordenadas en el plano establece la correspondencia biunívoca entre el conjunto de todos los puntos del plano y el conjunto de pares de números, correspondencia que al resolver los problemas geométricos permite emplear los procedimientos algebraicos.

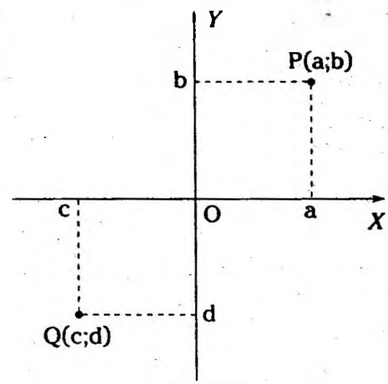


Figura 3.44

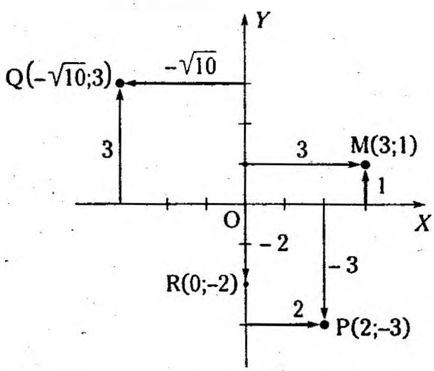
Del gráfico

- La abscisa de P es **a** y la ordenada de P es **b**.
- La abscisa de Q es **c** y la ordenada de Q es **d**.

Nota

Una aplicación de los segmentos dirigidos se da en la ubicación de un punto en el plano de coordenadas.

Así por ejemplo, en la figura 3.45(a) se han representado los puntos P(2; –3), $Q(-\sqrt{10};3)$, M(3;1) y R(0;–2) y los segmentos dirigidos que se relacionan directamente con las abscisas y ordenadas de dichos puntos; así en el eje *Y* el segmento dirigido que va de O a R $(\overline{OR}=-2)$ es igual a la ordenada de R.

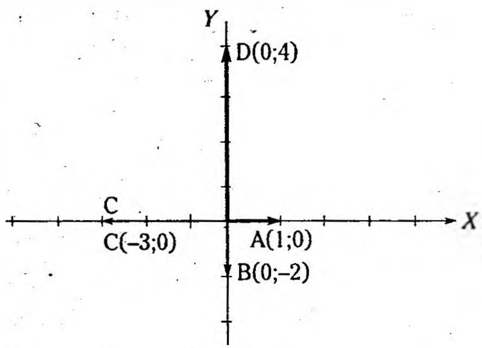


(a)

Del gráfico

- La abscisa de M es 3 y la ordenada de M es 1.
- La abscisa de P es 2 y la ordenada de P es –3.
- La abscisa de Q es $-\sqrt{10}$ y la ordenada de Q es 3.
- La abscisa de R es 0 y la ordenada de R es –2.

Debe entender usted que hay pares ordenados que representan a puntos que se encuentran sobre los ejes; la figura 3.45(b) ilustra al respecto.



(b)
Figura 3.45

Del gráfico

- La abscisa de A es 1 y su respectiva ordenada es 0.
- La abscisa de B es 0 y su respectiva ordenada es –2.
- La abscisa de C es –3 y su respectiva ordenada es 0.
- La abscisa de D es 0 y su respectiva ordenada es 4.

Teorema

Las distancias de un punto Q(a;b) a los ejes *X* e *Y* son respectivamente $|b|$ y $|a|$.

Ejemplo

En la figura 3.45(a) las distancias de Q a los ejes *X* e *Y* son respectivamente $|3|=3$ y $|-\sqrt{10}|=\sqrt{10}$. Análogamente las distancias de P y R a los ejes *X* e *Y* son respectivamente

Para P : $|-3|=3$ y $|2|=2$

Para R : $|-2|=2$ y $|0|=0$

El teorema último debe dejar en claro que las distancias de un punto a los ejes coordenados no son necesariamente iguales a la abscisa y ordenada de dichos puntos, sino a sus valores absolutos.

Los sistemas bidimensionales (dos dimensiones) son utilizados en nuestros días con bastante frecuencia de muchas formas. Normalmente se utilizan para comparar dos cantidades proporcionales, de las cuales una de ellas se cuantifica (asignar una unidad arbitraria de medida cm, m, g, atm, etc.) sobre el eje *X* (eje de abscisas o eje horizontal) y la otra cantidad sobre el eje *Y* (eje de ordenadas o eje vertical). *La siguiente lectura ilustra uno de estos casos, de dependencia entre la cantidad de masa ósea (calcio y minerales existentes en los huesos) que tiene una persona y la edad de la misma, la cual disminuye a partir de los 30 años de edad para ambos sexos, observándose que la disminución de masa ósea es más acentuada en las mujeres a partir de la menopausia y mientras que para los hombres es menos acentuada (no disminuye tan rápido).*

LECTURA

APLICACIÓN DEL SISTEMA DE COORDENADAS EN MEDICINA

Existen dos tipos de OP (pérdida de masa ósea en los huesos)
a) Post–menopáusica (tipo I) o de renovación alta
b) Senil (tipo II) o de renovación baja

Una característica clínica de las diferentes formas de OP es el pico de masa ósea.

PICO DE MASA ÓSEA

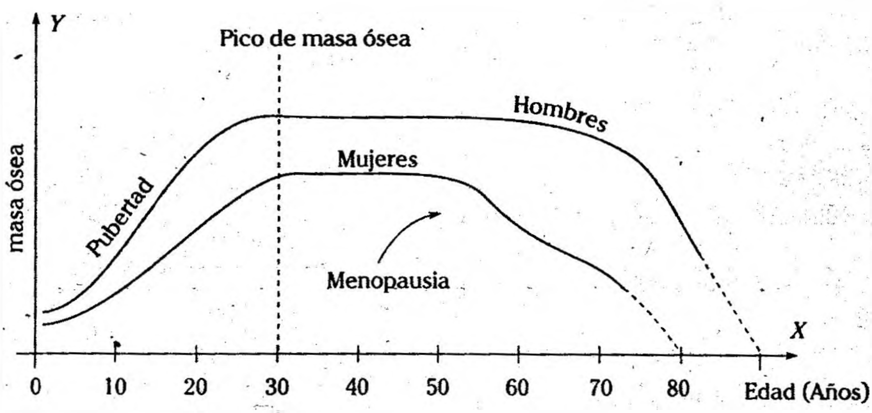
Durante la niñez, adolescencia y adultez temprana, predomina la formación sobre la resorción, hasta que llega a alcanzar el pico de masa ósea a la edad de 25 a 30 años. Esta edad va a depender de las zonas óseas y de la genética de la persona.

A partir de esta edad ocurre un equilibrio entre resorción y formación que dura 5 a 10 años.

A partir de esta edad, ocurre un proceso constante de pérdida de masa ósea (calcio y matriz). La pérdida de masa ósea es de aproximadamente 0,5 a 1,0% anualmente, luego de haberse alcanzado el pico máximo de masa ósea en la persona joven.

Factores para el pico de masa ósea

El conseguir un pico elevado de masa ósea es fundamental para evitar el OP en etapas tardías de la vida. Entre las causas más importantes están la genética (la raza negra alcanza un pico de masa ósea más elevada que las razas caucásicas o asiáticas), deficiencias gonadales, inadecuada ingesta de calcio y vitamina D, estilo de vida sedentario, algunas enfermedades crónicas y hábitos nocivos (consumo de alcohol y cigarrillo).



El sistema de coordenadas es bastante útil. Así, observamos como permite graficar la tendencia en la pérdida de masa ósea en los huesos considerando la edad y el sexo.

Distancia entre dos Puntos en el Plano Cartesiano

Conociendo las coordenadas de dos puntos cualesquiera $P(x_1;y_1)$ y $Q(x_2;y_2)$ del plano cartesiano, la distancia d entre ellos se determina de la siguiente forma:

$$d=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$$

A continuación demostremos esta forma de calcular distancias entre dos puntos en el plano bidimensional.

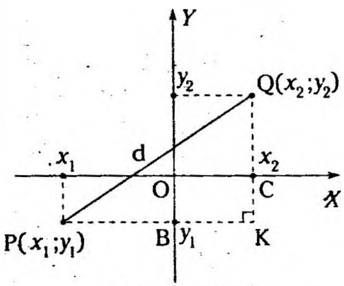


Figura 3.46

Demostración

Conociendo que los puntos P y Q se ubican según la figura 3.46, luego trazamos las perpendiculares PB y QC, cuyas prolongaciones se cortan en un punto K.

En el triángulo rectángulo PKQ aplicamos el teorema de Pitágoras

$$d^2=(PK)^2+(KQ)^2$$

Aplicando distancia entre dos puntos de la recta, se tiene

$$PK=|x_1-x_2| \text{ y } KQ=|y_1-y_2|$$

Entonces

$$d^2=|x_1-x_2|^2+|y_1-y_2|^2$$

dado que $|a|^2=a^2$; $\forall a\in R$

$$d^2=(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2$$

$$\therefore\ d=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$$

Ejemplo

Calcule la distancia entre los puntos P(−2;3) y Q(5;4).

Resolución

Sea d la distancia entre los puntos P y Q, aplicando la anterior fórmula.

$$d=\sqrt{(-2-5)^2+(3-4)^2}$$

$$\therefore\ d=\sqrt{50}=5\sqrt{2}$$

Observación

Si uno de los puntos sea P o Q del gráfico anterior se encuentra ubicado en el origen de coordenadas, entonces a la distancia se llama radio vector.

Radio Vector(r)

Es la distancia del origen de coordenadas a un punto cualquiera del plano cartesiano.

El radio vector r del punto P (a;b) se calcula por la fórmula

$$r=\sqrt{a^2+b^2}\ ;\ (r>0)$$

Ejemplo

En la figura 3.47 , halle el radio vector de los puntos P, Q, R y S.

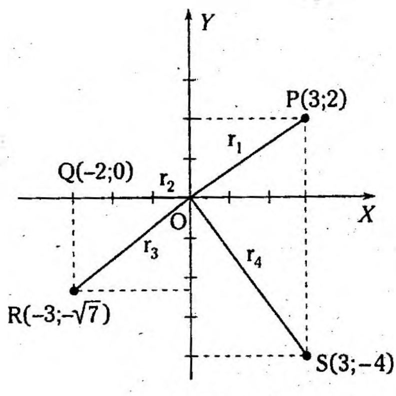


Figura 3.47

Resolución

Aplicando $r=\sqrt{a^2+b^2}$ en la figura 3.47, tenemos

- $r_1=\sqrt{3^2+2^2}$

  $r_1=\sqrt{13}$

- $r_2=\sqrt{(-2)^2+0^2}$

  $r_2=\sqrt{4}=2$

- $r_3=\sqrt{(-3)^2+(-\sqrt{7})^2}$

  $r_3=\sqrt{16}=4$

- $r_4=\sqrt{3^2+(-4)^2}$

  $r_4=\sqrt{25}=5$

División de un Segmento por un Punto en una Razón Dada

Sean los puntos $M(x_1;\ y_1)$ y $Q(x_2;\ y_2)$ los extremos de un segmento MQ y las coordenadas $(x;y)$ de un punto P que divide a este segmento MQ en la razón $r=\dfrac{MP}{PQ}$.

Luego, las coordenadas de $P(x;y)$ se calcularán utilizando el siguiente teorema

$$x=\frac{x_1+rx_2}{1+r}\quad ;\quad y=\frac{y_1+ry_2}{1+r}$$

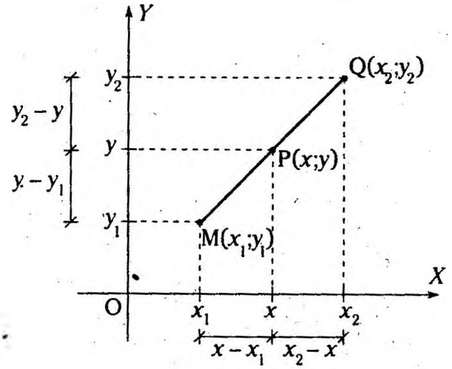


Figura 3.48

Demostración

Aplicando el teorema de Thales en la figura 3.48 se tiene

$$\frac{x-x_1}{x_2-x}=\frac{MP}{PQ}\ \Rightarrow\ \frac{x-x_1}{x_1-x}=r$$

Despejando x tenemos

$$x=\frac{x_1+rx_2}{1+r}$$

De manera semejante podemos comprobar que

$$y=\frac{y_1+ry_2}{1+r}$$

Nota

Si $r<0$, las fórmulas expuestas anteriormente pueden servir para encontrar el punto que divide exteriormente al segmento MQ en una razón dada.

Observación

Si $r=1$, entonces P es punto medio de MQ, entonces MP=PQ.

Por lo tanto, las coordenadas de P serán

$$x=\frac{x_1+x_2}{2}\ ;\ y=\frac{y_1+y_2}{2}$$

Ejemplo 1

Halle las coordenadas del punto medio del segmento cuyos extremos son M(–8;2) y Q(2;4).

Resolución

Sea $P(x;\ y)$ el punto medio de MQ.

Entonces

$$x=\frac{-8+2}{2}=-3\ ;\ y=\frac{2+4}{2}=3$$

Por lo tanto $P(-3;3)$

Ejemplo 2

En el triángulo de vértices $A(x_1;\, y_1)$; $B(x_2;\, y_2)$ y $C(x_3;\, y_3)$ demuestre que las coordenadas del baricentro son

$$x=\frac{1}{3}(x_1+x_2+x_3)\ \ ;\ \ y=\frac{1}{3}(y_1+y_2+y_3)$$

Resolución

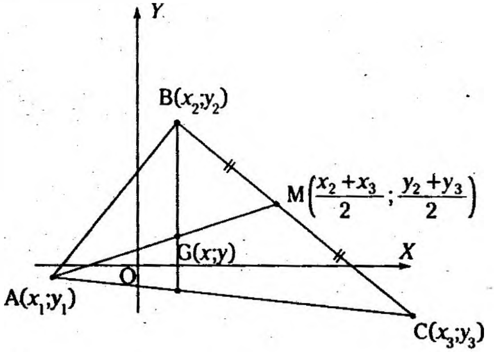


Figura 3.49

En la figura, G es el baricentro del triángulo ABC. Por geometría elemental se sabe que las medianas de un triángulo se cortan a 2/3 del vértice y a 1/3 de la base.

Entonces $r=\dfrac{AG}{GM}=2$

Aplicando las fórmulas de la división de un segmento en una razón dada (r = 2), tenemos

$$x=\frac{x_1+2\left(\dfrac{x_2+x_3}{2}\right)}{3}\ \ ;\ \ y=\frac{y_1+2\left(\dfrac{y_2+y_3}{2}\right)}{3}$$

Por lo tanto

$$x=\frac{x_1+x_2+x_3}{3}$$

En forma análoga

$$y=\frac{y_1+y_2+y_3}{3}$$

Área de una Región Triangular

El doble del área S de una región triangular ABC. con vértices $A(x_1;\, y_1)$, $B(x_2;\, y_2)$, $C(x_3;\, y_3)$ se calcula multiplicando la abscisa de cada vértice por la diferencia de la ordenada siguiente con la que le antecede. (Siguiendo el sentido antihorario).

$$2S=x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2)$$

Demostración

El área de la región triangular ABC representado en la figura puede ser calculado así

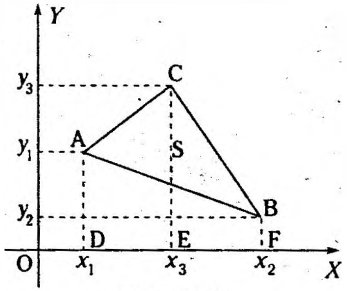


Figura 3.50

$$S=S_{ADEC}+S_{BCEF}-S_{ABFD}\ \ldots\ldots\ldots\ (i)$$

$$S_{ADEC}=\frac{(y_3+y_1)(x_3-x_1)}{2}\ \ldots\ldots\ (ii)$$

$$S_{BCEF}=\frac{(y_3+y_2)(x_2-x_3)}{2}\ \ldots\ldots\ (iii)$$

$$S_{ABFD}=\frac{(y_1+y_2)(x_2-x_1)}{2}\ \ldots\ldots\ (iv)$$

Sustituyendo (*ii*), (*iii*) y (*iv*) en (*i*) obtenemos la fórmula requerida.

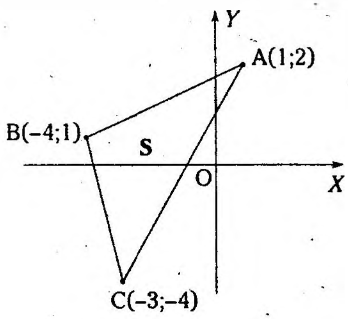
Observación

El área S de una región poligonal con n vértices tal que $P_1(x_1;\, y_1)$, $P_2(x_2;\, y_2)$, ... , $P_n(x_n;\, y_n)$ es

$$S=\frac{1}{2}[(x_1-x_2)(y_1+y_2)+(x_2-x_3)(y_2+y_3)+\ldots+(x_n-x_1)(y_n+y_1)]$$

Ejemplo

Calcule el valor del área de la región triangular cuyos vértices son A(1;2), B(−4;1) y C(−3;−4).



(a)

Resolución

En la figura 3.51(a), S representa el área de la región triangular ABC.

Entonces, iniciando del punto A

$$2S=1(1-(-4))+(-4)(-4-2)+(-3)(2-1)$$

$$2S=1(5)+(-4)(-6)+(-3)(1)$$

$$2S=26$$

Finalmente $S=13\ u^2$

Otra forma de obtener el área S es la siguiente:

	1	2	
−8	−4	1	1
−3	−3	−4	16
−4	1	2	−6
−15			11

Se coloca en columnas las coordenadas de los vértices del triángulo (en sentido antihorario) repitiendo el vértice del triángulo por el cual se ha comenzado, luego se multiplica en diagonales colocando los resultados a la derecha e izquierda. Finalmente, el área S será la semidiferencia de las sumas de los productos obtenidos a la derecha con la suma de los productos obtenidos a la izquierda.

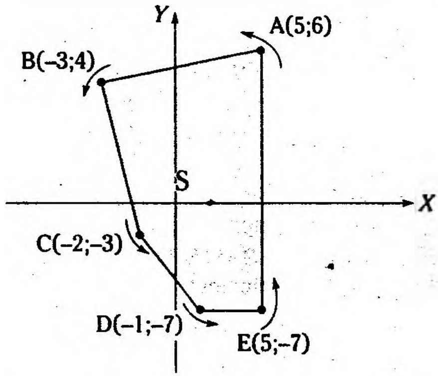
De acuerdo al método enunciado se cumple

$$S=\frac{1}{2}[11-(-15)]$$

$\therefore\ S=13\ u^2$

Con un procedimiento similar al anterior podemos obtener el área de una región poligonal, para ello preste atención a como calculamos el área de una región pentagonal ABCDE cuyos vértices son (5;6); (−3;4); (−2;−3); (−1;−7) y (5;−7).

Según las coordenadas de los vértices se representa el pentágono ABCDE



(b)

Figura 3.51

Entonces, iniciando del punto A y ubicando las coordenadas de los vértices del triángulo (en sentido antihorario) en el arreglo

	5	6	
−18	−3	4	20
−8	−2	−3	9
3	−1	−7	14
−35	5	−7	7
−35	5	6	30
−93			80

De donde $S=\dfrac{80-(-93)}{2}$

$S=86,5\ u^2$

Ángulo Trigonométrico en Posición Normal (estándar o regular)

Es el ángulo trigonométrico generado en un plano cartesiano con vértice **en el origen de** coordenadas y cuyo lado inicial coincide con el eje positivo de las abscisas. El lado **terminal puede** ubicarse en cualquier cuadrante o semieje del plano cartesiano.

En la figura 3.52(a) se tiene un ángulo trigonométrico α .

Entonces en la figura 3.52(b) se tiene el mismo ángulo α pero está en **posición normal**.

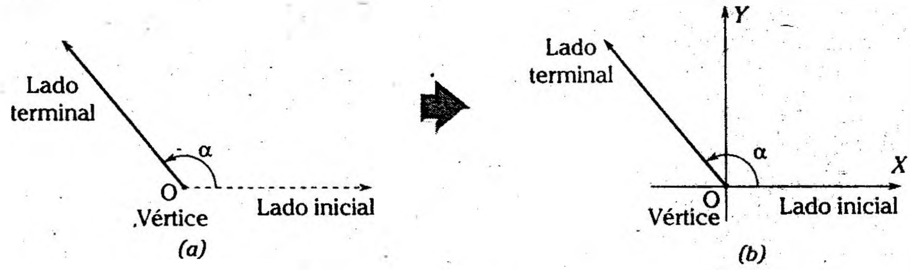


Figura 3.52

Clasificación

Los ángulos en posición normal pueden clasificarse de acuerdo con la posición de sus lados terminales (o lados finales) de la siguiente manera

a) Ángulos que pertenecen a algún cuadrante

Un ángulo pertenece al IC, IIC, IIIC o IVC si solo si dichos ángulos se encuentran en posición normal y su lado final se ubica en el IC, IIC, IIIC o IVC respectivamente.

Ejemplo 1

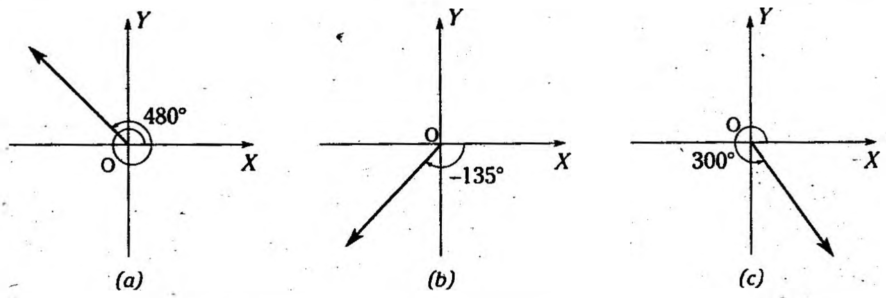


Figura 3.53

En la figura 3.53 los ángulos 480°; –135° y 300° se encuentran en posición normal.

Por lo tanto, se cumple $480° \in$ IIC, $-135° \in$ IIIC y $300° \in$ IVC .

Ejemplo 2

Determine el cuadrante al que pertenecen los siguientes ángulos

$\alpha = -30^\circ$; $\beta = 100^\circ$; $\theta = 500^\circ$; $\phi = \dfrac{5\pi}{4}$

Resolución

Luego que el lector dibuje los ángulos en posición normal, debe comprobar que

$\alpha \in IVC$; $\beta \in IIC$; $\theta \in IIC$; $\phi \in IIIC$

b) **Angulos Cuadrantales**

Los ángulos en posición normal cuyo lado final coincide con algún eje del plano cartesiano, son denominados ángulos cuadrantales.

Ejemplos

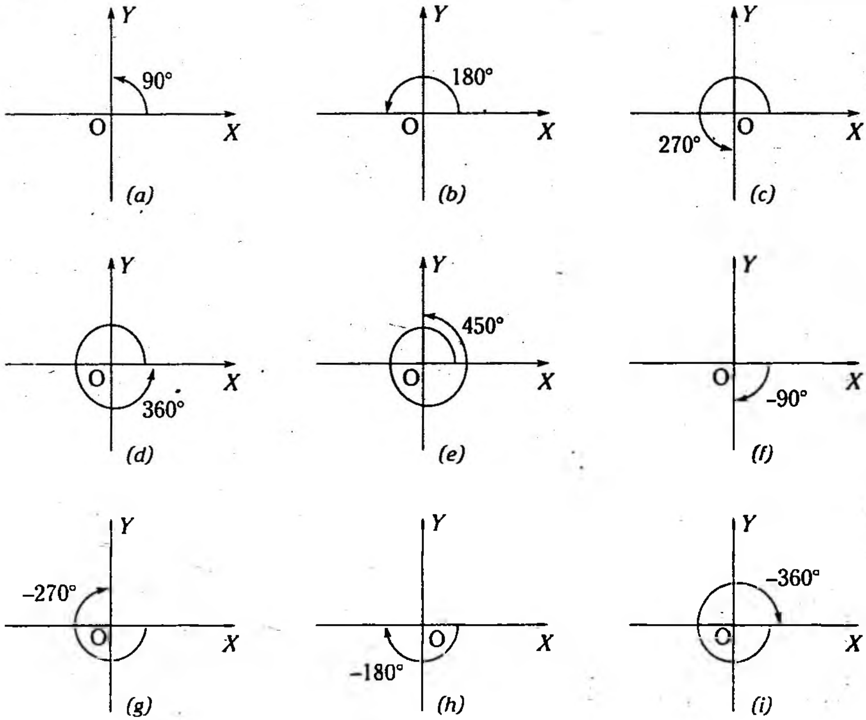


Figura 3.54

Nota

- Un ángulo cuadrantal no pertenece a ningún cuadrante.
- La medida de un ángulo cuadrantal es de la forma $n(90^\circ)$ o $\left(\dfrac{n\pi}{2}\right)$; donde $n \in \mathbb{Z}$

DEFINICIÓN DE RAZONES TRIGONOMÉTRICAS

Sea $P(x;y) \neq O(0;0)$ y θ es un ángulo en posición normal.

Si P es un punto perteneciente al lado final del ángulo θ, entonces las razones trigonométricas de θ se definen de la siguiente manera:

- $\operatorname{sen}\theta = \frac{y}{r}$
- $\cos\theta = \frac{x}{r}$
- $\tan\theta = \frac{y}{x}$
- $\cot\theta = \frac{x}{y}$
- $\sec\theta = \frac{r}{x}$
- $\csc\theta = \frac{r}{y}$

Donde r es el radio vector de P, entonces $r = \sqrt{x^2 + y^2}$

Ejemplo 1

En la figura 3.55 calcule los valores de las razones trigonométricas de α.

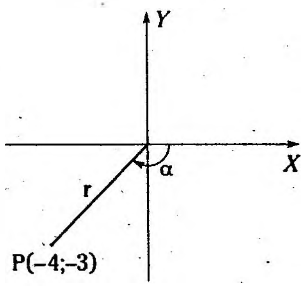


Figura 3.55

Resolución

Cálculo del radio vector de P

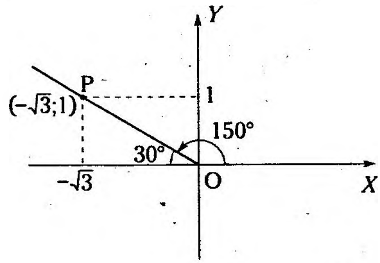
$$r = \sqrt{(-4)^2 + (-3)^2} = 5$$

Luego, aplicando definición tenemos

- $\operatorname{sen}\alpha = \frac{-3}{5} \Rightarrow \csc\alpha = \frac{5}{-3} = -\frac{5}{3}$
- $\cos\alpha = \frac{-4}{5} \Rightarrow \sec\alpha = \frac{5}{-4} = -\frac{5}{4}$
- $\tan\alpha = \frac{-3}{-4} = \frac{3}{4} \Rightarrow \cot\alpha = \frac{4}{3}$

Ejemplo 2

Calcule las razones trigonométricas de 150° y –45°.



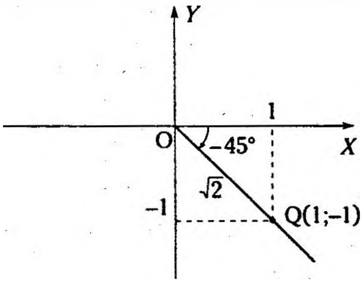
(a)

Resolución

Primero ubicamos 150° en posición normal como observamos en la figura 3.56(a); sobre el lado final cogemos un punto P tal que su radio vector sea r=2. Entonces las coordenadas de P serán $-\sqrt{3}$ y 1, luego por definición tenemos

- $\operatorname{sen}150° = \frac{1}{2} \Rightarrow \csc150° = 2$
- $\cos150° = \frac{-\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \sec150° = \frac{-2\sqrt{3}}{3}$
- $\tan150° = \frac{-\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \cot150° = -\sqrt{3}$

Análogamente para $-45°$, notamos que el radio vector de Q es $\sqrt{2}$ (figura 3.56(b)), luego tenemos



(b)

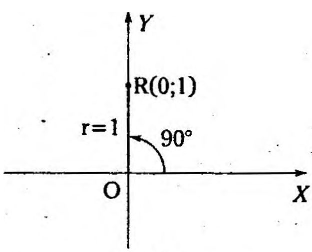
Figura 3.56

- $\text{sen}(-45°) = \dfrac{-1}{\sqrt{2}} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \csc(-45°) = -\sqrt{2}$
- $\cos(-45°) = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \sec(-45°) = \sqrt{2}$
- $\tan(-45°) = \dfrac{-1}{1} = -1 \Rightarrow \cot(-45°) = -1$

Ejemplo 3

Calcule las razones trigonométricas de 90° y 180°.

Resolución

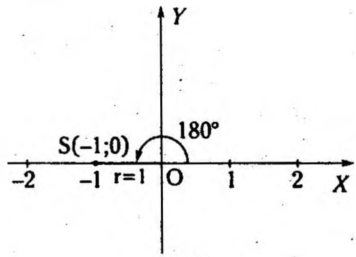


(a)

De la figura 3.57(a), asumiendo un punto R(0;1) en el lado final de 90°, tenemos

- $\text{sen}\,90° = \dfrac{1}{1} = 1 \Rightarrow \csc 90° = 1$
- $\cos 90° = \dfrac{0}{1} = 0 \Rightarrow \sec 90° = \dfrac{1}{0}$ (No definido)
- $\tan 90° = \dfrac{1}{0}$ (No definido)

  $\Rightarrow \cot 90° = \dfrac{0}{1} = 0$



(b)

Figura 3.57

De la figura 3.57(b), asumiendo un punto S(–1;0) en el lado final de 180°, tenemos

- $\text{sen}\,180° = \dfrac{0}{1} = 0 \Rightarrow \csc 180° = \dfrac{1}{0}$

  (No definido)
- $\cos 180° = \dfrac{-1}{1} = -1 \Rightarrow \sec 180° = \dfrac{1}{-1} = -1$
- $\tan 180° = \dfrac{0}{-1} = 0 \Rightarrow \cot 180° = \dfrac{-1}{0}$

  (No definido)

Los valores de las razones trigonométricas de otros ángulos cuadrantales, se obtienen mediante procedimientos similares a los ejemplos anteriores.

En el cuadro adjunto se tiene valores de las razones trigonométricas de los ángulos cuadrantales de mayor aplicación.

	senθ	cosθ	tanθ	cotθ	secθ	cscθ
0°	0	1	0	nd	1	nd
90°	1	0	nd	0	nd	1
180°	0	–1	0	nd	–1	nd
270°	–1	0	nd	0	nd	–1
360°	0	1	0	nd	1	nd

Figura 3.58

Donde nd: no definido

Signos de las Razones Trigonométricas en los Cuadrantes

Los signos de las razones trigonométricas de un ángulo en posición normal θ que no es cuadrantal, se indican en el siguiente cuadro:

	$\operatorname{sen}\theta$	$\cos\theta$	$\tan\theta$	$\cot\theta$	$\sec\theta$	$\csc\theta$
$\theta\in IC$	+	+	+	+	+	+
$\theta\in IIC$	+	–	–	–	–	+
$\theta\in IIIC$	–	–	+	+	–	–
$\theta\in IVC$	–	+	–	–	+	–

Figura 3.59

En efecto, de la definición de las razones trigonométricas se puede verificar los signos del cuadro anterior, considerando las coordenadas del punto P(x;y), perteneciente al lado final de θ. Tener en cuenta que el radio vector r del punto P es positivo por ser una distancia.

Ejemplo 1

a) $P\in IC$ o $(\theta\in IC)\Rightarrow x>0\ ;\ y>0$, entonces se comprueba que todas las razones trigonométricas de θ son de signo positivo.

b) Si $P\in IIC$ o $(\theta\in IIC)\Rightarrow x<0\ ;\ y>0$,

entonces se comprueba que $\operatorname{sen}\theta=\frac{y}{r}$ y $\csc\theta=\frac{r}{y}$ son las únicas razones trigonométricas positivas, las restantes son de signo negativo.

c) Si $P\in IIIC$ o $(\theta\in IIIC)\Rightarrow x<0\ ;\ y<0$,

entonces se comprueba que $\tan\theta=\frac{y}{x}$ y $\cot\theta=\frac{x}{y}$; son las únicas razones trigonométricas positivas, las restantes son de signo negativo.

d) Si $P\in IVC$ o $(\theta\in IVC)\Rightarrow x>0\ ;\ y<0$, entonces se comprueba que $\cos\theta=\frac{x}{r}$ y $\sec\theta=\frac{r}{x}$ son las únicas razones trigonométricas positivas, las restantes son de signo negativo.

Ejemplo 2

Analice la verdad o falsedad de las siguientes proposiciones:

a) Si $\operatorname{sen}\alpha$ es negativo, entonces $\alpha\in IIIC$ o IVC.

b) Si $\theta\in IIIC$, entonces el producto $\tan\theta\sec\theta$ es de signo negativo

Resolución

a) **Falso**, porque si $\alpha=270°$, el $\operatorname{sen}\alpha$ es negativo (–1), pero 270° por ser cuadrantal no pertenece a cuadrante alguno.

b) **Verdadero**, porque si $\theta\in IIIC$, entonces $\tan\theta$ es positivo y $\sec\theta$ es negativo, por lo tanto $\tan\theta\sec\theta<0$.

Ejemplo 3

Determine el signo de las razones trigonométricas dadas.

a) sen 300°

b) cot(−140°)

c) cos 135°

Resolución

a) Como 300°∈ IVC, entonces sen300° es de signo negativo.

b) Como −140°∈ IIIC, entonces cot(−140°) es de signo positivo.

c) Como 135°∈ IIC, entonces cos135° es de signo negativo.

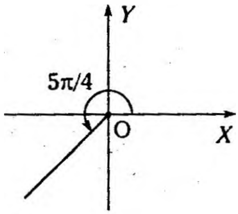
Ejemplo 4

Halle el signo de P si

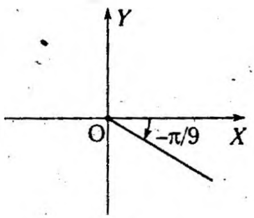
$$P = \operatorname{sen}\frac{5\pi}{4}\cos\left(-\frac{\pi}{9}\right)+\tan\left(\frac{7\pi}{3}\right)\cos\pi$$

Resolución

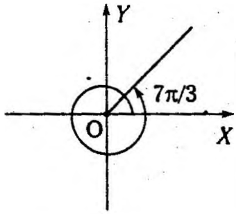
Para identificar el signo de cada razón trigonométrica, es necesario conocer el cuadrante del ángulo, así como se muestra en la figura 3.60



(a)



(b)



(c)

Figura 3.60

Además $\cos\pi = -1$

Reemplazando signos en P tenemos

$$P = \underbrace{(-)(+)} + \underbrace{(+)(-)}$$

$$P = \quad (-) \quad + \quad (-)$$

La suma de dos números negativos dará como resultado un número negativo, entonces P es de signo negativo.

Ángulos Coterminales

En el capítulo I, se definió que aquellos ángulos trigonométricos que tienen el mismo lado inicial, lado terminal y vértice, respectivamente, se denominan ángulos coterminales. Ahora bien, si se presentan estos ángulos en posición normal y se aplican las definiciones de las razones trigonométricas, podemos concluir que las razones trigonométricas de ángulos coterminales son respectivamente iguales.

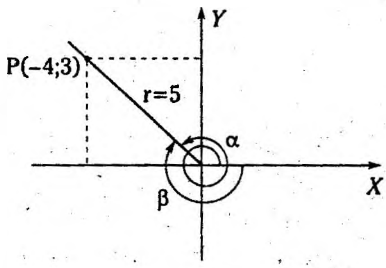


Figura 3.61

De la figura 3.61, α y β son ángulos coterminales, donde por definición se cumple

$$\operatorname{sen}\alpha=\frac{3}{5} \quad y \quad \operatorname{sen}\beta=\frac{3}{5}$$

$$\cos\alpha=-\frac{4}{5} \quad y \quad \cos\beta=-\frac{4}{5}$$

$$\tan\alpha=-\frac{3}{4} \quad y \quad \tan\beta=-\frac{3}{4}$$

Propiedad de ángulos coterminales

Siendo α y β ángulos coterminales, se cumple

i) $\alpha=360°n+\beta \;; n\in Z$

ii) $\operatorname{sen}\alpha=\operatorname{sen}\beta \wedge \cos\alpha=\cos\beta$

$\Rightarrow R.T.(\alpha)=R.T.(\beta) \;;\; n\in Z$

iii) $R.T.(360°n+\beta)=R.T.(\beta);\; n\in Z$

En esta última relación se observa que el número entero de vueltas se elimina.

Ejemplos

a) $\operatorname{sen}750°=\operatorname{sen}(\cancel{2\times360°}+30°)=\operatorname{sen}30°=\frac{1}{2}$

b) $\cos1125°=\cos(\cancel{3\times360°}+45°)=\cos45°=\frac{\sqrt{2}}{2}$

c) $\tan\frac{61\pi}{3}=\tan\left(20\pi+\frac{\pi}{3}\right)=\tan\left(\cancel{10\times2\pi}+\frac{\pi}{3}\right)$

$\tan\frac{61\pi}{3}=\tan\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$

d) $\csc(-1763°)=\csc(-5\times360°+37°)$

$\csc(-1763°)=\csc37°=\frac{5}{3}$

De los ejemplos anteriores, los ángulos 750°, 1125°, $\frac{61\pi}{3}$ y $-1763°$ son ángulos coterminales con 30°, 45°, $\frac{\pi}{3}$ y 37° respectivamente.

Observación

Nótese que para obtener todos los ángulos coterminales de un determinado ángulo a éste se le suma un número entero de vueltas $(2\pi K\,;K\in Z)$

Ejemplos

a) Los ángulos coterminales de 0 serán $0+2\pi K$ ó $2\pi K$, es decir $\{-4\pi;-2\pi;0;2\pi;4\pi;...\}$

b) Los ángulos coterminales de $\frac{\pi}{2}$ serán $\frac{\pi}{2}+2\pi K$ o $(4K+1)\frac{\pi}{2}$, es decir

$$\left\{...;-\frac{3\pi}{2};\frac{\pi}{2};\frac{5\pi}{2};\frac{9\pi}{2};...\right\}$$

c) Los ángulos coterminales de π serán $\pi+2\pi K$ o $(2K+1)\pi$, es decir

$$\{...;-3\pi;-\pi;\pi;3\pi;...\}$$

d) Los ángulos coterminales de $\frac{3\pi}{2}$ serán $\frac{3\pi}{2}+2\pi K$ o $(4K+3)\frac{\pi}{2}$, es decir

$$\left\{...;\frac{-5\pi}{2};-\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2};\frac{7\pi}{2};...\right\}$$

Entonces

- Si $\theta\in IC$ se cumple $2\pi K<\theta<(4K+1)\frac{\pi}{2}$
- Si $\theta\in IIC$ se cumple $(4K+1)\frac{\pi}{2}<\theta<(2K+1)\pi$
- Si $\theta\in IIIC$ se cumple $(2K+1)\pi<\theta<(4K+3)\frac{\pi}{2}$
- Si $\theta\in IVC$ se cumple $(4K+3)\frac{\pi}{2}<\theta<2\pi+2\pi K$

Nota

Si θ es un ángulo positivo y menor a una vuelta $(0<\theta<2\pi)$, entonces

- Si $\theta\in IC$, se cumple

  $0<\theta<\frac{\pi}{2}$ ó $0<\theta<90°$

- Si $\theta\in IIC$, se cumple

  $\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$ ó $90°<\theta<180°$

- Si $\theta\in IIIC$, se cumple

  $\pi<\theta<\frac{3\pi}{2}$ ó $180°<\theta<270°$

- Si $\theta\in IVC$, se cumple

  $\frac{3\pi}{2}<\theta<2\pi$ ó $270°<\theta<360°$

Ejemplo 1

Si $\theta\in IIC$ y $\theta\in\langle 2\pi;4\pi\rangle$ halle el signo del producto $\operatorname{sen}\theta\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\tan\left(\frac{\theta}{3}\right)$

Resolución

Como $\theta\in IIC$, se cumple

$$(4K+1)\frac{\pi}{2}<\theta<(2K+1)\pi \;;\; K\in\mathbb{Z}$$

Si $K=0 \Rightarrow \frac{\pi}{2}<\theta<\pi$ ... no verifica

$K=1 \Rightarrow \frac{5\pi}{2}<\theta<3\pi$ ...verifica $\theta\in\langle 2\pi;4\pi\rangle$

$K=2 \Rightarrow \frac{9\pi}{2}<\theta<5\pi$ ... no verifica

De los datos se concluye que $\frac{5\pi}{2}<\theta<3\pi$

$$\Rightarrow \frac{5\pi}{4}<\frac{\theta}{2}<\frac{3\pi}{2} \quad y \quad \frac{5\pi}{6}<\frac{\theta}{3}<\pi$$

$$\therefore \frac{\theta}{2}\in IIIC \quad y \quad \frac{\theta}{3}\in IIC$$

Hallando el signo del producto dado

$$\operatorname{sen}\theta\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\tan\left(\frac{\theta}{3}\right)=(+)(-)(-)=(+)$$

Ejemplo 2

Si $\theta\in IC$, halle el signo de $\tan\frac{\theta}{2}$

Resolución

Como $\theta\in IC$ se cumple

$$2K\pi<\theta<(4K+1)\frac{\pi}{2} \;;\; k\in\mathbb{Z}$$

Entonces, dividiendo por 2 se obtiene

$$K\pi<\frac{\theta}{2}<(4K+1)\frac{\pi}{4}$$

- Para $K=0 \Rightarrow 0<\frac{\theta}{2}<\frac{\pi}{4}$

  Observamos que $\frac{\theta}{2}\in IC$

- Para $K=1 \Rightarrow \pi<\frac{\theta}{2}<\frac{5\pi}{4}$

  Observamos que $\frac{\theta}{2}\in IIIC$

- Para $K=2 \Rightarrow 2\pi<\frac{\theta}{2}<\frac{9\pi}{4}$

  Observamos que $\frac{\theta}{2}\in IC$

Si asumimos que K=3 obtendríamos que $\frac{\theta}{2}\in IIIC$

Por lo viso anteriormente, para los valores enteros de K, podemos concluir que el ángulo $\frac{\theta}{2}$ pertenece al primer o tercer cuadrante, esto es $\frac{\theta}{2}\in IC \vee IIIC$, entonces la $\tan\frac{\theta}{2}$ será siempre positivo.

$$\therefore \tan\frac{\theta}{2}=(+)$$

EJERCICIOS

Determine el cuadrante al que pertenecen los siguientes ángulos (en posición normal)

1. $-153°$

2. $1000°$

3. $281°$

4. $17\pi/6$

5. $-35\pi/9$

6. $-51\pi/4$

Determine el(los) cuadrante(s) al que pertenece α, tal que satisfacen las siguientes desigualdades

7. $\text{sen}\alpha<0 \wedge \cot\alpha>0$

8. $\cos\alpha\,\text{sen}\alpha<0$

9. $\tan\alpha<0 \wedge \cos\alpha<0$

10. $\tan^2\alpha\,.\sec\alpha<0$

11. $\dfrac{|\cos\alpha|}{\text{sen}\alpha}>0$

12. $\sec\alpha-\tan^2\alpha>0$

13. $\sqrt{\text{sen}\alpha}\tan\alpha<0$

14. $\tan\alpha\sqrt{\text{sen}\alpha-\cot\alpha}>0$

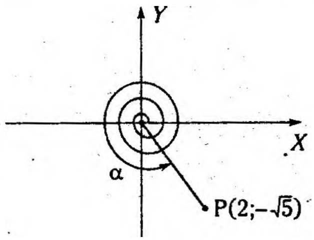
15. $\tan\alpha=[\![\text{sen}\alpha]\!]-\text{sen}\alpha$

16. $e^{\cot\alpha}<1 \wedge |\sec\alpha|=-\sec\alpha$

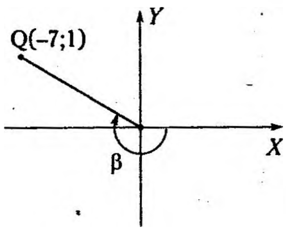
17. $\csc\alpha\log_{\sec\alpha}\cos\alpha>0$

En los siguientes gráficos, determine el valor de

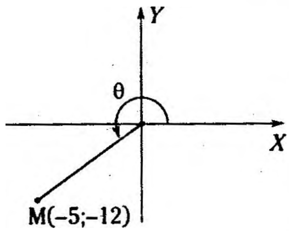
18. $A=\cos\alpha-\sqrt{5}\,\text{sen}\alpha$



19. $B=\text{sen}\beta.\cos\beta$



20. $C=\tan\theta+\sec\theta$



RESPUESTAS

1. IIIC

2. IVC

3. IVC

4. IIC

5. IC

6. IIIC

7. $\alpha\in$ IIIC

8. $\alpha\in$ IIC ; IVC

9. $\alpha\in$ IIC

10. $\alpha\in$ IIC ; IIIC

11. $\alpha\in$ IC ; IIC

12. $\alpha\in$ IC ; IVC

13. $\alpha\in$ IIC

14. $\alpha\in$ IC

15. $\alpha\in$ IIC ; IVC

16. $\alpha\in$ IIC

17. $\alpha\in$ IVC

18. $A=7/3$

19. $B=-7/50$

20. $C=-1/5$

Problemas Resueltos

Problema 1

Si P(–3;5) es un punto del lado final del ángulo θ en posición normal, calcule $A=\sec\theta+\tan\theta$

Resolución

El radio vector de P será $r=\sqrt{(-3)^2+5^2}=\sqrt{34}$

$x=-3\,;\,y=5\,;\,r=\sqrt{34}$

Entonces de la definición tenemos

$$\Rightarrow\ A=\frac{\sqrt{34}}{-3}+\frac{5}{-3}$$

$$\therefore\ A=-\left(\frac{\sqrt{34}+5}{3}\right)$$

Problema 2

Si $\cos^2\theta=\frac{1}{9}$ y $\theta\in$ IIIC, calcule $\tan\theta+\cot\theta$

Resolución

Del dato $\cos\theta=\pm\frac{1}{3}$. Como $\theta\in$ IIIC, entonces $\cos\theta$ es negativo, por lo tanto $\cos\theta=-\frac{1}{3}$

Sea P(x;y) un punto del lado final del ángulo θ, que puede ser cualquiera de los infinitos ángulos en posición normal, positivos o negativos cuyo lado terminal pasa por el punto P (figura 3.62). Las razones trigonométricas de estos ángulos serán iguales (por ser ángulos coterminales).

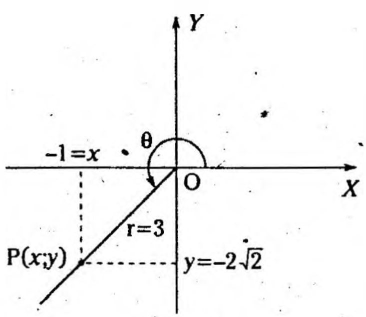


Figura 3.62

$$\cos\theta=\frac{x}{r}=-\frac{1}{3}$$

$\Rightarrow$ considerando $x=-1$ se obtiene $r=3$

Recuerde

$$y^2=r^2-x^2\ \Rightarrow\ y^2=8\ \Rightarrow\ y=\pm2\sqrt{2}$$

Como $\theta\in$ IIIC, tomamos $y=-2\sqrt{2}$

Por definición

$$\tan\theta=\frac{y}{x}=\frac{-2\sqrt{2}}{-1}=2\sqrt{2}\ \Rightarrow\ \cot\theta=\frac{1}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{4}$$

Finalmente

$$\tan\theta+\cot\theta=2\sqrt{2}+\frac{\sqrt{2}}{4}=\frac{9\sqrt{2}}{4}$$

$$\therefore\ \tan\theta+\cot\theta=\frac{9\sqrt{2}}{4}$$

Problema 3

Sabiendo que $\cos\alpha=-0{,}96$; $\frac{-3\pi}{2}<\alpha<-\pi$

Calcule $P=\operatorname{sen}\alpha(2\cot\alpha+4)$

Resolución

Del dato $\cos\alpha=\frac{-96}{100}=\frac{-24}{25}=\frac{x}{r}$

$\Rightarrow$ Tomando $x=-24$

tenemos $r=25$

obteniéndose $y=7$

Como $\frac{-3\pi}{2}<\alpha<-\pi\ \Rightarrow\ \alpha\in$ IIC

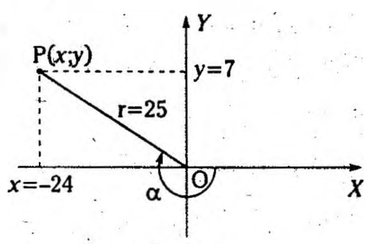


Figura 3.63

Se pide $P=\operatorname{sen}\alpha\,(2\cot\alpha+4)$

De la figura 3.63 (por definición de R.T.)

$$P=\frac{7}{25}\left(2\left(\frac{-24}{7}\right)+4\right)$$

$$\therefore\ P=-\frac{4}{5}$$

Problema 4

Del gráfico, halle $\operatorname{sen}\theta\cos\theta$, sabiendo que las coordenadas de A y B son (–10;12) y (6;4) respectivamente. Además AB=4AM.

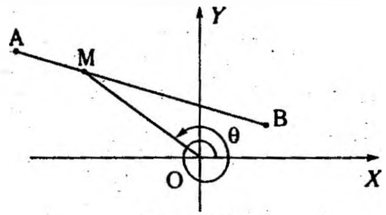


Figura 3.64

Resolución

De la figura AB=AM+MB

entonces 4AM=AM+MB $\Rightarrow \dfrac{AM}{MB}=\dfrac{1}{3}$

Sea M(*x*; *y*), por división de un segmento en una razón dada (véase página 165) donde la razón es $\frac{1}{3}$.

Tenemos que

$$(x_1;y_1)=(-10,12)\ \text{ y }\ (x_2;y_2)=(6;4)$$

$$x=\frac{-10+\left(\frac{1}{3}\right)6}{1+\left(\frac{1}{3}\right)}=-6\ ;\ y=\frac{12+\left(\frac{1}{3}\right)4}{1+\left(\frac{1}{3}\right)}=10$$

entonces M(–6;10)

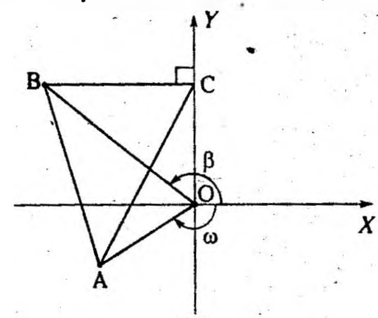
Como M es un punto perteneciente al lado final del ángulo θ en posición normal, donde el radio vector de M es $r=\sqrt{(-6)^2+10^2}=2\sqrt{34}$

$$\Rightarrow \operatorname{sen}\theta\cos\theta=\left(\frac{10}{2\sqrt{34}}\right)\left(\frac{-6}{2\sqrt{34}}\right)=\frac{-15}{34}$$

$$\therefore \operatorname{sen}\theta\cos\theta=\frac{-15}{34}$$

Problema 5

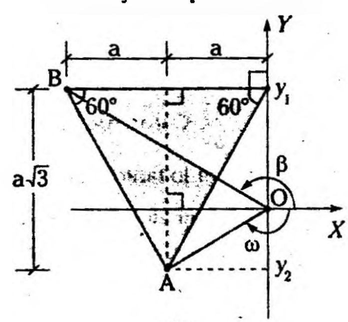
Siendo ABC un triángulo equilátero, obtenga el valor de la expresión $k=\tan\omega-2\tan\beta$



(a)

Resolución

Observamos que los ángulos β y ω se presentan en posición normal, entonces busquemos las coordenadas de B y A respectivamente.



(b)

Figura 3.65

Sea 2a la longitud del lado del ΔABC, luego de la figura 3.65(b) $B(-2a;y_1)$ y $A(-a;y_2)$

también $y_1-y_2=a\sqrt{3}$

Por definición de razón trigonométrica

$$\tan\beta=\frac{y_1}{-2a}\ ,\ \text{además}\ \tan\omega=\frac{y_2}{-a}$$

Reemplazando en k

$$k=\left(\frac{y_2}{-a}\right)-2\left(\frac{y_1}{-2a}\right)=\frac{y_1-y_2}{a}=\frac{a\sqrt{3}}{a}=\sqrt{3}$$

$$\therefore\ k=\sqrt{3}$$

Problema 6

Si el área de la región triangular ABC es 10 u^2, calcule $H=3\tan\alpha-8\tan\theta$.

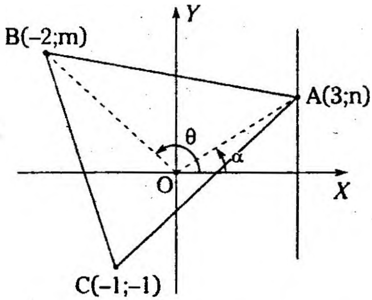


Figura 3.66

Resolución

De la figura 3.66, por definición tenemos

$$\tan\alpha=\frac{n}{3} \text{ y } \tan\theta=\frac{m}{-2}$$

Luego reemplazando en H

$$H=3\left(\frac{n}{3}\right)-8\left(\frac{m}{-2}\right)=n+4m \text{ ...(1)}$$

Si S es el área de la región triangular ABC, entonces, empleando la fórmula de la página **168**.

$$\Rightarrow \ 2S=3(m+1)+(-2)(-1-n)+(-1)(n-m)$$

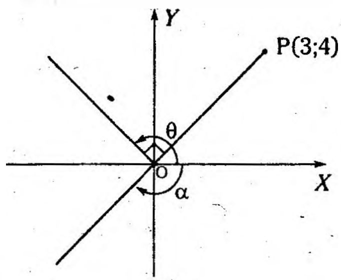
$$\Rightarrow \ 2(10)=4m+n+5 \ \Rightarrow 4m+n=15 \text{ ... (2)}$$

Reemplazando (2) en (1) tenemos H=15

Problema 7

De la figura 3.67(a) adjunta calcule

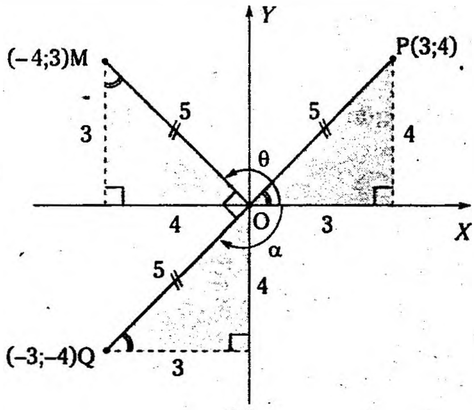
$$k=\cos\alpha\,[\sec\theta\tan\alpha-2\csc\theta]$$



(a)

Resolución

Como θ y α se encuentran en posición normal, lo único que falta es hallar las coordenadas de cualquier punto de sus respectivos lados terminales (diferentes al origen).



(b)

Figura 3.67

En la figura 3.67(b), se ha considerado que OP=OM=OQ=5

Asimismo, los triángulos rectángulos sombreados son congruentes, entonces

$$M=(-4;3) \text{ y } Q=(-3;-4)$$

Por definición, de R.T. se obtiene

$$\cos\alpha=\frac{-3}{5} \ \wedge \ \tan\alpha=\frac{-4}{-3}=\frac{4}{3}$$

$$\sec\theta=\frac{5}{-4} \ \wedge \ \csc\theta=\frac{5}{3}$$

Reemplazando en k tenemos

$$k=\frac{-3}{5}\left(\frac{5}{-4}\cdot\frac{-4}{-3}-2\cdot\frac{5}{3}\right)$$

$$k=\frac{-3}{5}\left(-\frac{5}{3}-\frac{10}{3}\right)=3$$

$\therefore\ k=3$

Problema 8

Halle la medida de dos ángulos coterminales sabiendo que el menor es a la suma como 3 es a 26 y que la suma es mayor que 1400° pero menor que 1600°.

Resolución

Sean α y θ los ángulos coterminales, además $\alpha > \theta$ según del enunciado del problema, planteamos

$$\frac{\theta}{\alpha+\theta}=\frac{3}{26} \quad ...(1)$$

$$1400° < \alpha + \theta < 1600° ... (2)$$

De (1)

$$\alpha = \frac{23}{3}\theta \; ... (3)$$

Reemplazando (3) en (2) tenemos

$$1400° < \frac{23}{3}\theta + \theta < 1600°$$

$$\Rightarrow \; 1400° < \frac{26}{3}\theta < 1600° ...(4)$$

Como α y θ son ángulos coterminales, entonces

$\alpha - \theta = n(360°)$; $n \in \mathbb{Z}$

$$\Rightarrow \; \frac{23}{3}\theta - \theta = n(360°) \Rightarrow \theta = 54°n \; ...(5)$$

Reemplazando (5) en (4)

$$1400° < \frac{26}{3}n(54°) < 1600°$$

$$\Rightarrow 1400° < 468°n < 1600°$$

el único valor entero para n que hace posible la desigualdad anterior es n=3.

Por lo tanto, en (5): $\theta = 3(54°) = 162°$

Como $\alpha = \frac{23}{3}\theta \Rightarrow \alpha = \frac{23}{3}(162°) = 1242°$

$\therefore$ La medida de los ángulos será 162° y 1242°

Problema 9

Siendo A, B y C ángulos cuadrantales diferentes, positivos y menores o iguales a 360°, además se cumple

$$\sqrt{1-\cos A} + \sqrt{\cos A - 1} = 1 + \operatorname{sen} B \; ...(1)$$

$$\sqrt{\csc B + 2} = |\tan C - 1| \; ...(2)$$

Determine el valor de A+B+C.

Resolución

Recordando el teorema

$$\sqrt{a} \geq 0 \Leftrightarrow a \geq 0$$

Luego analizamos en la condición (1)

$$1-\cos A \geq 0 \quad y \quad \cos A - 1 \geq 0$$

$$\cos A \leq 1 \quad y \quad \cos A \geq 1$$

$$\Rightarrow \cos A = 1 \Rightarrow A = 360° \in \langle 0; 360°]$$

Reemplazando cosA=1, en (1)

$$\sqrt{1-1} + \sqrt{1-1} = 1 + \operatorname{sen} B \Rightarrow \operatorname{sen} B = -1$$

$$\Rightarrow B = 270° \in \langle 0; 360°]$$

Reemplazando cscB=−1 en (2)

$$\sqrt{-1+2} = |\tan C - 1| \Rightarrow |\tan C - 1| = 1$$

Recordando el teorema

$$|a| = b \; ; \; b > 0 \Rightarrow a=b \; ó \; a=-b$$

Luego

$$\tan C - 1 = 1 \quad ó \quad \tan C - 1 = -1$$

$$\tan C = 2 \quad ó \quad \tan C = 0$$

Como A, B y C son diferentes y cuadrantales

Luego

$$\tan C = 0 \Rightarrow C = 180°$$

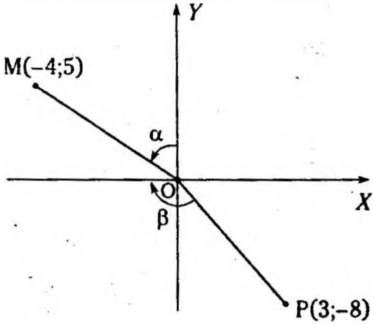
Finalmente

$$A + B + C = 360° + 270° + 180°$$

$\therefore \; A + B + C = 810°$

Problema 10

Del gráfico mostrado, calcule $E = \tan\alpha + \tan\beta$

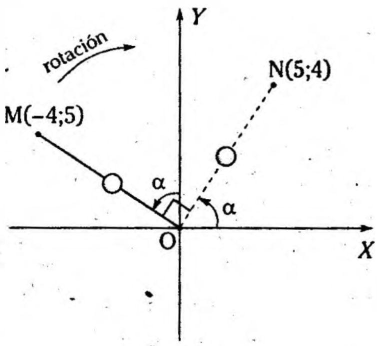


(a)

Resolución

Es evidente que las razones trigonométricas para los ángulos α y β no se pueden determinar por la definición dada, porque éstas no se presentan en posición normal. Sin embargo, haciendo un traslado de los ángulos de tal manera que el lado inicial coincida con el eje positivo de abscisas, así como se muestra en las siguientes figuras 3.68(b) y 3.68(c).

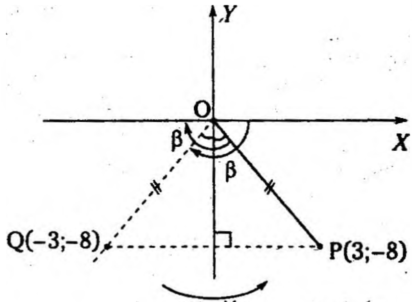
Para α



(b)

Se nota que los puntos M y N equidistan del origen de coordenadas, entonces $\tan\alpha = \dfrac{4}{5}$

Para β



(c)

Figura 3.68

Finalmente los puntos P y Q son simétricos respecto al eje *Y*.

$$\tan\beta = \frac{-8}{-3} = \frac{8}{3}$$

Reemplazando en la expresión E

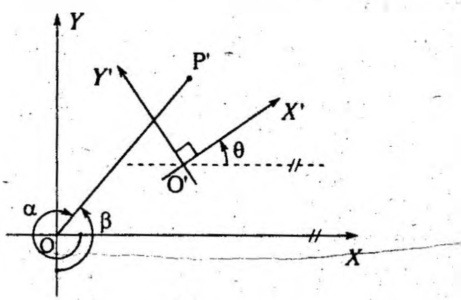
$$E = \frac{4}{5} + \frac{8}{3}$$

$$\therefore\ E = \frac{52}{15}$$

Problema 11

En la figura 3.69(a) se muestra un nuevo sistema *X'Y'*; generado por traslación y rotación de ejes del sistema convencional *XY*, donde el origen es O'(12;5) y el ángulo de rotación θ; así las coordenadas de P' en el nuevo sistema es (13;13) calcule $k = 22\cot\alpha + \sqrt{509}\cos\beta$.

Además $\tan\theta = 2{,}4$.

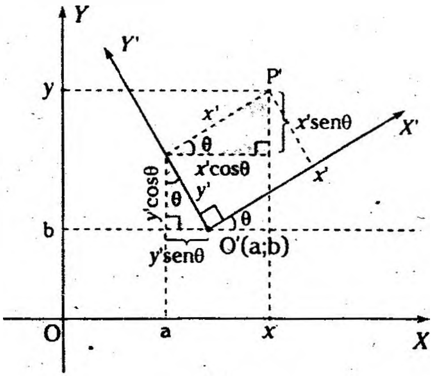


(a)

Resolución

Antes de ver la resolución del problema, veamos la relación de las coordenadas de un punto P, cuando se tiene traslación y rotación de ejes.

Dadas las coordenadas del punto P en el sistema $X'Y'$ generado por traslación y rotación de eje al punto O'(a;b) y ángulo θ respectivamente, calculamos las coordenadas del punto P en el sistema original XY.



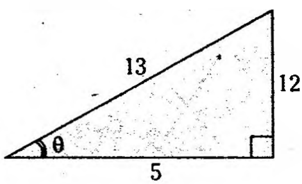
(b)

De la figura 3.69(b) se obtiene

$$x = a + x'\cos\theta - y'\operatorname{sen}\theta$$
$$y = b + x'\operatorname{sen}\theta + y'\cos\theta$$

Datos: O'(12;5) y P'(13;13)

Además $\tan\theta = 2{,}4$ luego



(c)

$$\Rightarrow \operatorname{sen}\theta = \frac{12}{13} \text{ y } \cos\theta = \frac{5}{13}$$

Aplicamos la fórmula detallada en la figura 3.69(b), para el cálculo de las coordenadas del punto P' con respecto al sistema XY, así

a) $x = a + x'\cos\theta - y'\operatorname{sen}\theta$

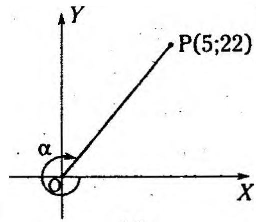
$$x = 12 + 13\left(\frac{5}{13}\right) - 13\left(\frac{12}{13}\right) \Rightarrow x = 5$$

b) $y = b + x'\operatorname{sen}\theta + y'\cos\theta$

$$y = 5 + 13\left(\frac{12}{13}\right) + 13\left(\frac{5}{13}\right) \Rightarrow y = 22$$

Sea P(x;y) las coordenadas de P'(13;13) en el sistema $X'Y'$; entonces en el sistema XY, P(5;22).

Cálculo de cot α

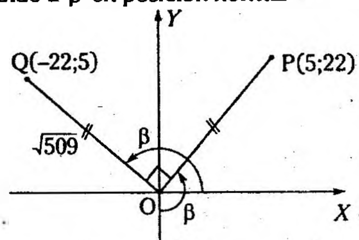


(d)

$$\Rightarrow \cot\alpha = \frac{5}{22}$$

Cálculo de cosβ

Dibujando a β en posición normal



(e)

Figura 3.69

$$\cos\beta = \frac{-22}{\sqrt{509}}$$

Sustituyendo valores en k, se tiene

$$k = 22\left(\frac{5}{22}\right) + \sqrt{509}\left(\frac{-22}{\sqrt{509}}\right)$$

$\therefore$ k = −17

Problemas Propuestos

1. Dados $A=\{x/x-3<\sec^2 60^\circ\}$

$B=\{x/2x-7\geq 3\tan 45^\circ\}$

halle la suma de los valores enteros que se obtiene al intersectar A y B.

A) 8 B) 9 C) 6
D) 11 E) 12

2. Para el ángulo θ agudo se cumple

$A=\{x/x=(2-3\cos\theta)^2\}$

$B=\{x/x=|4\operatorname{sen}\theta-1|\}$

Halle $A\cap B$

A) $[0;3\rangle$ B) $[-1;2\rangle$ C) $[0;2]$
D) $\langle 0;2\rangle$ E) $[0;2\rangle$

3. Si α,θ y ϕ son ángulos agudos que cumplen

$$(2\operatorname{sen}\theta-1)^8+(\sqrt{3}-3\cos\phi)^6=\sqrt[4]{\tan\alpha-10}+\sqrt{10-\tan\alpha}$$

halle $E=\sqrt{6}\csc\theta\cot\alpha\csc\phi$

A) $\frac{3}{7}$ B) $\frac{3}{5}$ C) $\frac{3}{10}$
D) $\frac{6}{5}$ E) 2

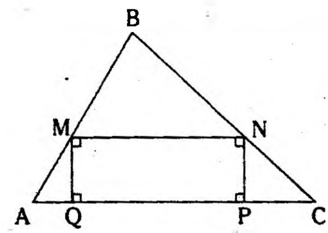
4. Si $\cot\alpha=\sqrt{\sqrt{3}-\tan\theta}+\sqrt{\tan\theta-1}$

halle la extensión de

$P=\tan^2\theta-2\sqrt{3}\tan\theta+6$

A) $\langle 3;7-2\sqrt{3}]$ B) $[3;6-2\sqrt{3}]$ C) $[3;7-\sqrt{3}]$
D) $[3;7-2\sqrt{3}]$ E) $[3;7-3\sqrt{3}]$

5. Del gráfico mostrado, determine la variación de perímetro del rectángulo MNPQ, si el área del triángulo MBN es 7 u^2 y BN=7 u; NC=2 u.



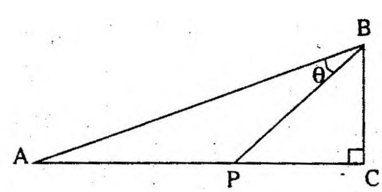
A) $\langle 4;+\infty\rangle$ B) $\langle 6;+\infty\rangle$ C) $[8;+\infty\rangle$
D) $[4;+\infty\rangle$ E) $\langle 8;+\infty\rangle$

6. Siendo θ un ángulo agudo, calcule la suma de todos los valores enteros de

$$y=4\operatorname{sen}^3\theta+12\operatorname{sen}\theta(1-\operatorname{sen}\theta)-2$$

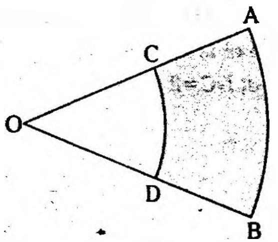
A) −2 B) −1 C) 0
D) 2 E) 5

7. Si $(AP)^2+(PB)^2$ es mínimo, calcule $\cot\theta$.
BC=1, AC=4



A) $\frac{3}{2}$ B) $\frac{5}{2}$ C) $\frac{7}{2}$
D) $\frac{9}{2}$ E) $\frac{11}{2}$

8. Halle el área máxima de la región sombreada siendo el perímetro de dicha región 2p. AOB y COD son sectores circulares.



A) p^2 B) $\frac{p^2}{2}$ C) $\frac{p^2}{3}$

D) $\frac{p^2}{4}$ E) $\frac{p^2}{6}$

9. Reduzca

$$E=\sqrt{\tan^2\theta-6\tan\theta+9}+\tan\theta$$

si $\tan\theta\in\langle 0;2\rangle$

A) 2 B) 3 C) 4

D) $\frac{2}{3}$ E) $\frac{4}{3}$

10. Si θ es un ángulo agudo calcule el valor de

$$M=\left|\cos\theta+\sqrt{\cos^2\theta-2|\cos\theta|+1}\right|$$

A) 0 B) 1 C) 2

D) $\frac{3}{4}$ E) $\frac{1}{2}$

11. Resuelva

$$\left|\pi x+\text{sen}\frac{\pi}{6}\right|=\tan\frac{\pi}{4}$$

Dé como respuesta la suma de los valores que satisfacen la igualdad.

A) $-\pi$ B) $\frac{1}{\pi}$ C) $\frac{-3}{\pi}$

D) $\frac{-1}{\pi}$ E) $\frac{-1}{2\pi}$

12. Halle la variación de $M=|3\text{sen}\,\theta-2|+1$ siendo θ un ángulo agudo.

A) $\langle 2;3\rangle$ B) $[2;3]$ C) $[0;3\rangle$

D) $\langle 0;3\rangle$ E) $[1;3\rangle$

13. Siendo θ un ángulo agudo, halle la extensión de $K=|2-3\csc\theta|+5$

A) $[6;+\infty\rangle$ B) $\langle 6;+\infty\rangle$ C) $\langle 5;+\infty\rangle$

D) $\langle 1;6\rangle$ E) $\langle 4;+\infty\rangle$

14. Resuelva para $\phi\in\langle 0;90°\rangle$

$$\sqrt{4\tan^2\phi-4|\tan\phi|+1}=\tan 45°-\text{sen}\,30°$$

señalando los valores aproximados de ϕ.

A) 37°, 16° B) 14°, 53° C) 14°, 30°
D) 37°, 14° E) 53°, 16°

15. Un auto parte de una estación hacia el norte, recorriendo 1 km, luego cambia a la dirección EθS llegando a un lugar que se encuentra en el rumbo NθE de la estación. Finalmente se dirige hacia el sur deteniéndose justo al este de la estación. Halle en kilómetros la máxima distancia de la estación al lugar donde se detuvo el auto.

A) 0,4 km B) 0,5 km C) 0,6 km
D) 0,2 km E) 0,8 km

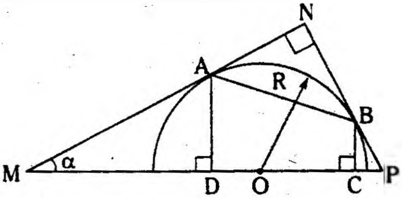
16. Del gráfico, calcule el mínimo valor de

$K = \dfrac{S}{\text{sen}\alpha\cos\alpha}$, en términos de R.

Donde

S: área del trapecio ABCD

A y B: puntos de tangencia

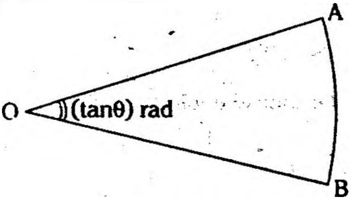


A) 2R B) $2R^3$ C) $2R^2$

D) R E) R^2

17. Del gráfico, calcule el mínimo valor del área del sector circular AOB

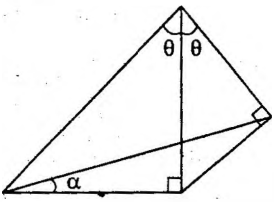
Si $\ell_{\overset{\frown}{AB}} = 2\tan\theta + 1$



A) 2 u^2 B) 4 u^2 C) 6 u^2

D) 8 u^2 E) 10 u^2

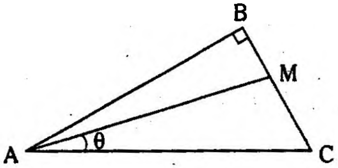
18. Del gráfico, calcule el máximo valor de $\tan\alpha$



A) $\sqrt{2}$ B) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ C) $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$

D) $2\sqrt{2}$ E) $4\sqrt{2}$

19. Del gráfico mostrada, calcule el máximo valor que puede tomar $\tan\theta$, si $BM - 2MC = 0$



A) $\dfrac{\sqrt{3}}{12}$ B) $\dfrac{\sqrt{6}}{6}$ C) $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$

D) $\dfrac{\sqrt{6}}{12}$ E) $\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$

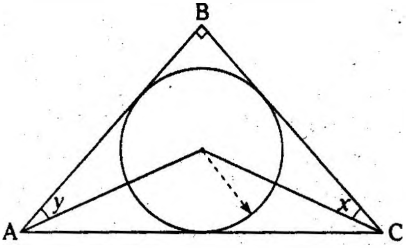
20. Desde los puntos en tierra P y Q se observa la parte más alta de un edificio de altura h, con ángulos de elevación θ y $90° - \theta$. Desde la base del edificio se observa la línea pintada $\overline{PQ}$ bajo un ángulo de 90°. Si la longitud de la línea pintada es 60 m, calcule el máximo valor en metros de h y el valor de θ que hace posible que h sea máximo.

A) $30\sqrt{2}$ m ; 30° B) $30\sqrt{3}$ m ; 45°

C) $60\sqrt{2}$ m ; 45°

D) $30\sqrt{2}$ m ; 45° E) $30\sqrt{3}$ m ; 30°

21. Del gráfico, determine el valor de $\cot x + \cot y$ de tal manera que la suma de AB y 3BC sea de valor máximo. Además AC=3.



A) $\dfrac{4\sqrt{10}+10}{3}$ B) $\dfrac{4\sqrt{10}+1}{3}$ C) $\dfrac{4\sqrt{10}+3}{3}$

D) 1 E) 2

22. Determine los valores de $|\csc x|$ si se verifica que la siguiente igualdad:

$$\frac{a^2(1+\tan^2 x)}{\tan^2 x-1}=\frac{4\,\text{sen}^2 x+a^2-1}{\tan^2 x-1}$$

presenta soluciones reales.

A) $\langle 1;\sqrt{2}\rangle$ B) $[1;4]-\{\sqrt{2}\}$

C) $[1;2]-\{\sqrt{2}\}$

D) $\langle 1;2]-\{\sqrt{2}\}$ E) $[1;\sqrt{2}\rangle$

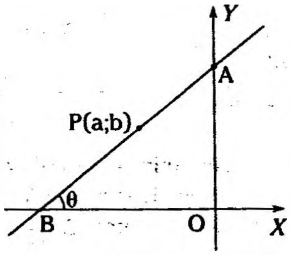
23. Si se cumple que

$m\leq||\tan x+1|-3|\leq n$; $\tan x\in\langle -2;4\rangle$

halle el mínimo valor de n−m.

A) 3 B) 4 C) 5
D) 6 E) 7

24. Halle el mínimo valor del área de la región triangular AOB.



A) a^2+b^2 B) a^2+b^2+ab C) $-2ab$
D) a^2+b^2+1 E) a^2+b^2+2

25. Siendo a y b cantidades positivas, tal que a>b halle el mínimo valor de la expresión

$a\sec\theta-b\tan\theta$

Considere $\theta\in\left\langle -\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right\rangle$

A) a+b B) $\sqrt{a+b}$ C) $\sqrt{a^2+b^2}$

D) $\sqrt{a-b}$ E) $\sqrt{a^2-b^2}$

26. Siendo a, b, c, k constantes, x, y, z variables que cumplen la relación

$a\tan x+b\tan y+c\tan z=k$

entonces el mínimo valor de

$\tan^2 x+\tan^2 y+\tan^2 z$ es

A) $\frac{k^2}{a+b+c}$

B) $\frac{k^2}{a^2+b^2+c^2}$

C) $\frac{k^2}{(a+b+c)^2}$

D) $\frac{2k^2}{(a^2+b^2+c^2)^2}$

E) $\frac{k^2}{2(a^2+b^2+c^2)}$

27. Si se cumple

$$\cot x+\cot y+\cot z=\frac{1}{\tan x+\tan y+\tan z}$$

determine el equivalente de

$$E=\frac{1}{\cot^n x+\cot^n y+\cot^n z}$$

siendo n un número impar.

A) $\cot^n x$ B) 1
C) $\cot^n y+\cot^n z$
D) $\tan^2 x\tan^n y\tan^n z$ E) −1

28. Siendo $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ ángulos comprendidos entre 0 y $=\frac{\pi}{2}$, cuya suma es constante

$(x_1+x_2+x_3+...+x_n=\theta)$

halle el máximo valor de

$\cos x_1\cos x_2\cos x_3 \ldots \cos x_n$

A) $n\cos^2\frac{\theta}{n}$ B) $n\cos\frac{\theta}{n}$ C) $\cos\frac{\theta}{n}$

D) $n\cos\theta$ E) $\cos^n\frac{\theta}{n}$

29. Para los siguientes puntos $P(-1;-2\sqrt{2})$ y $Q(6;2)$, pertenecientes al lado terminal de los ángulos α y θ en posición normal respectivamente, calcule

a) $\sec\alpha\tan\alpha$ b) $\operatorname{sen}\theta\cos\theta$

A) $6\sqrt{2}\ ;\ -\frac{3}{10}$ B) $6\sqrt{2}\ ;\ \frac{3}{10}$

C) $-6\sqrt{2}\ ;\ \frac{3}{10}$

D) $-6\sqrt{2}\ ;\ -\frac{3}{5}$ E) $6\sqrt{2}\ ;\ -\frac{3}{5}$

30. Si $\cot\theta=\frac{3}{5}$, calcule la diferencia del menor y mayor valor que toma $\operatorname{sen}\theta$.

A) $-\frac{5}{34}\sqrt{34}$ B) $-\frac{5}{17}$ C) $-\frac{10}{17}\sqrt{34}$

D) $-\frac{5}{17}\sqrt{34}$ E) $-\frac{5}{18}\sqrt{34}$

31. Si $\tan x=\frac{3}{4}$ y $x\in$ IIIC, luego el valor de $\operatorname{sen}x+\cos x$ es

A) 0 B) $\frac{-1}{2}$ C) $\frac{-7}{5}$

D) $\frac{-3}{5}$ E) $\frac{-4}{5}$

32. Si $\cot^2\theta-\frac{9}{2}=0$ y θ pertenece al tercer cuadrante, calcule el valor de

$$M=10\cos\theta+\sqrt{2}\csc\theta$$

A) $\frac{-30}{11}\sqrt{11}$ B) $\frac{-41}{11}\sqrt{11}$ C) $-\frac{\sqrt{11}}{2}$

D) $-\frac{41}{11}\sqrt{22}$ E) $-11\sqrt{11}$

33. Si $\tan\theta=-1{,}2$ y $\frac{|\csc\theta|}{\csc\theta}<0$

calcule $E=\cos\theta-\operatorname{sen}\theta$

A) $\frac{-11}{61}\sqrt{61}$ B) $\frac{\sqrt{61}}{61}$ C) $11\sqrt{61}$

D) $\frac{60}{61}\sqrt{61}$ E) $\frac{11}{61}\sqrt{61}$

34. Si $\cos\theta=\frac{1}{3}$, además $|\operatorname{sen}\theta|\neq\operatorname{sen}\theta$ determine el valor de $E=\csc^2\theta-\sec^2\theta$

A) $\frac{-63}{8}$ B) $\frac{-81}{8}$ C) $\frac{-54}{11}$

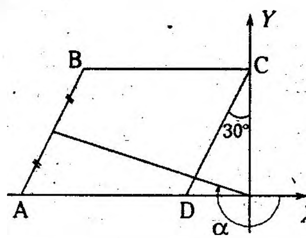
D) $\frac{63}{8}$ E) $\frac{-8}{63}$

35. Halle $E=\sqrt{17}\cos\theta+2\csc\theta+\frac{\sqrt{17}}{2}$, donde $|\operatorname{sen}^3\theta|=64\cos^3\theta$ y $\theta\in$ IVC.

A) –2 B) –1 C) 0

D) 1 E) 2

36. Del gráfico, ABCD es un rombo.
Calcule $M=\tan\alpha+\cot\alpha$

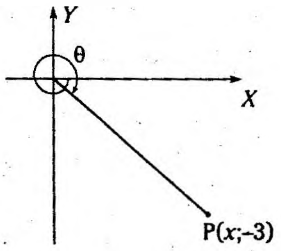


A) $\frac{-8\sqrt{3}}{15}$ B) $\frac{-20\sqrt{3}}{3}$ C) $\frac{-28\sqrt{3}}{15}$

D) $\frac{-28\sqrt{3}}{3}$ E) $\frac{-25\sqrt{3}}{3}$

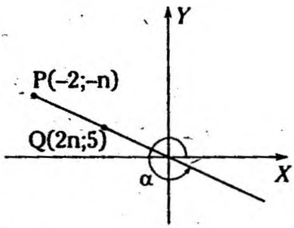
37. De la figura adjunta, la distancia del punto P al origen de coordenadas es 8.

Calcule $T=\cos\theta+\sec\theta$



A) $\frac{119}{\sqrt{55}}$ B) $\frac{119}{8\sqrt{55}}$ C) $\frac{119}{8}$
D) $\frac{119}{\sqrt{5}}$ E) $\frac{-119}{8\sqrt{55}}$

38. Del gráfico, calcule $\cos\alpha$



A) $\frac{-4}{5}$ B) $\frac{-\sqrt{5}}{3}$ C) $\frac{2}{3}$
D) $\frac{-2}{3}$ E) $\frac{-3}{5}$

39. Si $\sqrt{\tan\theta}\,\text{sen}\,\theta<0$, analice la verdad o falsedad de las siguientes proposiciones, con respecto a $y=5\cos\theta\,\text{sen}^3\theta\cos^6\alpha$

I. y es positivo
II. y es negativo
III. y es cero si $\alpha=(2n+1)\frac{\pi}{2};\ n\in\mathbb{Z}$

A) VVV B) VFV C) VVF
D) FVF E) FFF

40. Siendo γ un ángulo en posición estándar cuyo lado terminal pertenece al cuarto cuadrante, además $\left|\text{sen}\,\gamma-\frac{2}{7}\right|=\frac{4}{7}$

Determine el valor de $L=4\cot^2\gamma-3\sqrt{5}\sec\gamma$

A) 38 B) 36 C) 35
D) 45 E) 52

41. Siendo el ángulo $\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$, positivo y menor que una vuelta, comprendido en el tercer cuadrante, analice la verdad o falsedad de las proposiciones

I. $-\cos\left(\frac{x}{2}\right)\csc\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)>0$

II. $\text{sen}\left(x-\frac{\pi}{6}\right)+\tan\left(\frac{3x+\pi}{9}\right)>0$

III. $\text{Ln}\ \text{sen}\left(x-\frac{2\pi}{3}\right)<0$

A) VVV B) VFF C) FFV
D) FVV E) VFV

42. Dado un ángulo en posición normal θ, tal que cumple las condiciones:

$|\cos\theta|-2\cos\theta=1$ ....(I)

$\tan^2\theta\ \text{sen}\,\theta>0$ ....(II)

Determine el valor de $W=\sec\theta+2\sqrt{2}\csc\theta$

A) –1 B) 0 C) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$
D) –3 E) $-3\sqrt{2}$

43. Si $\theta\in$ IIC $a<0\ \wedge\ b>0$ donde

$a\,\text{sen}\,\theta+\sqrt{\sqrt{\csc^2\theta}}=b\cos\theta+\sqrt{\csc\theta}$

entonces halle en términos de a y b la expresión $E=\sqrt{ab\tan\theta}+\sqrt{ab\cot\theta}$

A) 2a + b B) a^2-b C) b – 2a
D) b – a E) a+b

44. Siendo α un ángulo positivo menor que una vuelta diferente al segundo cuadrante; además $\theta \in \langle -360°;-180° \rangle$, satisfacen la condición siguiente:

$$2-|\operatorname{sen}\theta|-\sqrt{-\cos^2\theta}=-2\cos\alpha$$

determine $M=\dfrac{\operatorname{sen}(-\theta)+2\cos\alpha}{\sqrt{3}\tan\alpha+\cos\theta}$

A) $\frac{2}{3}$ B) $\frac{-2}{3}$ C) $\frac{-4}{3}$
D) $\frac{-3}{2}$ E) 0

45. Si P es un punto del lado terminal del ángulo φ en posición normal, donde $P(-9;40)$ y $\varphi \in \langle 0°;180° \rangle$, calcule

$$L=4\tan\left(\frac{\varphi}{2}\right)+5\cot\left(\frac{\varphi}{2}\right)$$

A) 4 B) 5 C) 9
D) $\frac{5}{4}$ E) $\frac{41}{20}$

46. Siendo φ y θ dos ángulos en posición normal positivos y menores que una vuelta, además $\left(\frac{\pi}{2}<\theta<\varphi\right)$, para los cuales se cumple $\operatorname{sen}\theta-\sqrt{\cos\varphi-\operatorname{sen}\theta}>0$, obtenga el signo de $\dfrac{\tan\theta+\cot\varphi}{\cos\theta-\sec\varphi}$

A) (+) B) (–)
C) No positivo
D) No negativo E) + ó –

47. Si θ es un ángulo en posición canónica que cumple las siguientes condiciones:

$\sec\theta|\cos\theta|-1=0$ ....(i)

$|\csc\theta|+2\operatorname{sen}\theta=0$ ....(ii)

Halle el valor de

$$H=\sqrt{(\sec\theta-\csc\theta)^2}+\sqrt{(\sec\theta+\csc\theta)^2}$$

A) $\sqrt{2}$ B) $3\sqrt{2}$ C) $2\sqrt{2}$
D) 2 E) $4\sqrt{2}$

48. Los puntos con coordenadas A(–1;8), B(–10;7) y C(8;–8), son vértices del triángulo ABC siendo θ un ángulo en posición estándar cuyo lado terminal pasa por el baricentro de dicho triángulo. Calcule $\sec\theta\csc\theta$

A) $-\frac{20}{21}$ B) $\frac{171}{29}$ C) $\frac{54}{29}$
D) $-\frac{58}{21}$ E) $-\frac{\sqrt{58}}{3}$

49. Calcule la suma de los ángulos coterminales con 100°, que estén en el intervalo de 198° a 1198°.

A) 1 460° B) 2 160° C) 4 260°
D) 2 640° E) 2 460°

50. Si α y 50° son ángulos coterminales tal que $(\alpha-10°)\in[300°;400°]$

calcule $E=2\operatorname{sen}(\alpha-20°)+\sqrt{3}\tan(\alpha+10°)$

A) 0 B) 1 C) 3
D) 4 E) –2

51. ¿Cuál es el mayor ángulo negativo que es coterminal con el menor cuadrantal positivo?

A) –270° B) –180° C) –60°
D) –360° E) –450°

52. Siendo α y β coterminales y suplementarios calcule el menor valor de α si $\alpha\in[0;2\pi]$.

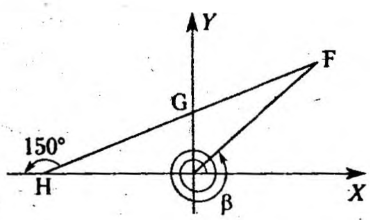
A) 90° B) 180° C) 270°
D) 142° E) 350°

53. Siendo α y θ ángulos cuadrantales positivos menores de una vuelta, además $\operatorname{sen}\alpha+|\cos\theta|=2$

calcule $E=\dfrac{\operatorname{sen}(\alpha-\theta)+\tan^2\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)}{\cos(60°+\theta)}$

A) $-\dfrac{1}{2}$ B) -1 C) 0
D) -2 E) -4

54. Del siguiente gráfico, determine el valor de $P=\dfrac{1-\csc^2\beta}{1+\sec^2\beta}$, sabiendo que HG=GF.



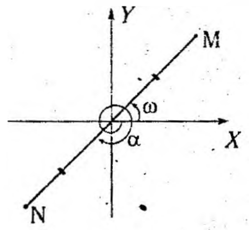
A) $-\dfrac{7}{40}$ B) $-\dfrac{1}{3}$ C) $-\dfrac{18}{39}$
D) $-\dfrac{9}{40}$ E) $-\dfrac{4}{41}$

55. Sean los puntos A(–3;4), B(4;3) y C(–4; –3), calcule la tangente del ángulo en posición normal α cuyo lado final pase por el circuncentro y ortocentro del triángulo ABC.

A) $\dfrac{1}{3}$ B) $-\dfrac{1}{3}$ C) $-\dfrac{4}{3}$
D) $-\dfrac{3}{4}$ E) $-\dfrac{4}{13}$

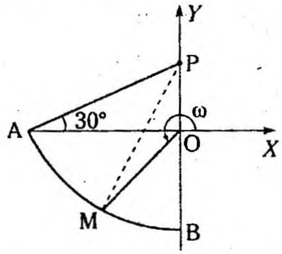
56. Del gráfico mostrado, los números –9 y $\sqrt{82}$ representan la abscisa y el radio vector del punto N respectivamente.

Calcule $K=\dfrac{9}{2\operatorname{sen}\alpha\cos\omega}$



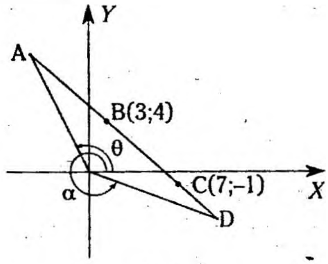
A) 36 B) –41 C) –40
D) –45 E) –42

57. En el gráfico adjunto, APB es un sector circular con centro en P. Además M es punto medio del arco AB. Calcule el valor de $K=\cot\omega-2\tan\omega$



A) $\sqrt{3}$ B) $\sqrt{3}-3$ C) $3-\sqrt{3}$
D) $2+\sqrt{3}$ E) $\dfrac{5-3\sqrt{3}}{2}$

58. Del gráfico, AB=BC=CD determine $\tan\theta.\cot\alpha$



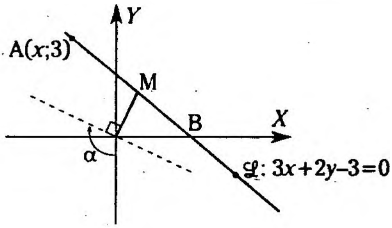
A) $\dfrac{7}{2}$ B) $\dfrac{11}{2}$ C) $\dfrac{33}{2}$
D) $\dfrac{2}{11}$ E) $\dfrac{14}{11}$

59. Se tiene un paralelogramo ABCD, donde A(–2;3), B(3;5) y C(–1;9). Calcule $\tan\theta$ si θ es un ángulo en posición normal donde el vértice D es un punto del lado terminal.

A) $-\frac{1}{7}$ B) $-\frac{8}{15}$ C) $-\frac{1}{4}$

D) $-\frac{7}{6}$ E) $-\frac{6}{7}$

60. Si AM=3MB, calcule $\tan\alpha$.

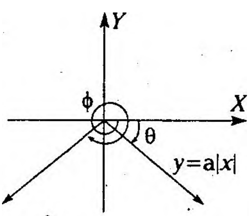


A) 2 B) 3 C) $\frac{1}{3}$

D) $-\frac{1}{3}$ E) $\frac{3}{2}$

61. Del gráfico adjunto, halle el valor de E en términos de a.

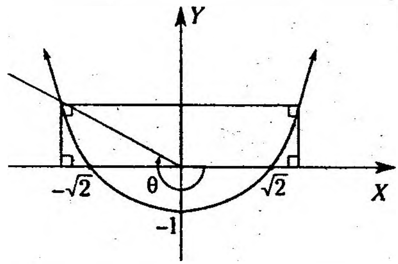
$E = \sec\phi + \csc\theta$



A) 2a B) –a C) $\frac{1}{a}$

D) $\frac{(1-a)\sqrt{a^2+1}}{a}$ E) $\frac{2\sqrt{a^2+1}}{a}$

62. En el gráfico adjunta se tiene la gráfica de una parábola cuyo vértice es (0;–1), también se tiene el ángulo θ en posición normal. Calcule el área de la región sombreada si $\operatorname{sen}\theta = \frac{\sqrt{5}}{5}$.

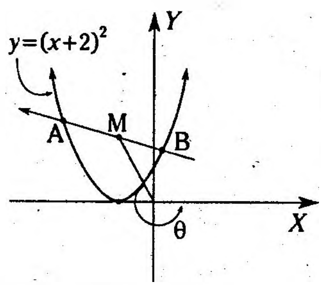


A) $(1+3\sqrt{5})\,u^2$ B) $(2+\sqrt{5})u^2$

C) $(3-\sqrt{5})\,u^2$

D) $4\,u^2$ E) $(3+\sqrt{5})u^2$

63. Siendo los valores de $\cot\left(\frac{-\pi}{8}\right)$ y $\tan\left(\frac{\pi}{8}\right)$ las abscisas de los puntos A y B respectivamente, determine el valor de $w=\tan\theta-\sqrt{10}\cos\theta$. Del gráfico siguiente, M es punto medio de $\overline{AB}$.

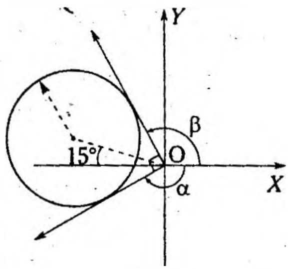


A) $11-\frac{\sqrt{2}}{2}$ B) $\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{6}}{3}$ C) – 2

D) $11+\frac{\sqrt{2}}{2}$ E) 4

64. Del siguiente gráfico, determine el valor de

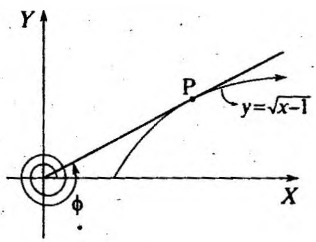
$A=\sqrt{6}(\cos\alpha+\csc\beta)$



A) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ B) $\frac{2\sqrt{3}}{3}-\frac{\sqrt{2}}{2}$ C) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

D) $\frac{1+\sqrt{3}}{3}$ E) $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{4}$

65. Calcule $\cot\phi$ a partir del gráfico adjunto (P es punto de tangencia).



A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{1}{5}$

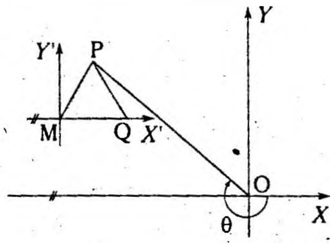
D) 1 E) 2

66. Si el punto M(–6;2) representa el origen de un nuevo sistema $X'Y'$ generado por traslación, además el ΔPMQ es equilátero de área $4\sqrt{3}$.

Halle

i) Las coordenadas de P y Q respecto al sistema XY.

ii) $2\tan\theta+\sqrt{3}$



A) I. $P(-4;2+2\sqrt{3})$ y $Q(-2;2)$
II. –1

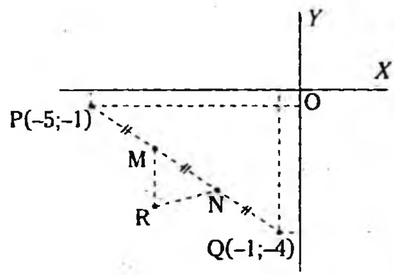
B) I. $P(-2;2\sqrt{3})$ y $Q(-4;2)$
II. –1

C) I. $P(-2\sqrt{3};2)$ y $Q(-4;2)$
II. –2

D) I. $P(-3;2+\sqrt{3})$ y $Q(-3;0)$
II. –1/2

E) I. $P(-2;3\sqrt{3})$ y $Q(-1;2)$
II. –3

67. Siendo θ ángulo en posición normal donde R es un punto perteneciente a su lado terminal (véase figura adjunta). Calcule $\tan\theta$ sabiendo que RN=RM=MN.

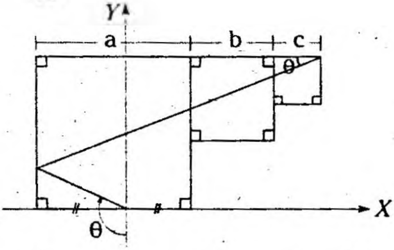


A) $15+4\sqrt{3}$ B) $\frac{26+3\sqrt{3}}{33}$

C) $\frac{4\sqrt{3}+\sqrt{2}}{3}$

D) $\frac{15-4\sqrt{3}}{2}$ E) $\frac{15+4\sqrt{3}}{33}$

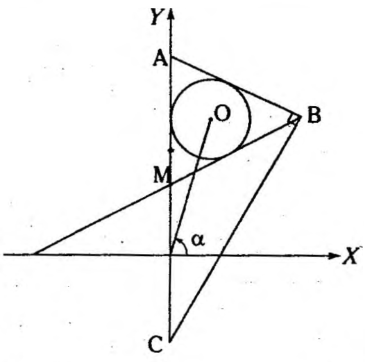
68. Los lados de los cuadrados están en proporción como 6a=15b=20c, además $\alpha = \frac{5}{12}$. Halle θ.



A) $\frac{12}{7}$ B) $\frac{15}{17}$ C) $\frac{15}{21}$

D) $\frac{20}{3}$ E) $\frac{6}{15}$

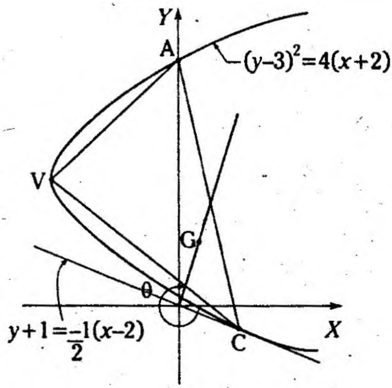
69. Del gráfico, halle $E = \tan\alpha + \cot\alpha$, si $4\overline{AB} = 3\overline{BC}$, O es centro de la circunferencia y M es punto medio de AC. $TC = 4MT$.



A) $\frac{1}{2}$ B) 2 C) $\frac{3}{2}$

D) 2 E) $\frac{5}{2}$

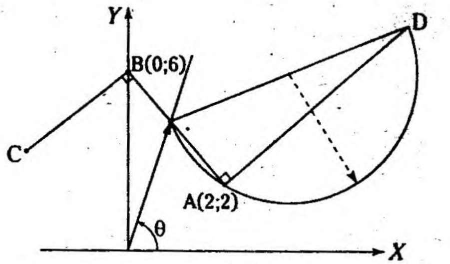
70. De la figura, halle $\tan\theta$.
G: baricentro del triángulo CVA
V: vértice de la parábola
C: punto de tangencia



A) $\frac{\sqrt{2}}{5}$ B) $\frac{\sqrt{2}}{3}$ C) $\frac{2\sqrt{2}}{5}$

D) 1 E) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

71. Del gráfico, determine $\tan\theta$ si $\frac{\overline{AD}}{3} = \frac{\overline{BA}}{2} = \overline{CB}$



A) 10 B) $\frac{2}{5}$ C) $\frac{1}{10}$

D) $\frac{3}{2}$ E) $\frac{1}{2}$

72. Si θ es un ángulo en posición normal y no pertenece al IVC, halle

$K = b\cos\theta + a\cot\theta$

siendo $\operatorname{sen}\theta = \frac{|a|}{b}$; $b < a < 0$

A) 0 B) 1 C) 2

D) a+b E) a−b

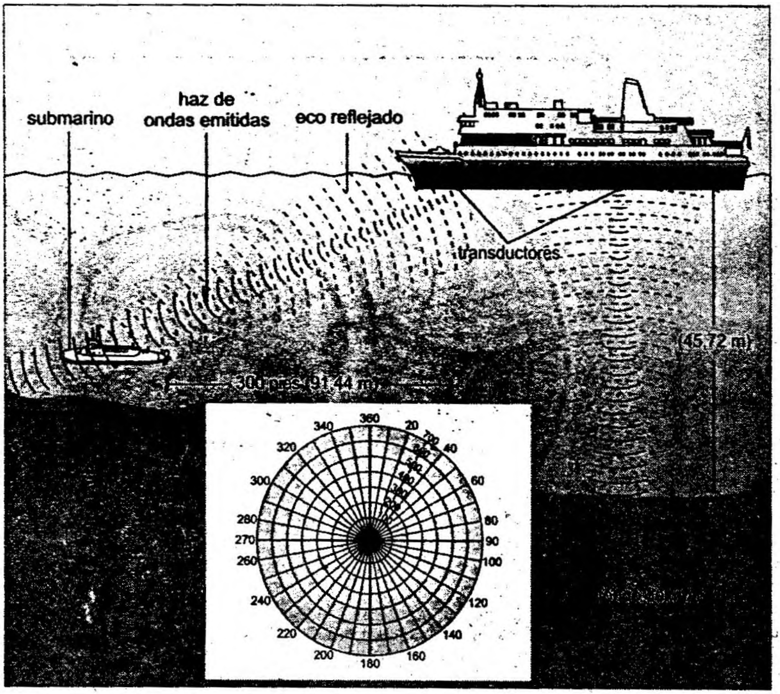
1 D	15 B	30 C	44 B	59 D
2 A	16 C	31 C	45 C	60 E
3 B	17 B	32 B	46 A	61 D
4 D	18 C	33 E	47 C	62 D
5 E	19 D	34 A	48 D	63 E
6 C	20 D	35 D	49 E	64 C
7 D	21 A	36 C	50 D	65 E
8 D	22 C	37 B	51 A	66 A
9 B	23 A	38 C	52 A	67 No hay clave
10 B	24 C	39 B	53 C	68 A
11 D	25 E	40 A	54 D	69 E
12 E	26 B	41 E	55 C	70 D
13 B	27 No hay clave	42 B	56 B	71 A
14 D	28 E	43 D	57 E	72 A
	29 C		58 C	

Claves

CAPÍTULO

IV

Circunferencia trigonométrica



Tecnología marítima

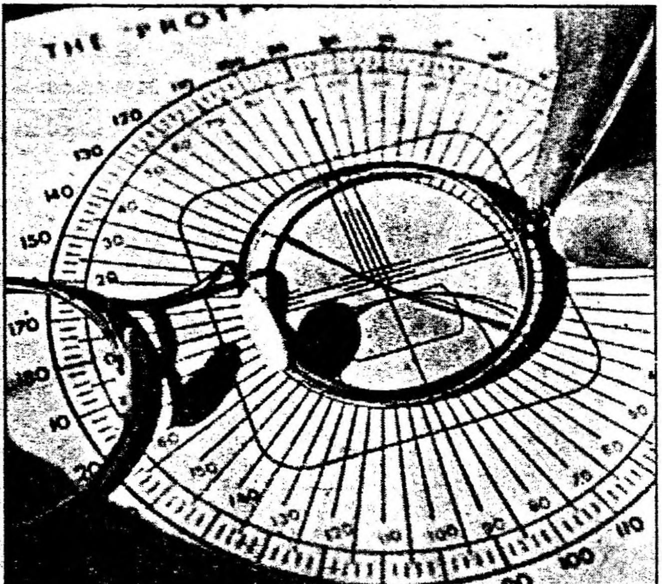
Para detectar un submarino, la nave utiliza un dispositivo (transductor) que gira 360° (2π rad) en sentido horario, que al emitir impulsos determina la dirección y distancia del submarino.

TRIGONOMETRÍA

PLANTILLA USADA EN EL MONTAJE DE GAFAS

Antes de que el oculista comience a elaborar un par de gafas, debe graduar la vista del paciente, a fin de que determine el tipo y potencia de lentes que éste necesita, ello se hace mediante diferentes tipos de pruebas.

Un elemento utilizado por los oculistas es la plantilla para montajes de gafa, con ella el oculista comprueba que los ejes de cualquier elemento cilíndrico de las lentes recetadas quedan correctamente orientados en la montura. Un instrumento actual para la medición de la vista es el oftálmetro, mediante el cual se explora por medios electrónicos la retina y se registra sobre un papel su potencia óptica en cada plano.



En la imagen se observa la manera como el oculista orienta correctamente la lente en la montura utilizando para ello una plantilla.

Circunferencia trigonométrica

OBJETIVOS

- Definir la circunferencia trigonométrica, indicando sus elementos y obtener la ecuación de la misma.
- Representar y relacionar los números reales y los arcos dirigidos.
- Definir las razones trigonométricas de los números reales.
- Analizar las variaciones de las razones trigonométricas de los números reales.

INTRODUCCIÓN

Para las definiciones de las razones trigonométricas, se ha seguido un proceso, partiendo del estudio de las razones de un ángulo agudo desarrollado en el Capítulo II, también para ángulos trigonométricos en posición normal, explicado en el Capítulo III. Luego nos preguntamos: ¿es posible calcular las razones trigonométricas de números reales?, ¿qué diferencias hay entre sen1 y sen1°?, ¿cuál es la variación de sen; ? En este capítulo resolveremos estas y otras interrogantes. En este sentido, empezamos con el estudio de la ecuación de la circunferencia de radio 1; luego definimos los arcos en posición normal y los relacionamos con el ángulo central que se genera.

Posteriormente, ubicamos a los números reales en esta circunferencia, y las coordenadas del extremo del arco servirán de base para definir las razones trigonométricas de los números reales. Estas definiciones cumplen un papel importante en la matemática superior y cálculo en ingeniería.

Este capítulo también está ligado a funciones trigonométricas, ya en el presente capítulo se puede entender y elaborar modelos de crecimiento y decrecimiento, posteriormente será posible aplicarlo para modelar fenómenos periódicos. Cualquier fenómeno que ocurre a intervalos regulares se denomina periódico. El movimiento de traslación de la Tierra, el movimiento ascendente y descendente de un pistón en un motor alternativo y las vibraciones de la cuerda de una violín son ejemplos de fenómenos periódicos.

CIRCUNFERENCIA TRIGONOMÉTRICA

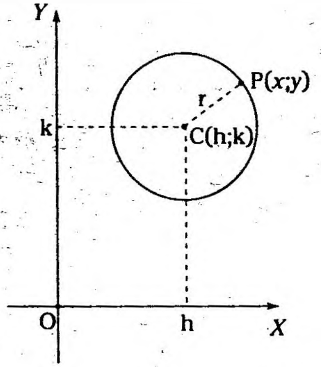
Nociones Previas

Definición de circunferencia

Es el conjunto de todos los puntos en un mismo plano equidistantes de un punto fijo llamado centro.

Ecuación de la circunferencia

Si $P(x;y)$ es un punto de la circunferencia con centro en $C(h;k)$, la distancia entre P y C es el radio r. (Véase la figura 4.1(a))



(a)

Aplicando el teorema de distancia entre dos puntos tenemos

$$\sqrt{(x-h)^2+(y-k)^2}=r$$

luego

$$\boxed{(x-h)^2+(y-k)^2=r^2}$$

es la ecuación de una circunferencia, con centro en (h;k) y radio r. Además $(x;y)$ es un punto cualquiera perteneciente a la circunferencia.

Ejemplo

Grafique la circunferencia, cuya ecuación es

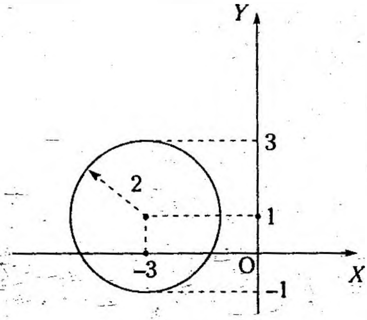
$$(x+3)^2+(y-1)^2=4$$

Resolución

Modificando a la forma general queda así

$$(x-(-3))^2+(y-1)^2=2^2$$

de donde se observa que el centro de la circunferencia es $(h;k)=(-3;1)$ y radio igual a 2. (Véase la figura 4.1(b)).



(b)

A continuación citamos un caso particular, cuando el centro de la circunferencia de radio r coincide con el origen de coordenadas del plano cartesiano.

Se tiene que $h=0$ y $k=0$

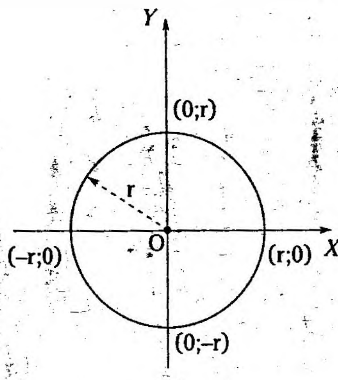
Reemplazando esta condición en la ecuación

$$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$$

se convierte en

$$\boxed{x^2+y^2=r^2}$$

y su gráfico lo mostramos en la figura 4.1(c).



(c)

Figura 4.1

Para que usted tenga una mejor visualización sobre lo planteado le sugerimos que observe los siguientes ejemplos:

Ejemplo 1
Halle la ecuación de la circunferencia cuyo centro coincide con el origen de coordenadas y su radio es igual a 2 unidades.

Resolución
A partir del enunciado, si el centro de la circunferencia coincide con el origen de coordenadas, entonces su ecuación será

$x^2 + y^2 = r^2$ ... (1)

También del enunciado $r = 2$ ... (2)

Luego, reemplazando (2) en (1) se obtiene

$$x^2 + y^2 = 2^2 \quad \text{o} \quad x^2 + y^2 = 4$$

y su gráfico respectivo lo podemos visualizar en la figura 4.2

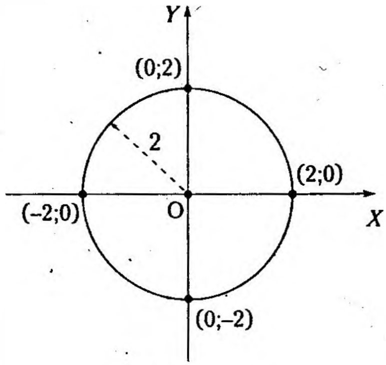


Figura 4.2

Ejemplo 2
Halle la ecuación de la circunferencia con centro en el origen de coordenadas, y radio igual a $0,\widehat{3}$ unidades.

Resolución
Del enunciado, se indica que el centro está en el origen de coordenadas, entonces la ecuación es

$x^2 + y^2 = r^2$ ... (1)

como observamos r es

$$r = 0,\widehat{3} = \frac{3}{9} \quad \text{o} \quad r = \frac{1}{3} \quad \text{... (2)}$$

Luego, reemplazando (2) en (1) se obtiene

$$x^2 + y^2 = \left(\frac{1}{3}\right)^2 \quad \text{o} \quad x^2 + y^2 = \frac{1}{9}$$

y su gráfico respectivo lo podemos visualizar en la figura 4.3

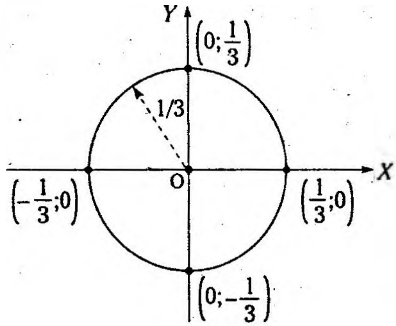


Figura 4.3

Definición de circunferencia trigonométrica o unitaria

Es aquella circunferencia con centro en el origen de coordenadas cartesianas y radio igual a la unidad de escala del sistema que lo contiene.

Ecuación de la circunferencia trigonométrica

$$\boxed{x^2 + y^2 = 1}$$

Para apreciar la forma de representar a la circunferencia trigonométrica observe la figura 4.4

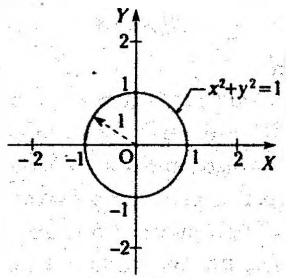


Figura 4.4

El lector debe entender que en los ejercicios es usual indicar C.T. en lugar de su ecuación. Para un mejor entendimiento al respecto, mostramos el siguiente ejemplo (figura 4.5).

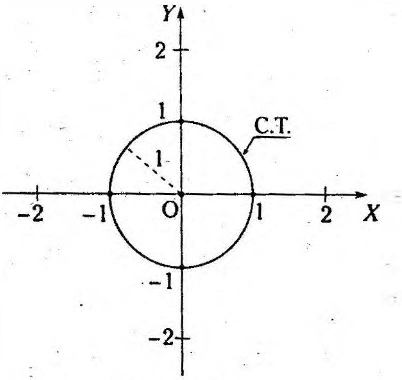


Figura 4.5

Ejemplo 3

A partir del gráfico mostrado (figura 4.6), halle la abscisa x_2 del punto Q y la ordenada y_1 del punto P.

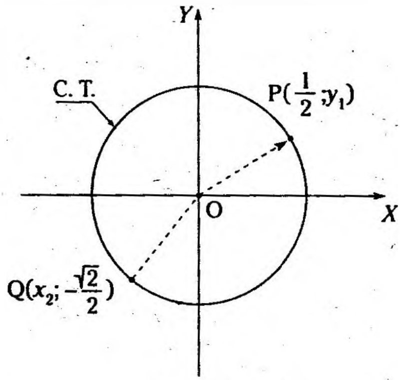


Figura 4.6

Resolución

Observamos que en la figura 4.6 se presenta las iniciales C.T. lo cual indica que es una circunferencia trigonométrica, por lo que podemos plantear su ecuación $x^2+y^2=1$. Esta ecuación nos señala que todo punto P que se halla en la circunferencia debe verificar la ecuación de la C.T.

$$(\text{abscisa de P})^2+(\text{ordenada de P})^2=1$$

Aplicando esta última relación para cada punto obtenemos lo siguiente:

- Para el punto $P\left(\frac{1}{2};\ y_1\right)$

  $(\text{abscisa de P})^2+(\text{ordenada de P})^2=1$ ...(1)

  Reemplazando los componentes de P en (1) obtenemos

  $$\left(\frac{1}{2}\right)^2+(y_1)^2=1 \quad ...(2)$$

  De (2) despejando y_1^2 se tiene $y_1^2=\frac{3}{4}$

  de donde $y_1=\frac{-\sqrt{3}}{2}$ o $y_1=\frac{\sqrt{3}}{2}$

  Como puede apreciarse, aparentemente habrían dos soluciones (respuestas o dos posibilidades), pero si somos acuciosos nos daremos cuenta de que en el gráfico mostrado, P se halla en el primer cuadrante ($P\in IC$); en consecuencia, la ordenada y_1 tiene que ser positiva y la única posibilidad sería

  $$y_1=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Seguidamente

- Para el punto $Q\left(x_2;\frac{-\sqrt{2}}{2}\right)$

  $(\text{abscisa de Q})^2+(\text{ordenada de Q})^2=1$

  $$(x_2)^2+\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\right)^2=1$$

  Despejando x_2^2 se tiene $x_2^2=\frac{1}{2}$

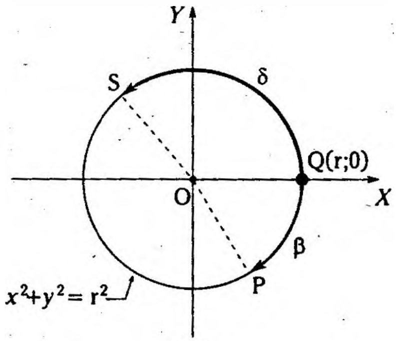
  de donde $x_2=\frac{-\sqrt{2}}{2}$ o $x_2=\frac{\sqrt{2}}{2}$

  Nuevamente pareciera que hubiera dos soluciones, pero observamos que Q se halla en el tercer cuadrante ($Q\in IIIC$); en consecuencia, x_2 tiene que ser negativa y la única solución que verificaría esta condición sería

  $$x_2=\frac{-\sqrt{2}}{2}$$

Arcos Dirigidos en Posición Normal

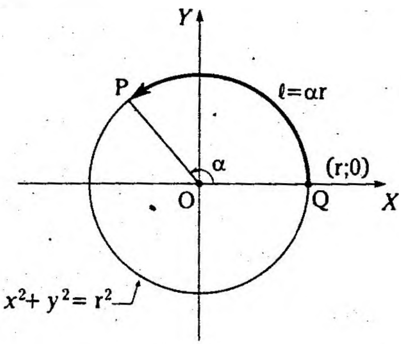
A los arcos dirigidos u orientados generados del punto (r;0) en una circunferencia de ecuación $x^2+y^2=r^2$ se denominan arcos en posición normal. A los arcos en posición normal generados en sentido antihorario se les consideran positivos y en sentido horario se les consideran negativos.



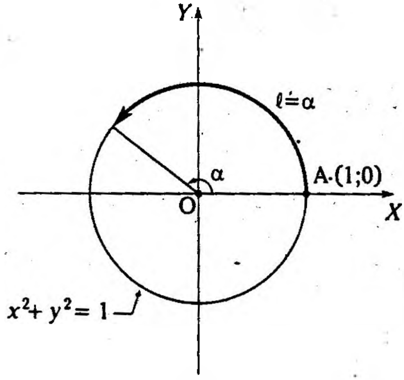
(a)

- δ es un arco positivo (sentido antihorario)
- β es un arco negativo (sentido horario)

Así, tenemos un arco dirigido $\overset{\frown}{QP}$ en posición normal (la figura 4.7(b)) y si consideramos su respectivo ángulo central α medido en radianes se tiene que su longitud de arco ℓ es $\alpha.r$. En consecuencia, para una circunferencia trigonométrica (r=1) se cumple $\ell=\alpha$. (figura 4.7(c)).



(b)



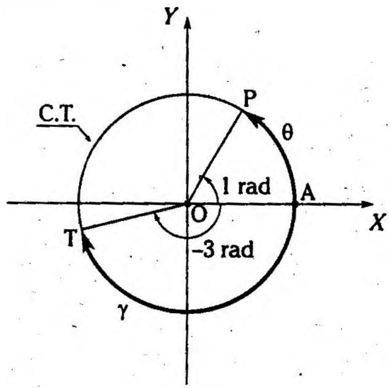
(c)

Figura 4.7

Observación

Dado un ángulo α en posición normal, si describimos una circunferencia trigonométrica y llamamos t a la longitud del arco que lo subtiende, el número t se llama la medida de α en radianes.

Aplicación



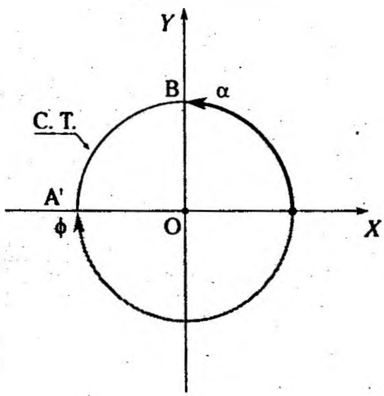
(a)

En la figura 4.8(a) los puntos P y T son los extremos de los arcos θ y γ, respectivamente; estos nos indicarán el cuadrante al cual pertenecen sus arcos. Del gráfico podemos obtener lo siguiente:

- $\theta=1$, además $\theta \in$ IC
- $\gamma=-3$, además $\gamma \in$ IIIC

Hasta aquí queda claro que los arcos en la C.T. son números reales, es decir, cantidades sin unidades. También se les suele llamar cantidades adimensionales.

Expuesto lo anterior, el lector debe tener presente que los arcos dirigidos en posición normal no necesariamente pertenecen a determinado cuadrante, puede darse el caso que dichos arcos no pertenezcan a cuadrante alguno. Para un mejor entendimiento al respecto se sugiere observar la figura 4.8(b)



(b)

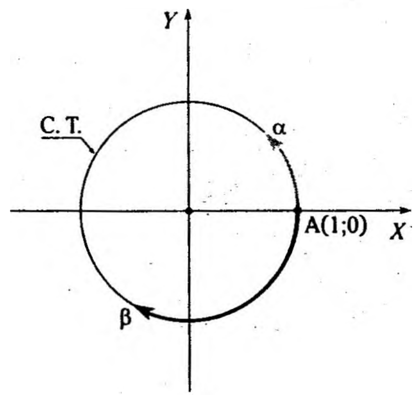
Figura 4.8

- α es un arco dirigido en posición normal, cuyo extremo es el punto B y éste se halla sobre el eje de ordenadas, entonces se dice que α no pertenece a cuadrante alguno.
- ϕ de forma análoga, su extremo es el punto A' el cual se encuentra sobre el eje de abscisas, entonces afirmamos que ϕ no pertenece a cuadrante alguno.

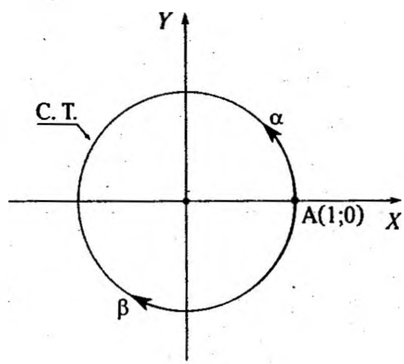
Nota

A estos tipos de arcos que se encuentran en posición normal y no pertenecen a cuadrante alguno se les suele llamar ángulos cuadrantales.

Antes de revisar cómo se representan los números reales en la C.T., usted debe observar que en las figuras 4.8(b) y 4.9(a), los arcos en posición normal β, α, ϕ se encuentran resaltados desde su extremo inicial hasta su extremo final, en adelante pues se va a representar sólo los extremos finales y quedará sobreentendido que estos arcos se encuentran en posición normal. Las figuras 4.9(a) y 4.9(b) aclaran al respecto.



(a)

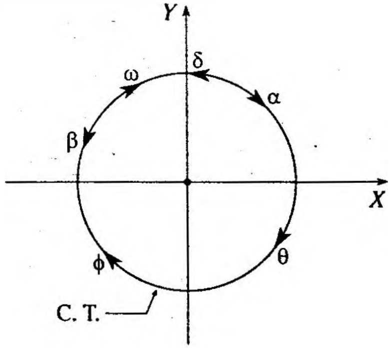


(b)

Para los arcos α y β se sobreentiende que se encuentran en posición normal.

$\alpha \in$ IC , $\beta \in$ IVC

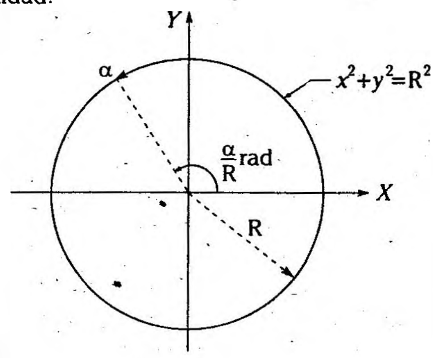
Expuesto lo anterior, podemos entender que a partir de la figura 4.9(c)



(c)

- $\alpha \in$ IC
- $\beta \in$ IIC
- $\theta \in$ IVC
- $\phi \in$ IIIC
- $\omega \in$ IIC
- δ no pertenece a cuadrante alguno

Observamos que al ubicar el cuadrante de un arco, ello es permitido dado que el arco representado en la C.T. coincide numéricamente con su respectivo ángulo central expresado en radianes. ¿Qué ocurre si el arco está representado en una circunferencia de radio diferente de la unidad?



(d)

Figura 4.9

Se observa que el ángulo en posición normal $\frac{\alpha}{R}$rad pertenece al IIC por lo tanto podemos afirmar que

$$2K\pi + \frac{\pi}{2} < \frac{\alpha}{R} < 2K\pi + \pi \ / \ k \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow (4K+1)\frac{\pi R}{2} < \alpha < (2K+1)\pi R$$

Luego, dependiendo de los valores de R podemos indicar el cuadrante al que pertenece α..

Por ejemplo

Si $\quad R = \frac{1}{2} \Rightarrow (4K+1)\frac{\pi}{4} < \alpha < (2K+1)\frac{\pi}{2}$

Por tanto

Si $\quad K = -1 \Rightarrow \frac{-3\pi}{4} < \alpha < \frac{-\pi}{2}$; $\alpha \in$ IIIC

Si $\quad K = 0 \Rightarrow \frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{\pi}{2}$; $\alpha \in$ IC

Si $\quad K = 1 \Rightarrow \frac{5\pi}{4} < \alpha < \frac{3\pi}{2}$; $\alpha \in$ IIIC

Si $\quad K = 2 \Rightarrow \frac{9\pi}{4} < \alpha < \frac{5\pi}{2}$; $\alpha \in$ IC

Si $\quad K = 3 \Rightarrow \frac{13\pi}{4} < \alpha < \frac{7\pi}{2}$; $\alpha \in$ IIIC

Si $\quad K = 4 \Rightarrow \frac{17\pi}{4} < \alpha < \frac{9\pi}{2}$; $\alpha \in$ IC

$\vdots$

Es decir $\alpha \in$ IC $\vee$ IIIC

Seguidamente estudiaremos cómo se representan los números reales en la C.T., para posteriormente representar y calcular sus razones trigonométricas. De esta manera podemos responder ciertas interrogantes como por ejemplo: ¿A qué cuadrante pertenece el arco 1, arco 2, arco (3, 14)? ¿Qué valor es mayor: sen1 o sen3?

Representación de los Números Reales en la Circunferencia Trigonométrica

En la figura 4.10(a) se tiene una recta numérica vertical donde el origen de la recta coincide con el punto A(1;0) de la C.T. Considerando a esta última como una sección de un carrete y la recta numérica como un hilo (espesor despreciable) entonces, en la figura 4.10(b) la parte positiva de la recta se envuelve en sentido antihorario y en la figura 4.10(c) la parte negativa en sentido horario.

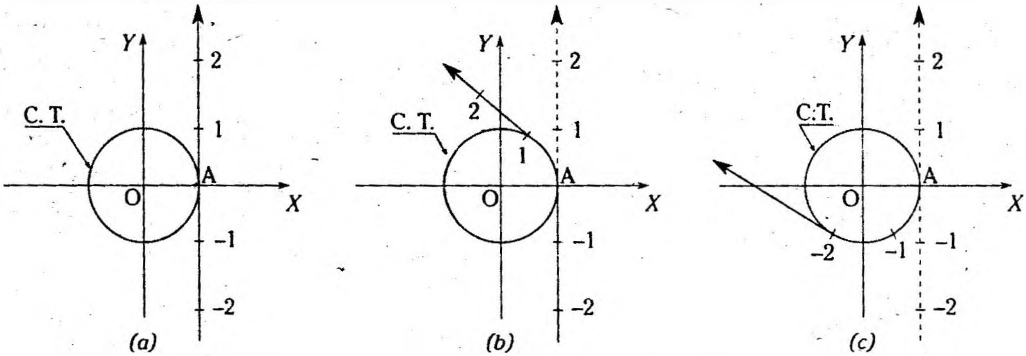


Figura 4.10

Este último procedimiento tiene por finalidad hacer comprender que a cada punto de la recta numérica le corresponde un único punto de la C.T.; pero no necesariamente a cada punto de la C.T. le va a corresponder un único punto de la recta numérica. Así por ejemplo, al número 1 ubicado en la C.T. lo asociamos con un punto P, en general a dicho punto P le corresponde todos los números reales de la forma $1+2\pi n$; $n \in \mathbb{Z}$, en la figura 4.11(a) se aprecia a algunos arcos positivos cuyo extremo coincide con el extremo del arco 1, así como se representan arcos positivos, también se pueden representar arcos negativos, observe la figura 4.11(b) cuyos extremos coinciden con el extremo del arco 1.

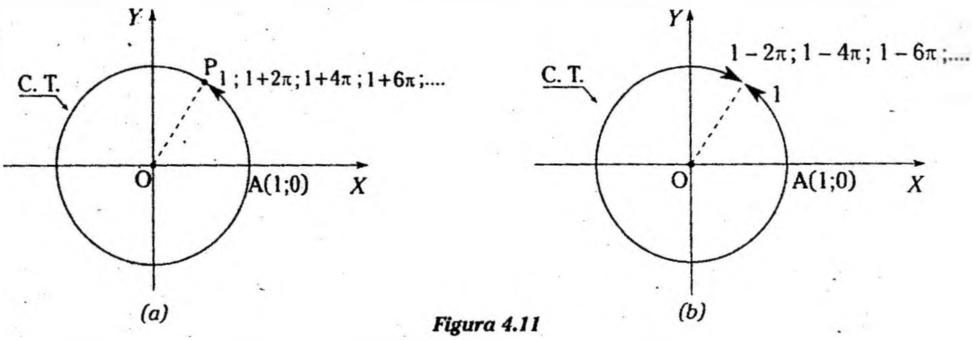


Figura 4.11

Como ya se ha enunciado, es importante ubicar el extremo de un arco en la C.T. ya sea para la ubicación de su cuadrante o para las definiciones de las funciones trigonométricas o circulares para números reales; éstas se verán más adelante.

De ahora en adelante como usted podrá comprobar casi siempre se va a nombrar y utilizar el número real π ; que por sus características ha sido motivo de curiosidad e investigación para muchas personas dedicadas al estudio de la matemática; por lo cual, le sugerimos que lea atentamente la siguiente lectura referida a dicho número π (pi).

LECTURA

EL NÚMERO PI (π)



Número trascendente, aparecido en geometría desde la Antigüedad. Es la razón constante entre las longitudes de una circunferencia y de su diámetro, cualquiera que sea la circunferencia considerada. La constancia de la razón de la circunferencia al diámetro no es válida en geometría no euclidiana.

La razón entre la superficie de un círculo y la superficie de un cuadrado, cuyo lado es el radio es, igualmente, la constante π. O sea, designando por R la longitud del radio, por L la longitud de la circunferencia y por S la superficie del círculo, se tiene

$$\frac{L}{2R} = \pi \qquad \frac{S}{R^2} = \pi$$

Los griegos, posteriormente los hindúes y, finalmente, los chinos, calcularon el valor de π con precisión creciente. Arquímedes demostró que π está comprendido entre

$3 + \frac{1}{7}$ y $3 + \frac{10}{71}$, o sea aproximadamente 3,1412...

A partir del Renacimiento, la conquista de los decimales de π se emprende de manera sistemática y progresa velozmente hasta 1874, año en el que W. Shanks halla 707 decimales. A mediados del siglo XX las máquinas calculadoras electrónicas han permitido grandes avances; así en 1961 D. Shanks y J.W. Wrench mediante un calculador IBM 7090 consiguieron 100265 decimales en 8 horas 43 minutos. Incluso para los cálculos de máxima precisión los físicos y los técnicos están muy lejos de necesitar tantos decimales. El valor $\pi = 3{,}1416...$ es suficiente para numerosas aplicaciones. Más allá de quince decimales, la precisión no es más que una curiosidad sin mayor interés. Por otra parte, en muchos casos bastan fórmulas aproximadas:

$\pi = \sqrt{2} + \sqrt{3}$, o bien $\pi = \frac{355}{113}$ (A. Metius)

En el universo einsteiniano (no euclidiano), π se expresa no como una constante, sino como una función variable con la estructura del espacio o de la masa en los límites de la cual se efectúa la medición. Rigiendo la estructura del círculo, el número π aparece en la de la esfera, de la cual la superficie es $4\pi R^2$ y el volumen $\frac{4\pi R^3}{3}$.

Finalmente π aparece también en Trigonometría, siendo 2π el periodo de las funciones circulares seno, coseno, secante y cosecante. Es también útil en el estudio de los movimientos vibratorios y en numerosos capítulos de la Física. La importancia del número π se extiende a todos los dominios de la matemática, en particular de la aritmética y del análisis infinitesimal.

LECTURA

Las fórmulas siguientes muestran algunas de las aproximaciones de π :

a) $\frac{\pi}{4}=\arctan 1=\frac{1}{1}-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\dots+(-1)n+1\frac{1}{2n-1}+\dots$ (Leibniz)

b) $\frac{2}{\pi}=\frac{2\times 2\times 4\times 4\times 6\times 6\times 8\dots}{1\times 3\times 3\times 5\times 5\times 7\times 7\dots}$ (Wallis)

c) $\frac{2}{\pi}=\sqrt{\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\dots}}}}$ (Viéte)

d) $\frac{\pi}{4}=\cfrac{1}{1+\cfrac{1^2}{2+\cfrac{9}{2+\cfrac{25}{2+\cfrac{49}{2+\cfrac{81}{\dots}}}}}}$ (Brouncker)

La más importante de estas relaciones es sin duda la que liga π al número e según la fórmula de Euler $e^{\pi i}=-1$. Esta fórmula se puede presentar de varias maneras:

1) $i^{i}=e^{\frac{-\pi}{2}}=0{,}20788\dots$ 2) $\frac{\pi}{2}=\frac{\mathrm{Ln}\sqrt{-1}}{\sqrt{-1}}$

Evolución de Pi a través de la historia

Persona/pueblo	Año	Valor
Egipto	– 2000 a.n.e.	3,1605
China	– 1200 a.n.e.	3
Biblia	– 550 a.n.e.	3
Arquímedes	– 300 a.n.e.	3,14163
Ptolomeo	– 200 a.n.e.	377/120 = 3,14166...
Chung Huing	– 300 a.n.e.	$\sqrt{10}$
Wang Fau	263 a.n.e.	157/50 = 3,14
Tsu Chung - Chi	– 500 a.n.e.	3,1415926 < Pi < 3,1415929
Aryabhata	– 500	3,1416
Brahmagupta	– 600	$\sqrt{10}$
Fibonacci	1220	3,141818
Ludolph van Ceulen	1596	35 decimales
Machin	1706	100 decimales
Lambert	1766	Nombró a Pi irracional
Richter	1855	500 decimales
Lindeman	182	Nombró a Pi trascendente
Ferguson	1947	808 decimales
Ordenador Pegasus	1597	7 840 decimales
IBM 7090	1961	100 000 decimales
CDC 6600	1967	500 000 decimales
Cray - 2 (Kanada)	1987	100 000 000 decimales
Univ. de Tokio	1995	4 294 960 000 decimales

A continuación se ubican los extremos de los arcos relacionados a los ángulos $\frac{\pi}{2}$ rad, π rad, $\frac{3\pi}{2}$ rad y 2π rad (en la circunferencia trigonométrica); pues estos servirán como referencia para ubicar aproximadamente a otros arcos.

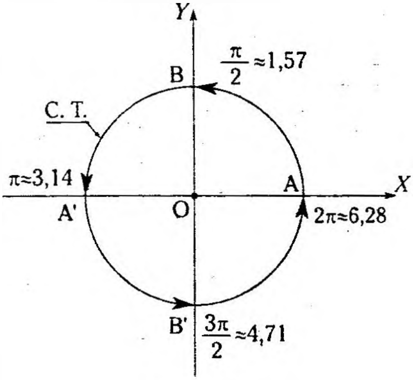
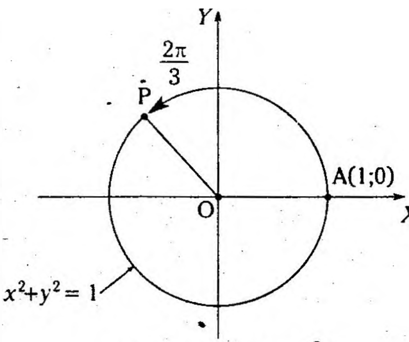


Figura 4.12

Ejemplo

Ubique en la C.T., los extremos de los arcos (en posición r ormal) $\frac{2\pi}{3}$; 6 ; 8 ; −15

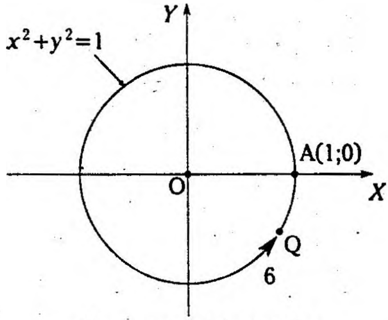
Resolución



P: extremo del arco $\frac{2\pi}{3}$

$\left(\frac{2\pi}{3}\in \text{IIC}\right)$

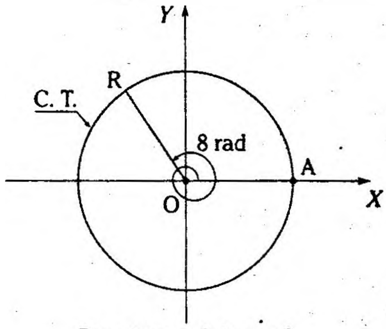
(a)



Q: extremo del arco 6

(6∈IV C)

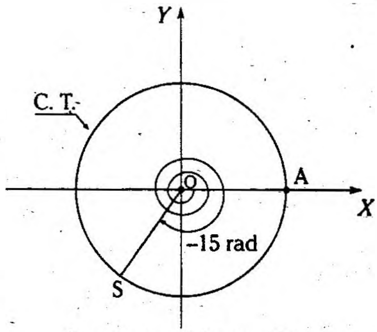
(b)



R: extremo del arco 8

(8∈ II C)

(c)



S: extremo del arco −15

(−15 ∈ III C)

(d)

Figura 4.13

Nota

Usualmente en la literatura matemática no se escribe radianes sino se le sobreentiende, por ejemplo se escribe $\sphericalangle AOB = 2$ en lugar de la notación $\sphericalangle AOB = 2\,\text{rad}$ o $\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}$ en lugar de $\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\,\text{rad}$.

También $\sphericalangle AOB = \frac{4\pi}{3}$ en lugar de la notación $\sphericalangle AOB = \frac{4\pi}{3}\,\text{rad}$, cos3 en lugar de cos3 rad, $\tan\left(\frac{-\pi}{8}\right)$ en lugar de $\tan\left(\frac{-\pi}{8}\,\text{rad}\right)$; y así sucesivamente.

Ejemplo

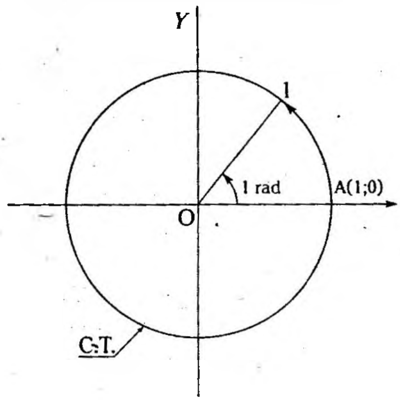
Ubique en forma aproximada los extremos de los arcos 1, 2, 3, 4, 5 y 6 sobre la C.T. (en posición normal).

Visto la teoría, para poder ubicar el extremo del arco 1 se necesita ubicar el ángulo de 1 rad, de forma análoga para el arco 2 el ángulo 2 rad, y así sucesivamente hasta el arco 6. Por ello del Capítulo I se sabe lo siguiente: 1 rad ⟨⟩ 57°17'44" (aproximadamente)

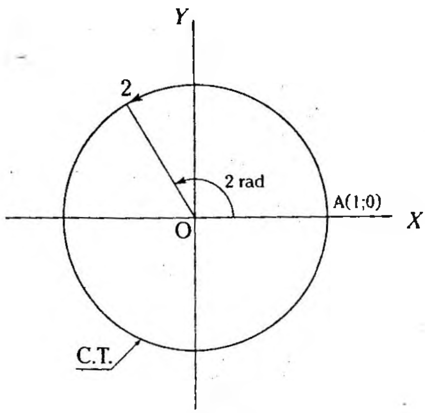
De igual forma podemos obtener

2 rad 114°35' 28" (aproximadamente)
3 rad 171° 53' 12" (aproximadamente)
4 rad 229° 10' 56" (aproximadamente)
5 rad 286° 28' 40" (aproximadamente)
6 rad 343° 46' 24" (aproximadamente)

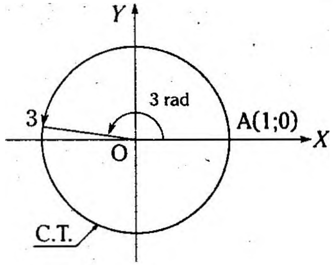
A continuación se muestran los gráficos de los arcos, pero para cuestiones de resolver problemas, el lector puede representar dichos arcos de forma aproximada, teniendo en cuenta el equivalente sexagesimal para cada medida en radianes, se le sugiere también recordar la ubicación de estos extremos de arcos, porque en algunos problemas son utilizados.



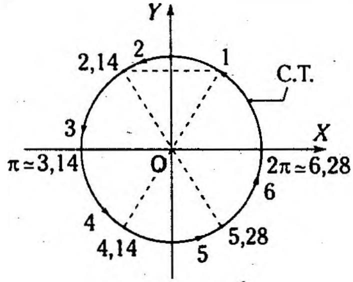
(a)



(b)

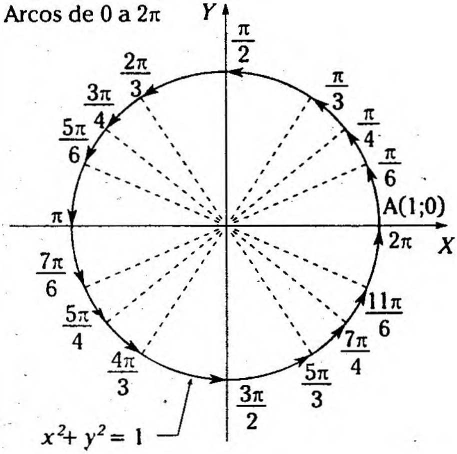


(c)

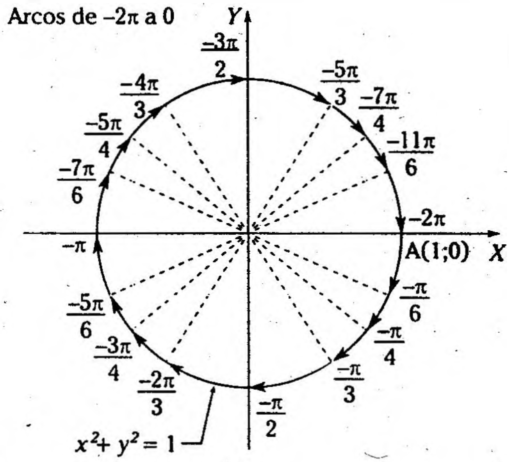


(d)

En el siguiente gráfico, se muestran a los arcos de mayor uso en este capítulo.



(e)



(f)

Figura 4.14

Observe en la figura 4.15 la simetría existente entre los extremos de los arcos. Veamos en qué medida nos facilitará en calcular las coordenadas de otros puntos, conocido uno de ellos.

En la figura 4.15 se indican las coordenadas de los extremos de los arcos representados en las figuras 4.14(e) y 4.14(f), tales coordenadas se han obtenido teniendo como referencia los pares ordenados en el primer cuadrante y luego utilizando criterios de simetría respecto al eje de abscisas y al eje de ordenadas.

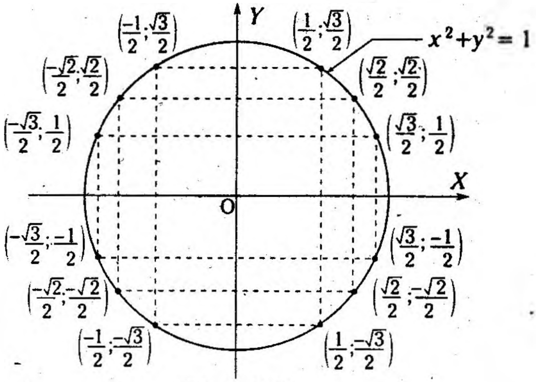


Figura 4.15

Los extremos de los arcos $\frac{\pi}{6}$ y $\frac{5\pi}{6}$ son simétricos respecto al eje Y, veamos:

Es fácil verificar que $P\left(\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{1}{2}\right)$

Luego obtenemos que M es $\left(\frac{-\sqrt{3}}{2};\frac{1}{2}\right)$.

Los extremos de los arcos $\frac{\pi}{6}$ y $\frac{-\pi}{6}$ son simétricos respecto al eje X, veamos:

Aquí la abscisa no cambia de signo, pero sí la ordenada, es decir, como el punto de referencia es $P\left(\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{1}{2}\right)$

Luego, obtenemos que R es $\left(\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{-1}{2}\right)$

Los extremos de los arcos $\frac{\pi}{6}$ y $\frac{7\pi}{6}$ son simétricos respecto al origen de las coordenadas, veamos:

Aquí ambas coordenadas cambian de signo.

Es decir, como el punto de referencia es $P\left(\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{1}{2}\right)$

Luego, obtenemos que Q es $\left(\frac{-\sqrt{3}}{2};\frac{-1}{2}\right)$

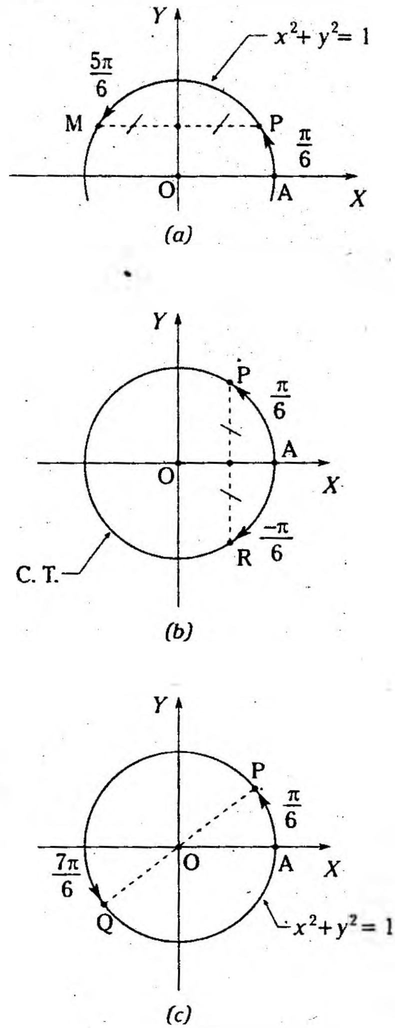


Figura 4.16

Análogamente establecemos que los extremos de los arcos, por ejemplo, de $\frac{\pi}{4}$, $\frac{3\pi}{4}$, $\frac{5\pi}{4}$, $\frac{7\pi}{4}$ también son simétricos con respecto al eje Y, al origen y eje X, respectivamente. Entonces, si conocemos las coordenadas del extremo de $\frac{\pi}{4}$, $\left(\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ podemos calcular las coordenadas de los demás arcos $\left(\frac{3\pi}{4},\frac{5\pi}{4},\frac{7\pi}{4}\right)$ utilizando el razonamiento ya expuesto.

Asimismo se invita al lector a calcular las coordenadas de los extremos de los arcos de la figura 4.16.

Representaciones del Seno, Coseno, Tangente, Cotangente, Secante y Cosecante de un Arco en la C.T.

En esta parte, al referirnos a un arco hacemos la suposición de que este es un arco dirigido en la C.T. en posición normal, donde su punto inicial es el origen de arcos A(1;0). En las representaciones de las funciones trigonométricas siguientes se han utilizado segmentos dirigidos.

DEFINICIÓN 1

El seno de un arco es la ordenada de su extremo.

Ejemplo 1

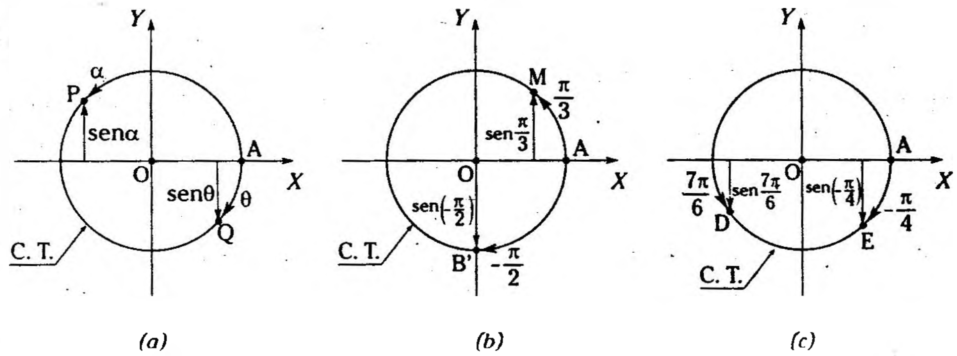


Figura 4.17

Ejemplo 2

Halle todos los valores de $\operatorname{sen}\theta$ si $\pi \leq \theta < \dfrac{3\pi}{2}$

Resolución

En la figura 4.18 se han dibujado algunos extremos de los infinitos que puede tener el arco θ según la condición $\pi \leq \theta < \dfrac{3\pi}{2}$

También se ha representado por segmentos dirigidos las ordenadas de los extremos del arco θ, que por definición representan al $\operatorname{sen}\theta$. Se observa que dichas ordenadas son mayores a -1 y menores o iguales a 0, es decir $-1 < \operatorname{sen}\theta \leq 0$. Una forma de hallar los valores que contiene el $\operatorname{sen}\theta$ es proyectando los extremos del arco θ sobre una recta numérica vertical, paralela (observe la figura 4.18).

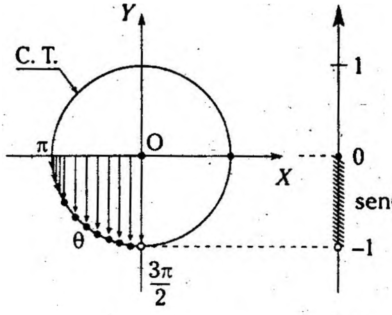


Figura 4.18

DEFINICIÓN II

El coseno de un arco es la abscisa de su extremo.

Ejemplo 1

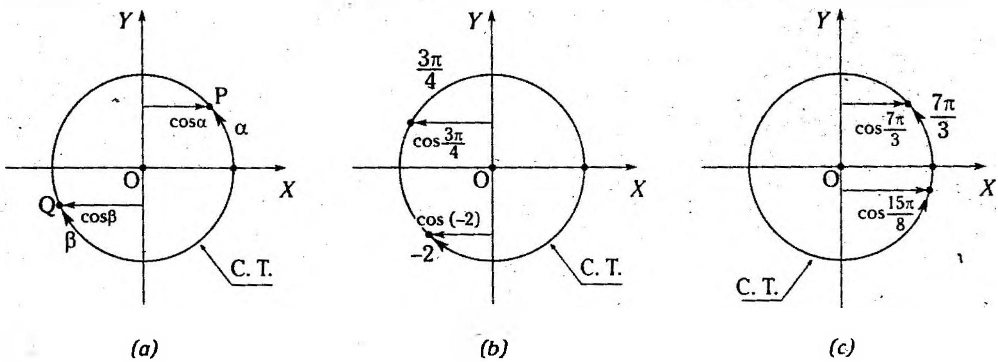


Figura 4.19

Ejemplo 2

Si $\alpha \in$ IVC , halle todos los valores que puede tomar $\cos\alpha$.

Resolución

Como $\alpha \in$ IVC , ello implica que α puede tomar tantos valores positivos como negativos por lo que no se representará el sentido de α sino solamente sus extremos.

En la figura 4.20 se han dibujado algunos extremos de los infinitos que puede adoptar el arco α en el IVC.

También se ha representado por segmentos dirigidos las abscisas de los extremos del arco α , que por definición representan al $\cos\alpha$. Se observa que dichas abscisas son mayores a 0, pero menores a 1, es decir $0 < \cos\alpha < 1$.

Análogamente al ejemplo anterior, los valores del $\cos\alpha$ se pueden obtener proyectando los extremos del arco α sobre una recta numérica $\mathcal{L}$ horizontal paralela al eje *X*, vea la figura 4.20.

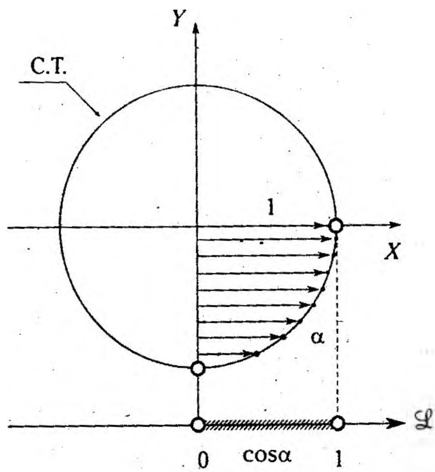


Figura 4.20

Teorema

$\forall\, \alpha \in \mathbf{R}$ se cumple

i) $-1 \leq \operatorname{sen}\alpha \leq 1$ ii) $-1 \leq \cos\alpha \leq 1$

En efecto, si α es cualquier número real, entonces su extremo en la C.T. podrá ser cualquier punto de esta. Los intervalos que contienen los valores del senα y cosα, se ilustran en la figura 4.21

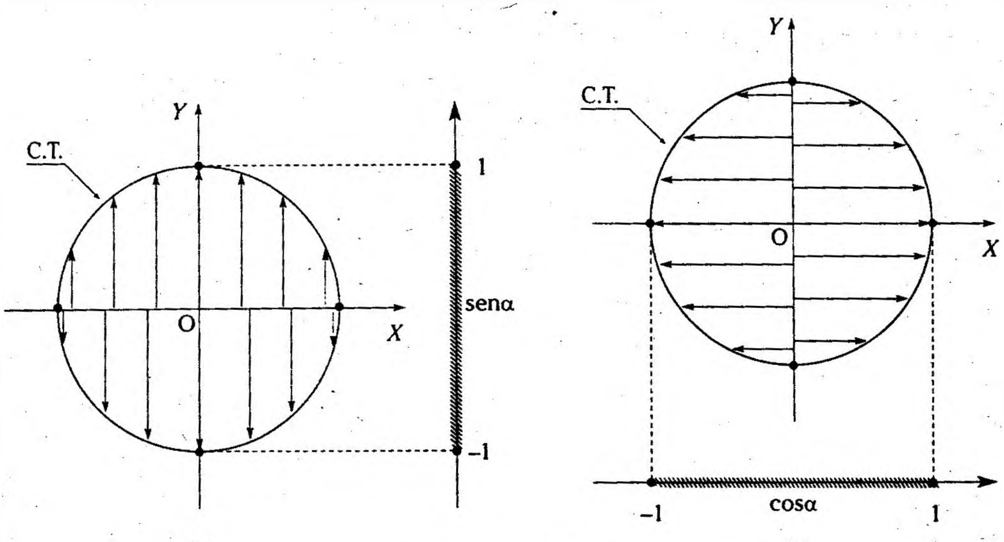


Figura 4.21

Observación

Sea α un arco en posición normal que determina un punto P sobre la circunferencia trigonométrica, con coordenadas $(x;y)$, entonces se cumple

$$x=\cos\alpha \quad \text{e} \quad y=\operatorname{sen}\alpha$$

Ejemplos

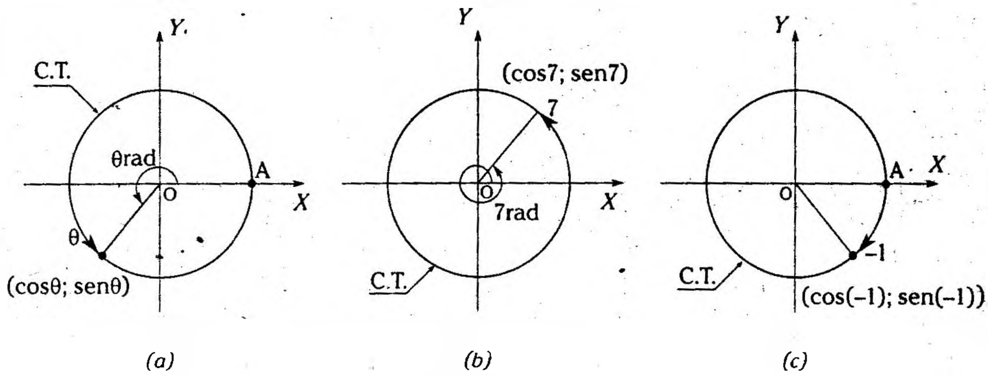


Figura 4.22

Observación

En los siguientes gráficos se muestran los ángulos cuadrantales (en radianes) y las coordenadas de los extremos de estos arcos o ángulos $(K \in \mathbb{Z})$.

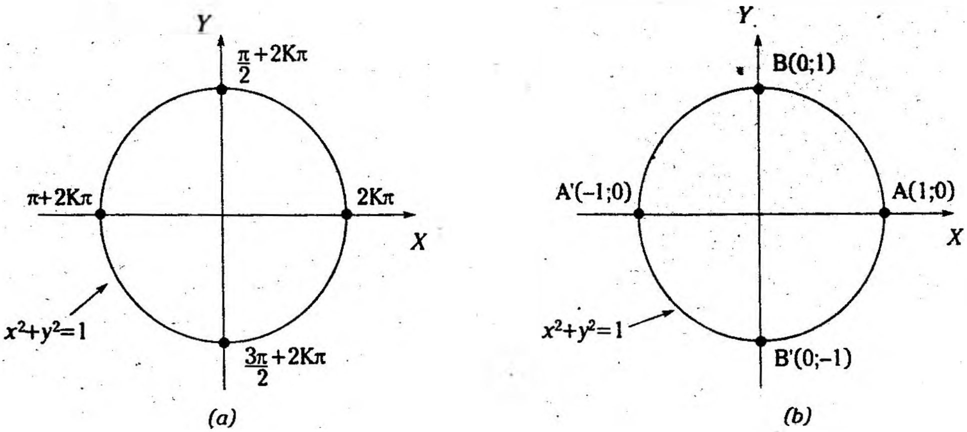


Figura 4.23

Luego, identificamos los valores del seno o coseno de estos arcos, relacionando con las ordenadas o abscisas de los puntos A, B, A' y B'.

- $\left.\begin{array}{l}\cos 2K\pi = 1 \\ \text{sen}2K\pi = 0\end{array}\right|$ puesto que la abscisa del punto A es 1 y su ordenada es 0.

  Es decir $\quad \cos 0 = 1 \;;\; \cos 2\pi = 1 \;;\; \cos 4\pi = 1 \;;\; ....$

  $\text{sen}0 = 0 \;;\; \text{sen}2\pi = 0 \;;\; \text{sen}4\pi = 0 \;;\; ....$

- $\left.\begin{array}{l}\cos\left(\dfrac{\pi}{2} + 2K\pi\right) = 0 \\ \text{sen}\left(\dfrac{\pi}{2} + 2K\pi\right) = 1\end{array}\right|$ puesto que la abscisa del punto B es 0 y su ordenada es 1.

  Es decir $\quad \cos\dfrac{\pi}{2} = 0 \;;\; \cos\dfrac{5\pi}{2} = 0 \;;\; \cos\dfrac{9\pi}{2} = 0$

  $\text{sen}\dfrac{\pi}{2} = 1 \;;\; \text{sen}\dfrac{5\pi}{2} = 1 \;;\; \text{sen}\dfrac{9\pi}{2} = 1$

- $\left.\begin{array}{l}\cos(\pi+2K\pi)=-1\\ \text{sen}(\pi+2K\pi)=0\end{array}\right|$ Puesto que la abscisa del punto A' es –1 y su ordenada es 0.

Es decir $\cos\pi=-1$; $\cos3\pi=-1$; $\cos5\pi=-1$; .....

$\text{sen}\pi=0$; $\text{sen}3\pi=0$; $\text{sen}5\pi=0$; .....

- $\left.\begin{array}{l}\cos\left(\frac{3\pi}{2}+2K\pi\right)=0\\ \text{sen}\left(\frac{3\pi}{2}+2K\pi\right)=-1\end{array}\right|$ Puesto que la abscisa del punto B' es 0 y su ordenada es –1.

Es decir $\cos\frac{3\pi}{2}=0$; $\cos\frac{7\pi}{2}=0$; $\cos\frac{11\pi}{2}=0$; ....

$\text{sen}\frac{3\pi}{2}=-1$; $\text{sen}\frac{7\pi}{2}=-1$; $\text{sen}\frac{11\pi}{2}=-1$; ....

DEFINICIÓN III

La tangente de un arco es la ordenada del punto de intersección entre la recta tangente que pasa por el origen de arcos y la prolongación del radio o diámetro que pasa por el extremo del arco.

Ejemplos

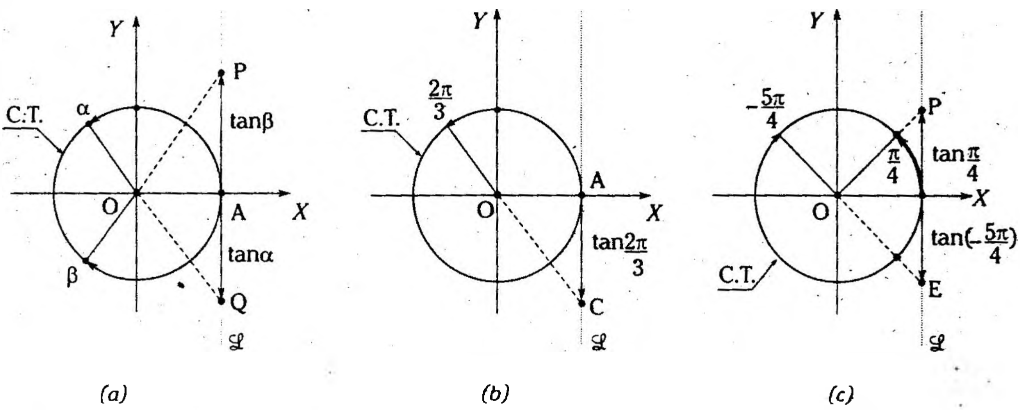


Figura 4.24

Observación

A la recta $\mathscr{L}$ de la figura 4.25 se le suele denominar eje de tangentes (con origen en A).

Ejemplo

Halle todos los valores de $\tan\theta$, si $\theta \in \left[\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{3}\right\rangle$

Resolución

En la figura 4.25 se han dibujado en la C.T., algunos extremos de los arcos $\theta \in \left[\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{3}\right\rangle$

También sobre la recta $\mathscr{L}$ tangente en el punto A se han dibujado los puntos cuyas ordenadas representan la $\tan\theta$. Se observa que dichas ordenadas pueden ser mayores o iguales a 1, pero menores que $\sqrt{3}$, es decir, $1 \leq \tan\theta < \sqrt{3}$. Una forma de hallar el intervalo que contiene los valores de la $\tan\theta$, es proyectando los puntos obtenidos en la recta $\mathscr{L}$ sobre una recta numérica paralela al eje Y.

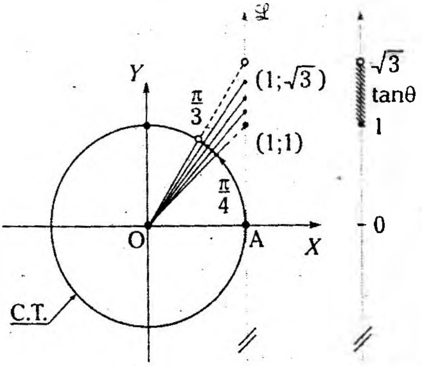


Figura 4.25

DEFINICIÓN IV

La cotangente de un arco es la abscisa del punto de intersección entre la recta tangente que pasa por el origen de complementos y la prolongación del radio o diámetro que pasa por el extremo del arco.

Ejemplos

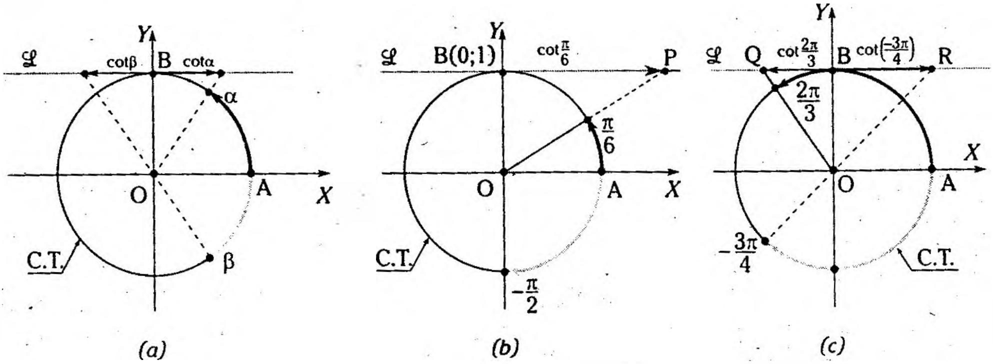


Figura 4.26

Observación

A la recta $\mathscr{L}$ de la figura 4.27 se le suele denominar eje de cotangentes (con origen en B).

Ejemplo

Si $\theta \in \left\langle -\pi; \frac{-\pi}{2} \right\rangle$, halle todos los valores de la $\cot\theta$.

Resolución

En la figura 4.27 se han graficado en la C.T. algunos extremos de los arcos $\theta \in \left\langle -\pi; \frac{-\pi}{2} \right\rangle$.

También sobre la recta $\mathscr{L}$ se han dibujado los puntos de intersección respectivos cuyas abscisas representan la $\cot\theta$. Se observa entonces que dichas abscisas son positivas, es decir $\cot\theta > 0$. Una forma de hallar el intervalo que contiene los valores de la $\cot\theta$ es proyectando los puntos obtenidos en la recta $\mathscr{L}$ sobre una recta numérica paralela al eje X.

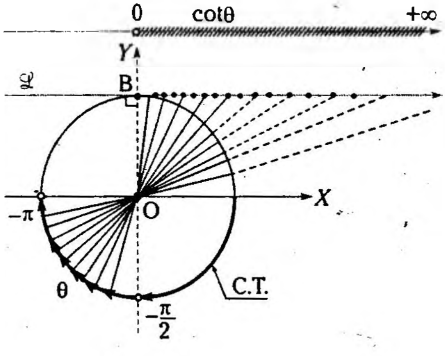


Figura 4.27

Teorema

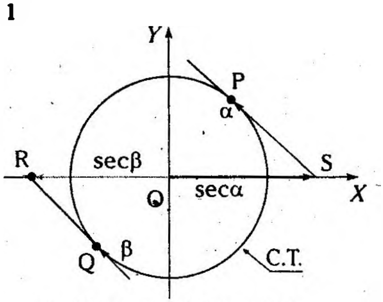
i) $\tan\alpha \in \mathbf{R}\ ;\forall\, \alpha \in \mathbf{R} - \left\{(2n+1)\frac{\pi}{2}\right\}\ ;\ n \in \mathbf{Z}$

ii) $\cot\alpha \in \mathbf{R}\ ;\forall\, \alpha \in \mathbf{R} - \{n\pi\}\ ;\ n \in \mathbf{Z}$

DEFINICIÓN V

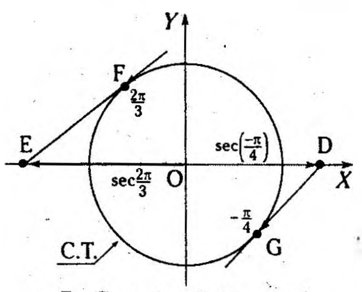
La secante de un arco es la abscisa del punto de intersección entre la recta tangente que pasa por el extremo del arco y el eje X.

Ejemplo 1



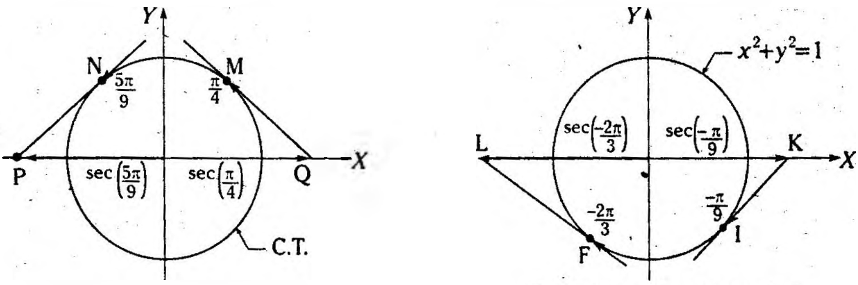
P y Q puntos de tangencia
$\Rightarrow$ S y R extremos de secantes

(a)



F y G puntos de tangencia
$\Rightarrow$ E y D extremos de secantes

(b)



M y N puntos de tangencia
⇒ P y Q extremos de las secantes

(c)

F e I puntos de tangencia
⇒ L y K extremos de las secantes

(d)

Figura 4.28

Ejemplo 2

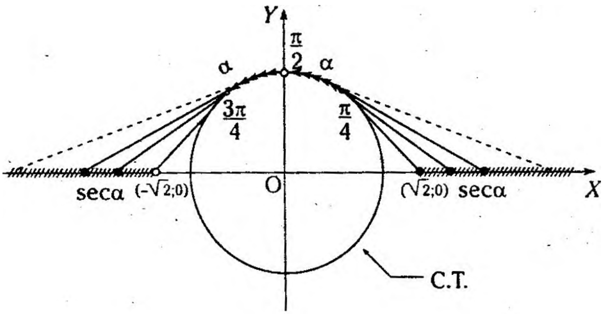
Si $\alpha \in \left[\frac{\pi}{4};\frac{3\pi}{4}\right\rangle - \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$; halle todos los valores de $\sec\alpha$.

Resolución

En la figura 4.29(a), en la C.T. se han dibujado algunos extremos de los arcos α, y sobre el eje X los respectivos puntos de intersección cuyas abscisas representan la $\sec\alpha$.

Se observa que los valores de dichas abscisas son menores a $-\sqrt{2}$ o mayores o iguales a $\sqrt{2}$, es decir

$$\sec\alpha < -\sqrt{2} \;\vee\; \sec\alpha \geq \sqrt{2}$$



(a)

Otra forma

Analizamos con la definición II, puesto que $\sec\alpha = 1/\cos\alpha$, de donde, obtenemos

$$\frac{-\sqrt{2}}{2} < \cos\alpha \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \text{(Vea la figura 4.29(b))}$$

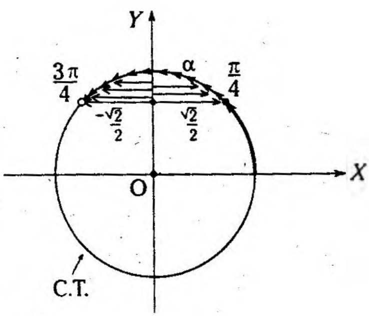
Para invertir la desigualdad, hacemos

$$\frac{-\sqrt{2}}{2} < \cos\alpha < 0 \;\vee\; 0 < \cos\alpha \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Luego, invirtiendo se tiene

$$\Rightarrow -\sqrt{2} > \frac{1}{\cos\alpha} \;\vee\; \frac{1}{\cos\alpha} \geq \sqrt{2}$$

$$\Rightarrow \sec\alpha < -\sqrt{2} \;\vee\; \sec\alpha \geq \sqrt{2}$$



(b)

Figura 4.29

DEFINICIÓN VI

La cosecante de un arco es la ordenada del punto de intersección, entre la recta tangente que pasa por el extremo del arco y el eje Y.

Ejemplo 1

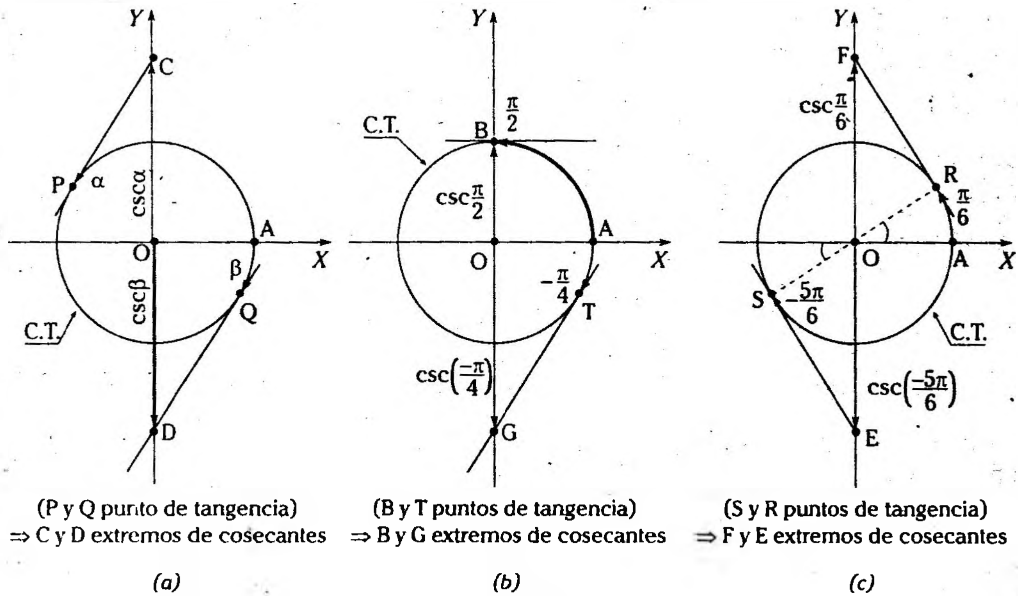


Figura 4.30

Ejemplo 2

Si $\alpha \in \left\langle 0\,;\frac{\pi}{4}\right\rangle$, halle todos los valores de $\csc\alpha$.

Resolución

En la figura 4.31, en la C.T. se han dibujado algunos extremos de los arcos α, y sobre el eje Y los respectivos puntos de intersección cuyas ordenadas representan a la $\csc\alpha$.

Se observa que los valores de dichas ordenadas son mayores a $\sqrt{2}$, es decir $\csc\alpha > \sqrt{2}$.

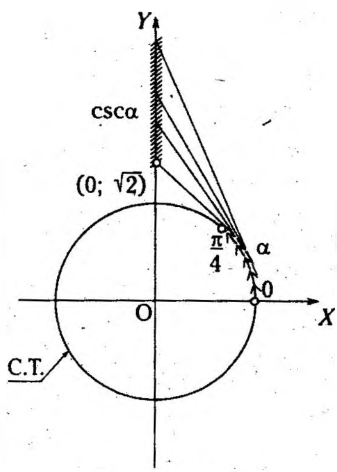


Figura 4.31

Otra forma

Analicemos con la definición I, veamos

Como $0 < \alpha < \frac{\pi}{4}$, entonces $0 < \operatorname{sen}\alpha < \frac{\sqrt{2}}{2}$

Invirtiendo la desigualdad $\quad \frac{1}{\operatorname{sen}\alpha} > \sqrt{2} \Rightarrow \csc\alpha > \sqrt{2}$

Teorema

i) $\sec\alpha \leq -1 \text{ o } \sec\alpha \geq 1 \;;\; \forall\alpha \in \mathbb{R} - \left\{(2n+1)\frac{\pi}{2}\right\} \;;\; n \in \mathbb{Z}$

ii) $\csc\alpha \leq -1 \text{ o } \csc\alpha \geq 1 \;;\; \forall\alpha \in \mathbb{R} - \{n\pi\} \;;\; n \in \mathbb{Z}$

Ejemplo 1

Halle los valores admisibles de b, a partir de la condición siguiente

$$b = 5\csc\alpha - 2$$

Resolución

Dada la expresión

$$b = 5\csc\alpha - 2 \;\ldots\ldots\; (1)$$

A partir del teorema anterior

$$\csc\alpha \leq -1 \vee \csc\alpha \geq 1 \;\ldots\ldots\; (2)$$

Formaremos la expresión (1), multiplicando primero por 5 y luego sumando (–2).

De (2) $\quad 5\csc\alpha \leq -5 \vee 5\csc\alpha \geq 5$

$$5\csc\alpha + (-2) \leq -5 + (-2) \vee 5\csc\alpha + (-2) \geq 5 + (-2)$$

$$\Rightarrow \underbrace{5\csc\alpha - 2}_{} \leq -7 \vee \underbrace{5\csc\alpha - 2}_{} \geq 3$$

$$b \leq -7 \quad \vee \quad b \geq 3 \;\ldots\ldots (3)$$

$$\therefore\; b = \langle -\infty; -7] \cup [3; +\infty\rangle$$

Ejemplo 2

Halle todos los valores admisibles de **a**, a partir de la siguiente condición

$$\sec\alpha = \frac{1-a}{3}$$

Resolución

Dada la expresión

$$\sec\alpha = \frac{1-a}{3} \qquad \ldots(1)$$

A partir del teorema anterior obtenemos

$$\sec\alpha \leq -1 \vee \sec\alpha \geq 1 \quad \ldots(2)$$

Como se pide los valores de **a** en lugar de $\sec\alpha$ escribimos $\frac{1-a}{3}$, esto es

reemplazando (1) en (2) se tiene

$$\frac{1-a}{3} \geq 1 \vee \frac{1-a}{3} \leq -1 \qquad \ldots(3)$$

Lo que haremos será despejar a en cada desigualdad y nuestra respuesta final será la unión de los dos intervalos que se obtenga.

Multiplicando por (3)

$$(3)\left(\frac{1-a}{3}\right) \geq (1)(3) \vee (3)\left(\frac{1-a}{3}\right) \leq (-1)(3)$$

Reduciendo

$$1 - a \geq 3 \vee 1 - a \leq -3$$

$$1 - a + (-1) \geq 3 + (-1) \vee 1 - a + (-1) \leq -3 + (-1)$$

$$\Rightarrow -a \geq 2 \vee -a \leq -4$$

Por (–1)

$$(-1)(-a) \leq (2)(-1) \vee (-1)(-a) \geq (-4)(-1)$$

$$\Rightarrow a \leq -2 \vee a \geq 4 \qquad \ldots(4)$$

(Observe que cuando se multiplica por (–1) el sentido de la desigualdad ha cambiado).

Si las desigualdades obtenidas en (4) las representamos en la recta numérica, obtenemos

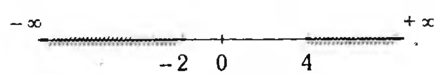


Figura 4.32

A partir de la figura se obtiene el intervalo para **a**.

$$\therefore\; a = \langle -\infty; -2] \cup [4; +\infty\rangle$$

Representaciones Auxiliares

SENOVERSO, COSENOVERSO Y EXSECANTE

- El senoverso o verso de un arco θ denotado por vers(θ), se define:

$$\text{vers}\theta = 1 - \cos\theta \quad ; \quad \forall\, \theta \in \mathbb{R}$$

- El cosenoverso o coverso de un arco θ denotado por cov(θ), se define:

$$\text{cov}\theta = 1 - \text{sen}\,\theta \quad ; \quad \forall\, \theta \in \mathbb{R}$$

- La exsecante de un arco θ denotado por exsec(θ), se define:

$$\text{exsec}\theta = \sec\theta - 1 ; \forall \theta \in \mathbb{R} - \left\{(2n+1)\frac{\pi}{2}\right\} ; n \in \mathbb{Z}$$

Ejemplos

- $\text{vers}\left(\frac{\pi}{3}\right) = 1 - \cos\frac{\pi}{3} = 1 - \left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$
- $\text{cov}\left(-\frac{3\pi}{4}\right) = 1 - \text{sen}\left(\frac{-3\pi}{4}\right) = 1 - \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{2+\sqrt{2}}{2}$
- $\text{exsec}(\pi) = \sec\pi - 1 = (-1) - 1 = -2$

Teniendo en cuenta los teoremas de las páginas **212 y 220** se llegan a deducir las siguientes variaciones:

i) $0 \le \text{vers}\theta \le 2$

ii) $0 \le \text{cov}\theta \le 2$

iii) $\text{exsec}\theta \le -2$ ó $\text{exsec}\theta \ge 0$

Observación

Gráficamente el **verso** de un arco dirigido es el segmento dirigido en el eje *X* que parte del punto cuya coordenada es el coseno de dicho arco hacia el origen de arcos.

Ejemplo

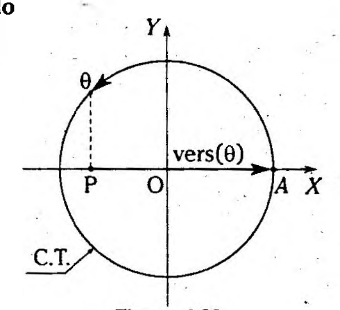


Figura 4.33

De la figura se cumple

$$\text{vers}\theta = \overline{PA}$$

ya que $\overline{PA} = A - P$ (véase página **160**)

$$\Rightarrow \text{vers}\theta = \underbrace{A}_{} - \underbrace{P}_{}$$

$$\therefore \text{vers}\theta = 1 - \cos\theta$$

Observación

Gráficamente el **coverso** de un arco dirigido es el segmento dirigido en el eje *Y* que parte del punto cuya coordenada es el seno de dicho arco hacia el origen de complementos.

Ejemplo 1

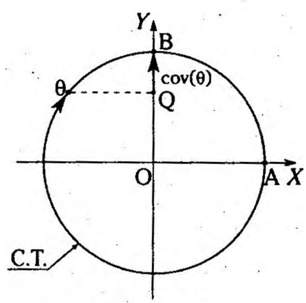


Figura 4.34

De la figura se cumple

$$\text{cov}\theta = \overline{QB}$$

ya que $\overline{QB} = B - Q$

$$\Rightarrow \text{cov}\theta = \underbrace{B}_{} - \underbrace{Q}_{}$$

$$\therefore \text{cov}\theta = 1 - \text{sen}\theta$$

Gráficamente la **exsecante** de un arco dirigido es el segmento dirigido en el eje X que parte del origen de arcos hacia el punto cuya coordenada es la secante de dicho arco.

Ejemplo 2

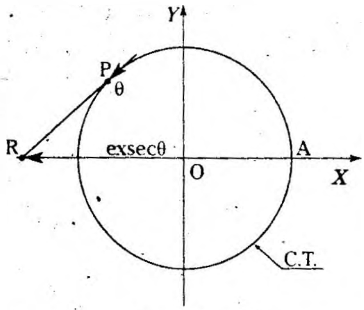


Figura 4.35

De la figura, P es punto de tangencia y se cumple

$$\text{exsec}\theta = \overline{AR}$$

ya que $\overline{AR} = R - A$

$\Rightarrow \text{exsec}\theta = R - A$

$\therefore \text{exsec}\theta = \sec\theta - 1$

Ejemplo 3

Represente el verso, coverso y exsecante.

i) Para un número 2

- $\text{vers}2 = \overline{FA}$
- $\text{cov}2 = \overline{EB}$
- $\text{exsec}2 = \overline{AP}$

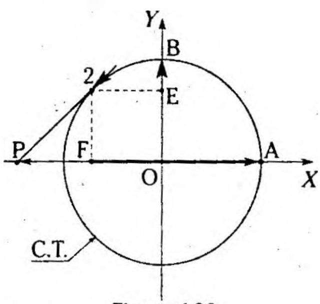


Figura 4.36

ii) Para un número $\left(-\frac{\pi}{4}\right)$

- $\text{vers}\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \overline{PA}$
- $\text{cov}\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \overline{NB}$
- $\text{exsec}\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \overline{AT}$

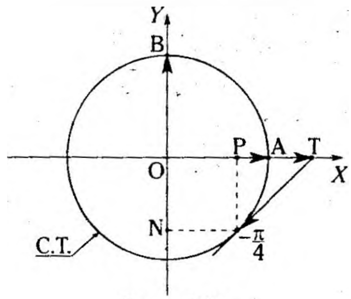


Figura 4.37

Ejemplo 4

Utilizando segmentos dirigidos, demuestre que

$$\text{vers}4 > \text{vers}2 > \text{vers}1$$

Resolución

De la figura 4.38 se cumple

$$\underbrace{\overline{PA}} > \underbrace{\overline{QA}} > \underbrace{\overline{RA}}$$

$\therefore \text{vers}4 > \text{vers}2 > \text{vers}1$

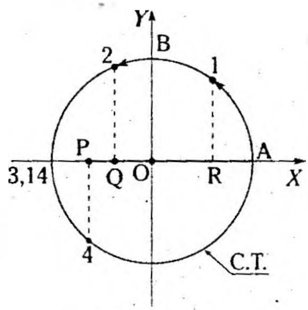


Figura 4.38

Problemas Resueltos

Problema 1

Luego de ubicar los números $\frac{8\pi}{9}; -3; -\sqrt{2}$ en la circunferencia trigonométrica, indique los signos de las expresiones $\cos\frac{8\pi}{9}$; $\tan(-3)$; $\text{sen}(-\sqrt{2})$

Resolución

Representaremos en forma aproximada a los números mencionados, como arcos en posición normal. Dicha representación se hace teniendo en cuenta los arcos referenciales como son:

$$1{,}57 \;;\; 3{,}14 \;;\; -3{,}14 \;\text{ y }\; -1{,}57$$

Como $\frac{8\pi}{9} \approx 2{,}79$; entonces $1{,}57 < \frac{8\pi}{9} < 3{,}14$. Esta es la razón de su ubicación en la C.T.

De igual forma, para -3, se tiene que $-3{,}14 < -3 < -1{,}57$.

Finalmente, como $-\sqrt{2} \approx -1{,}41$; entonces $-1{,}57 < -\sqrt{2} < 0$.

Para un mejor entendimiento le sugerimos observar la figura 4.39.

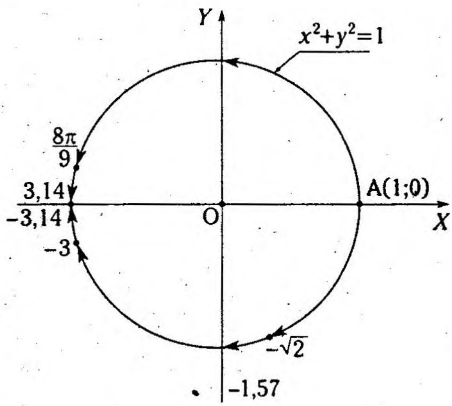


Figura 4.39

Luego observamos $\frac{8\pi}{9} \in \text{IIC} \Rightarrow \cos\frac{8\pi}{9} < 0$

$-3 \in \text{IIIC} \Rightarrow \tan(-3) > 0$

$-\sqrt{2} \in \text{IVC} \Rightarrow \text{sen}(-\sqrt{2}) < 0$

Los signos, respectivamente, son (–) ; (+) ; (–)

Problema 2

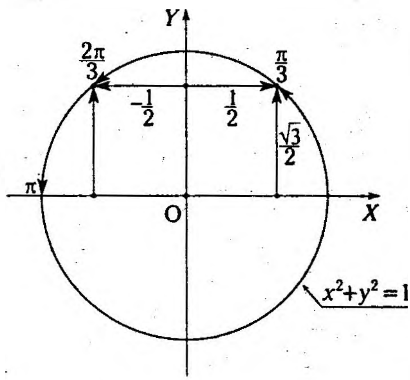
Encuentre el valor de cada una de las expresiones siguientes:

a) $\text{sen}\frac{2\pi}{3}$; $\cos\frac{2\pi}{3}$

b) $\text{sen}\frac{5\pi}{4}$; $\cos\frac{5\pi}{4}$

Resolución

Antes de que empiece a revisar la resolución de este problema, le sugerimos repasar los ejemplos con simetría desarrollados en la página **211**.

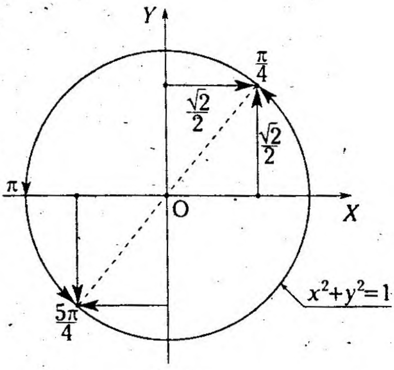


(a)

Puesto que $\frac{2\pi}{3}$ se puede expresar como $\pi - \frac{\pi}{3}$; ubiquemos a los números $\frac{\pi}{3}$ y $\frac{2\pi}{3}$ en la C.T. (nótese la simetría respecto al eje *Y*); luego representando a los senos y cosenos con segmentos dirigidos tenemos

$$\text{sen}\frac{2\pi}{3} = \text{sen}\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos\frac{2\pi}{3} = -\cos\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}$$



(b)

Figura 4.40

Análogamente para el número $\frac{5\pi}{4}=\pi+\frac{\pi}{4}$

$$\text{sen}\frac{5\pi}{4}=-\text{sen}\frac{\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos\frac{5\pi}{4}=-\cos\frac{\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$\therefore$ a) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; $-\frac{1}{2}$ b) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$; $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

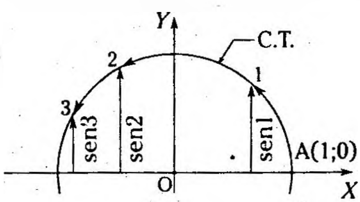
Problema 3

Ordene en forma creciente

a) sen1, sen2, sen3
b) cos4, cos5, cos6
c) tan2, tan3, tan4

Resolución

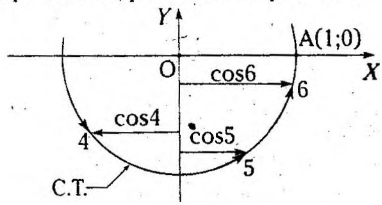
a) Para representar los senos de números reales, representamos estos números como arcos que se generan a partir del punto A(1;0). Luego, el gráfico aproximado será el siguiente:



(a)

Entonces, ordenando de menor a mayor:
sen3, sen1 y sen2

b) Aquí cos4<0, pero cos5>0 y cos6>0.

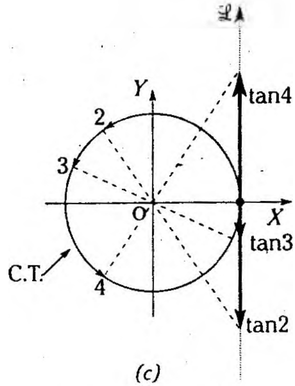


(b)

Entonces, ordenando de menor a mayor:
cos4, cos5 y cos6

c) Aquí se observa que tan2<0 y tan3<0 pero tan4>0

Entonces, ordenando de menor a mayor:
tan2, tan3 y tan4

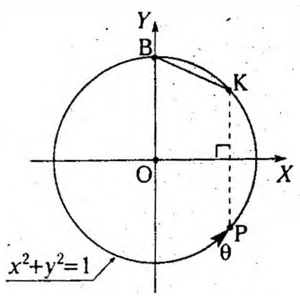


(c)

Figura 4.41

Problema 4

A partir de la figura adjunta, exprese el segmento BK en términos de θ.

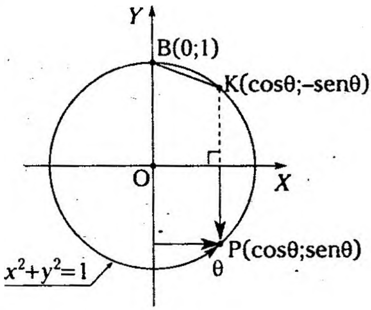


(a)

Resolución

Son conocidas las coordenadas de P, por ser el extremo del arco en posición normal: P(cosθ ; senθ), pero debido a que K y P son puntos simétricos respecto al eje X, podemos afirmar lo siguiente:

K y P presentan igual abscisa y ordenadas opuestas por lo que la abscisa del punto K es cos θ y su ordenada es (−senθ); le sugerimos observar el gráfico.



(b)

Figura 4.42

Puesto que ahora se conocen las coordenadas de B y K, esto es B(0;1) y K(cos θ; −senθ), se puede aplicar la fórmula para distancia entre dos puntos

$$BK = \sqrt{(0-\cos\theta)^2+(1-(-\text{sen}\theta))^2}$$

Efectuando

$$BK = \sqrt{\cos^2\theta+1+\text{sen}^2\theta+2\text{sen}\theta}$$

pero $\text{sen}^2\theta+\cos^2\theta=1$

Esta igualdad se obtiene a partir de que el radio vector del punto P es OP y dicha longitud es 1.

Entonces

$$OP = \sqrt{(\text{abscisa de P})^2+(\text{ordenada de P})^2}$$

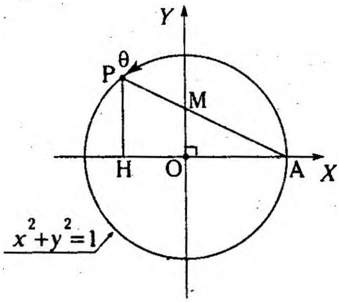
$$\Rightarrow\ 1=\sqrt{(\cos\theta)^2+(\text{sen}\theta)^2}$$

de donde $\text{sen}^2\theta+\cos^2\theta=1$

$$\therefore\ BK=\sqrt{2(1+\text{sen}\theta)}$$

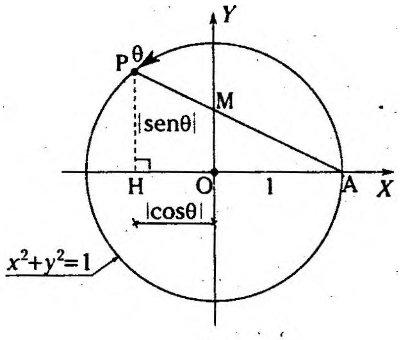
Problema 5

Calcule OM, en términos de θ.



(a)

Resolución



(b)

Figura 4.43

⊿AOM ~ ⊿AHP

$$\frac{OM}{1}=\frac{|\text{sen}\theta|}{1+|\cos\theta|}\quad ...(1)$$

Pero $\theta\in$ IIC

$$\Rightarrow\ |\text{sen}\theta|=\text{sen}\theta \quad y \quad |\cos\theta|=-\cos\theta \quad ...(2)$$

Reemplazando (2) en (1) obtenemos

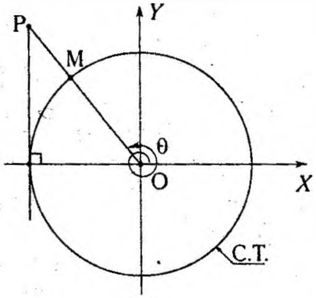
$$\frac{OM}{1}=\frac{\text{sen}\theta}{1+(-\cos\theta)}$$

Reduciendo obtendremos, finalmente

$$OM=\frac{\text{sen}\theta}{1-\cos\theta}$$

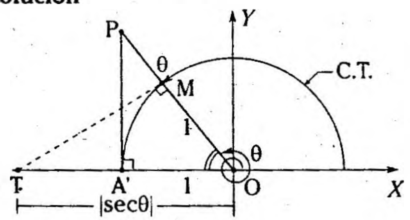
Problema 6

Del gráfico, calcule PM en función de θ.



(a)

Resolución



(b)

Figura 4.44

Del gráfico trazamos TM tangente a la C.T. tal que

$\triangle OA'P \cong \triangle OMT$ caso (ALA)

Luego, $PO = |\sec\theta|$

Pero $\theta \in IIC \Rightarrow |\sec\theta| = -\sec\theta$

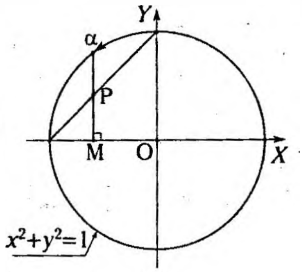
Además $PM = PO - MO$

$PM = |\sec\theta| - 1$

$\therefore\ PM = -\sec\theta - 1$

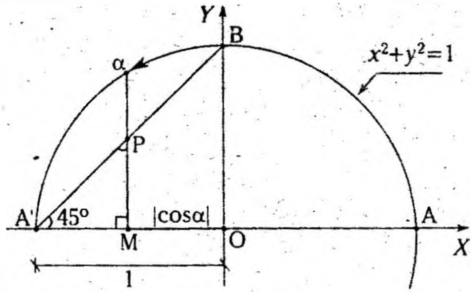
Problema 7

Del gráfico mostrado, halle PM en términos de α.



(a)

Resolución



(b)

Figura 4.45

En la figura A'OB y A'MP son notables con ángulo de 45°. Por tal motivo afirmamos lo siguiente:

$PM = A'M$ ... (1)

$MO = |\cos\alpha|$ ... (2)

$A'M = 1 - MO$ ... (3)

Reemplazando (2) en (3) obtenemos

$A'M = 1 - |\cos\alpha|$ ... (4)

Reemplazando (4) en (1) se tiene

$PM = 1 - |\cos\alpha|$ ... (5)

Como $\alpha \in IIC \Rightarrow |\cos\alpha| = -\cos\alpha$

En (5): $PM = 1 - (-\cos\alpha)$

Efectuando $\therefore\ PM = 1 + \cos\alpha$

Problema 8

Si $-\pi < \alpha < \theta < \beta < -\frac{\pi}{2}$, averigüe la verdad o falsedad de las siguientes proposiciones:

I. $\operatorname{sen}\beta > \operatorname{sen}\theta > \operatorname{sen}\alpha$

II. $|\cos\alpha| > |\cos\theta| > |\cos\beta|$

Resolución

En la C.T.

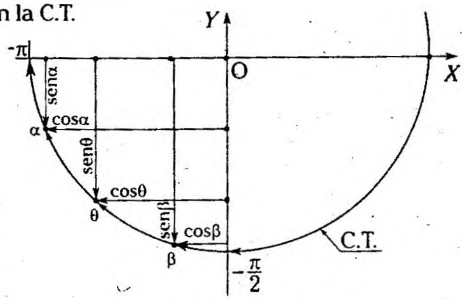


Figura 4.46

Al hacer la representación de los senos y cosenos, como segmentos dirigidos (véase figura), el orden es evidente $\operatorname{sen}\alpha > \operatorname{sen}\theta > \operatorname{sen}\beta$

también $\cos\beta > \cos\theta > \cos\alpha$

pero en valor absoluto de los cosenos tenemos

$$|\cos\beta| < |\cos\theta| < |\cos\alpha|$$

$\therefore$ I es falso y II es verdadero.

Problema 9

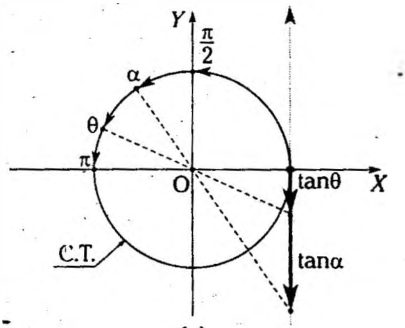
Indique la verdad o falsedad de las proposiciones:

I. Si $\frac{\pi}{2} < \alpha < \theta < \pi \Rightarrow |\tan\alpha| < |\tan\theta|$

II. Si $\pi < \omega < \beta < \frac{3\pi}{2} \Rightarrow \cot(-\omega) > \cot(-\beta)$

Resolución

De I, planteamos la figura siguiente:



(a)

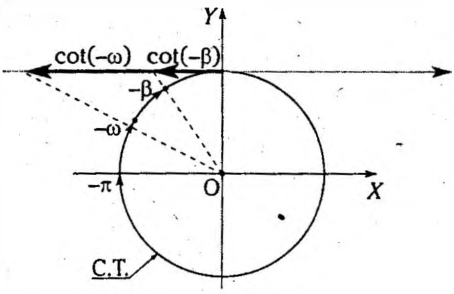
Luego, de la representación de α y θ, se cumple

$$\tan\alpha < \tan\theta$$

como $\tan\alpha$ y $\tan\theta$ son negativas, entonces

$$|\tan\alpha| > |\tan\theta|$$

Análogamente para II, tenemos la figura siguiente:



(b)

Figura 4.47

En la condición, multiplicando por (−1)

$$\Rightarrow -\pi > -\omega > -\beta > -\frac{3\pi}{2}$$

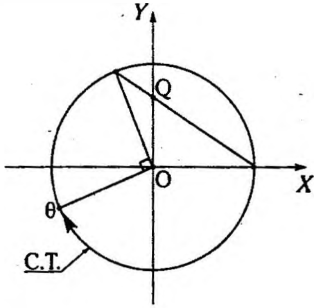
Luego de su representación de $-\omega$ y $-\beta$ en el segundo cuadrante, se cumple

$$\cot(-\omega) < \cot(-\beta)$$

$\therefore$ I es falso y II es falso.

Problema 10

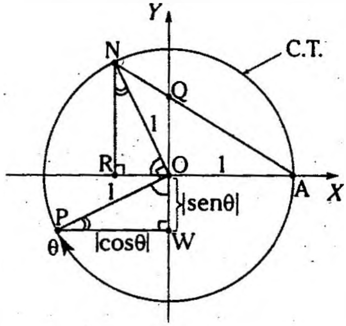
De la figura, halle la distancia entre los puntos O y Q, en términos de θ.



(a)

Resolución

En la figura 4.48(b), se han trazado las perpendiculares NR y PW a los ejes coordenados.



(b)

Figura 4.48

Los triángulos rectángulos sombreados NRO y PWO son congruentes, luego

$$NR=PW \;;\; RO=OW$$

$$NR=|\cos\theta| \;;\; RO=|\operatorname{sen}\theta|$$

El triángulo rectángulo AOQ es semejante al triángulo rectángulo ARN.

$$\frac{OQ}{OA}=\frac{NR}{RA}$$

$$\Rightarrow \frac{OQ}{1}=\frac{|\cos\theta|}{1+|\text{sen}\theta|} \quad ...(1)$$

Nótese que $\theta\in$ IIIC $\Rightarrow \begin{cases} |\cos\theta|=-\cos\theta \\ |\text{sen}\theta|=-\text{sen}\theta \end{cases}$

Reemplazando en (1)

$$\frac{OQ}{1}=\frac{(-\cos\theta)}{1+(-\text{sen}\theta)}$$

$$\Rightarrow OQ=\frac{-\cos\theta}{1-\text{sen}\theta}$$

Factorizando (−1) en el denominador

$$OQ=\frac{-\cos\theta}{-(\text{sen}\theta-1)}$$

Reduciendo obtenemos

$$\therefore OQ=\frac{\cos\theta}{\text{sen}\theta-1}$$

Problema 11

Siendo $\left(-\frac{1}{3}\right)$ la abscisa del extremo del arco θ, tal que $\theta\in$ IIC, halle las coordenadas del extremo del arco dado por $\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)$

Resolución

Considerando a P y M extremos de los arcos θ y $\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)$ respectivamente, obviamente en una circunferencia unitaria, entonces se tiene

- $P(\cos\theta;\text{sen}\theta)$
- $M\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right);\ \text{sen}\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)\right)$
  $=M(-\text{sen}\theta;\cos\theta)$

pero del enunciado en P $\cos\theta=-\frac{1}{3}$

Utilizando la ecuación

$$x^2+y^2=1 \Rightarrow (\cos\theta)^2+(\text{sen}\theta)^2=1$$

Sustituyendo el valor de $\cos\theta$ se tiene

$$\text{sen}\theta=\pm\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

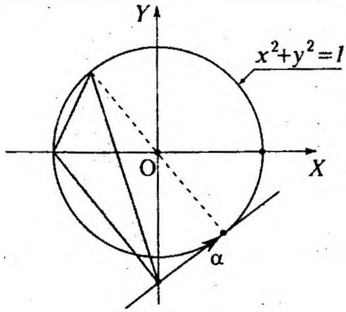
Como $\theta\in$ IIC, entonces

$$\text{sen}\theta=\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

Finalmente $M\left(-\frac{2\sqrt{2}}{3};-\frac{1}{3}\right)$

Problema 12

En la figura, determine el área de la región sombreada.

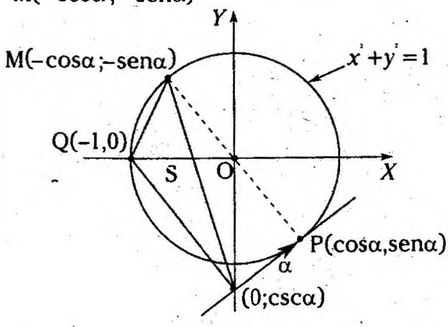


(a)

Resolución

Como P es el extremo del arco α, entonces se le asocia el par ordenado $(\cos\alpha;\text{sen}\alpha)$; luego, el punto M es simétrico con P, respecto al origen de coordenadas.

$\Rightarrow M(-\cos\alpha;-\text{sen}\alpha)$

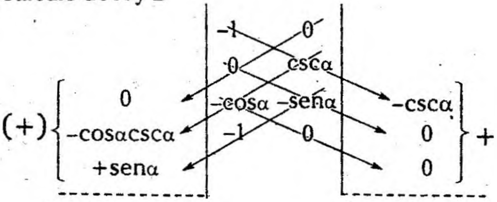


(b)

Figura 4.49

Sabemos $S=\frac{1}{2}(A-B)$ ... (1)

Cálculo de A y B



B=+senα−cotα A=−cscα

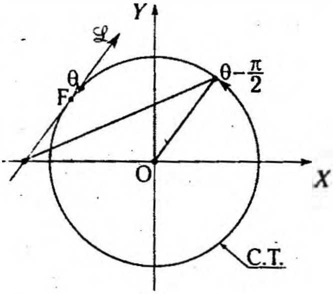
Reemplazando en (I)

$$S=\frac{1}{2}(-\csc\alpha-\operatorname{sen}\alpha+\cot\alpha)$$

Ordenando $S=\frac{1}{2}(\cot\alpha-\operatorname{sen}\alpha-\csc\alpha)$

Problema 13

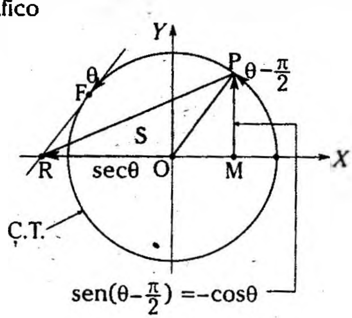
Del gráfico, halle el área de la región sombreada, siendo la recta $\mathscr{L}$ tangente a la C.T. en el punto F.



(a)

Resolución

Si S nos expresa el área de la región sombreada, del gráfico



(b)

Figura 4.50

$$S=\frac{(OR)(MP)}{2}$$

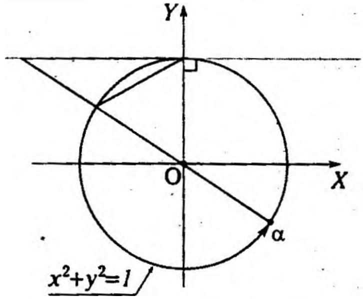
$$S=\frac{|\sec\theta|\ |-\cos\theta|}{2}\ ;\ \theta\in IIC$$

$$S=\frac{(-\sec\theta)(-\cos\theta)}{2}$$

$$\therefore\ S=\frac{1}{2}u^2$$

Problema 14

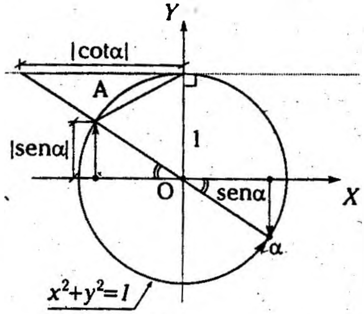
Determine el área de la región sombreada en términos de α .



(a)

Resolución

Siendo A el área de la región sombreada, del gráfico



(b)

Figura 4.51

$$A=\frac{|\cot\alpha|\times(1-|\operatorname{sen}\alpha|)}{2}$$

Como $\alpha \in$ IVC $\begin{cases} |\cot\alpha| = -\cot\alpha \\ |\text{sen}\alpha| = -\text{sen}\alpha \end{cases}$

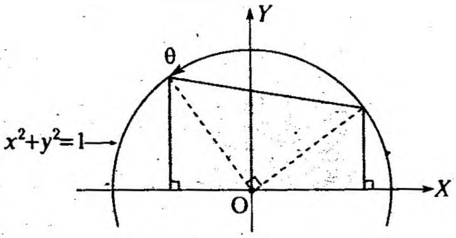
Luego $A = \dfrac{(-\cot\alpha)(1+\text{sen}\alpha)}{2}$

(para poder reducir un poco más, utilizaremos la identidad $\cot\alpha \,.\, \text{sen}\alpha = \cos\alpha$, la cual demostraremos en el Capítulo V).

$\therefore\ A = \dfrac{-1}{2}(\cot\alpha + \cos\alpha)$

Problema 15

Determine el área de la región sombreada.



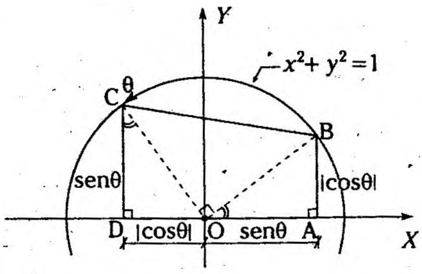
(a)

Resolución

$\triangle CDO \cong \triangle OAB$

$\Rightarrow\ OA = \text{sen}\theta$

$BA = |\cos\theta| = -\cos\theta\ ;\ \theta \in$ IIC



(b)

Figura 4.52

Luego, el área de la región trapezoidal se expresa así

$S = S_{OAB} + S_{BOC} + S_{ODC}$

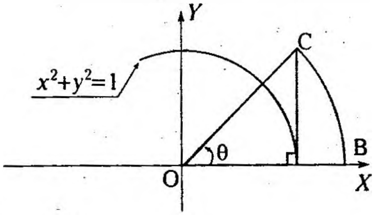
$S = \dfrac{\text{sen}\theta|\cos\theta|}{2} + \dfrac{1\times 1}{2} + \dfrac{|\cos\theta|\text{sen}\theta}{2}$

$S = \dfrac{1}{2} + \text{sen}\theta|\cos\theta|$

$\therefore\ S = \left(\dfrac{1}{2} - \text{sen}\theta\cos\theta\right)u^2$

Problema 16

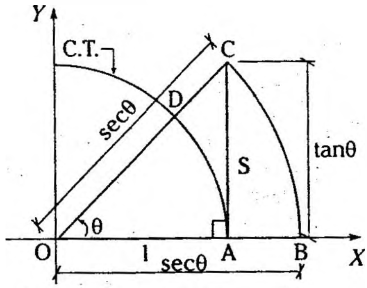
Del gráfico, calcule el área de la región sombreada, si BOC es un sector circular.



(a)

Resolución

El área del trapecio circular (S), lo calcularemos como una diferencia de regiones entre los sectores BOC y AOD.



(b)

Figura 4.53

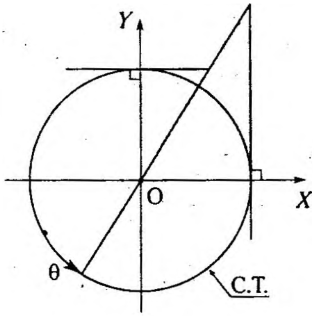
$\Rightarrow\ S = \dfrac{1}{2}\theta(\sec\theta)^2 - \dfrac{1}{2}\theta(1)^2$

$\Rightarrow\ S = \dfrac{\theta}{2}(\sec^2\theta - 1)$ (usando $\sec^2\theta - 1 = \tan^2\theta$)

$\therefore\ S = \dfrac{\theta}{2}\tan^2\theta$

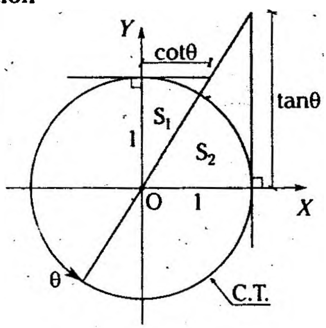
Problema 17

Calcule el mínimo valor del área de la región sombreada.



(a)

Resolución



(b)

Figura 4.54

Calcularemos el área total así

$$A_{total} = S_1 + S_2$$

$$= \frac{1 \cdot \cot\theta}{2} + \frac{1 \cdot \tan\theta}{2}$$

$$= \frac{1}{2}(\cot\theta + \tan\theta)$$

Debemos tener presente que si $\theta \in$ IIIC, entonces $\cot\theta + \tan\theta \geq 2$.

Multiplicando por $\left(\frac{1}{2}\right)$

$$\underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)(\tan\theta + \cot\theta)}_{A_{total}} \geq 1$$

$$\therefore\ (A_{total})_{mín} = 1$$

Nota

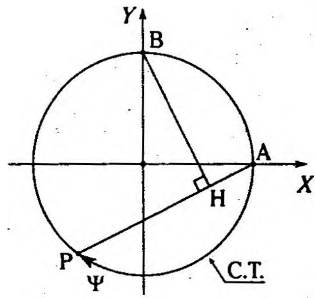
$(A_{total})_{mín} = 1$ se da cuando $\theta = \frac{5\pi}{4}$,

es decir $\tan\theta = \cot\theta$

Problema 18

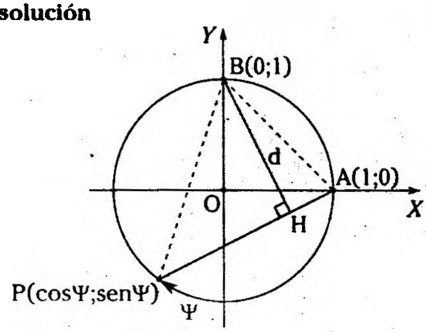
Según el gráfico que se muestra, BH=d.

Halle $f = \dfrac{\text{sen}\psi + \cos\psi - 1}{\sqrt{1 - \cos\psi}}$ en términos de d.



(a)

Resolución



(b)

Figura 4.55

Para relacionar el arco ψ y la longitud d, hallaremos el área de la región sombreada por la fórmula indicada en la primera parte de esta obra.

$$2S = 1(1 - \text{sen}\psi) + 0(\text{sen}\psi - 0) + \cos\psi(0 - 1)$$

$$S = \frac{1 - \text{sen}\psi - \cos\psi}{2} \quad \text{... (i)}$$

También se determina el área como sabemos

$$S = \frac{PA.d}{2} \quad \text{...(ii)}$$

Cálculo de PA por distancia entre dos puntos, tenemos

$$PA=\sqrt{(\cos\psi-1)^2+(\operatorname{sen}\psi-0)^2}$$

$$PA=\sqrt{\underbrace{\cos^2\psi+1-2\cos\psi+\operatorname{sen}^2\psi}_{1}}$$

$$PA=\sqrt{2}\cdot\sqrt{1-\cos\psi}$$

Reemplazando en (ii)

$$S=\frac{\sqrt{2}.\sqrt{1-\cos\psi}.d}{2} \quad \text{... (iii)}$$

De (i) y (iii)

$$\frac{1-\operatorname{sen}\psi-\cos\psi}{2}=\frac{\sqrt{2}.\sqrt{1-\cos\psi}.d}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{\operatorname{sen}\psi+\cos\psi-1}{\sqrt{1-\cos\psi}}=-\sqrt{2}d$$

$$\therefore\ f=-\sqrt{2}d$$

Problema 19

Siendo α un arco no negativo y no mayor de una vuelta, exprese la variación de $|\tan\alpha|$, cuando

$$0\leq \operatorname{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right)\leq\frac{1}{2}$$

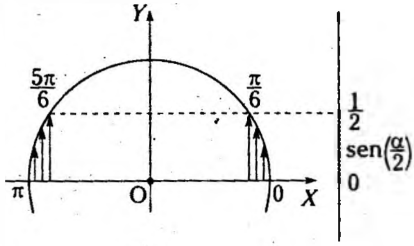
Resolución

Del enunciado tenemos

$$0\leq\alpha\leq 2\pi$$

$$\Rightarrow 0\leq\frac{\alpha}{2}\leq\pi$$

Luego, en la C.T. tenemos



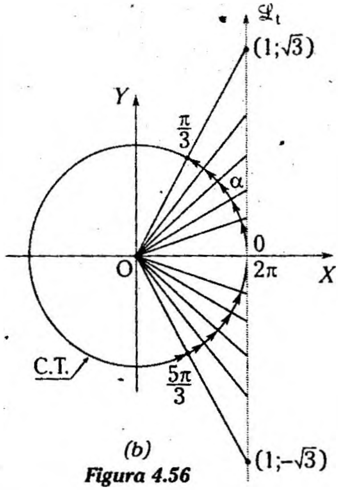
(a)

Luego, de la figura anterior se deduce que

$$\frac{\alpha}{2}\in\left[0\,;\,\frac{\pi}{6}\right]\cup\left[\frac{5\pi}{6}\,;\,\pi\right]$$

$$\Rightarrow \alpha\in\left[0\,;\,\frac{\pi}{3}\right]\cup\left[\frac{5\pi}{3}\,;\,2\pi\right]$$

Nuevamente representando α en la C.T.



(b)

Figura 4.56

De la figura se deduce

$$-\sqrt{3}\leq\tan\alpha\leq\sqrt{3}$$

$$0\leq|\tan\alpha|\leq\sqrt{3}$$

$$\therefore\ |\tan\alpha|=\left[0\,;\sqrt{3}\right]$$

Problema 20

Si $\operatorname{sen}^2x=1+\tan\beta$, averigüe los valores de β, si éste pertenece al segundo cuadrante.

Resolución

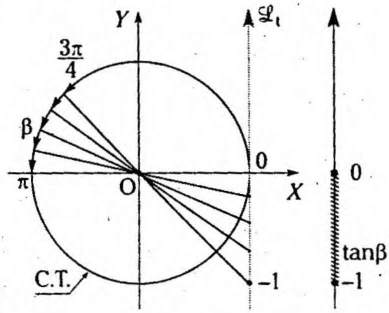


Figura 4.57

Se conoce que $-1 \le \operatorname{sen} x \le 1$; $\forall x \in \mathbb{R}$

Elevando al cuadrado $0 \le \operatorname{sen}^2 x \le 1$

Sustituyendo $\operatorname{sen}^2 x$ por $(1+\tan\beta)$, tenemos

$$0 \le 1+\tan\beta \le 1 \Rightarrow -1 \le \tan\beta \le 0$$

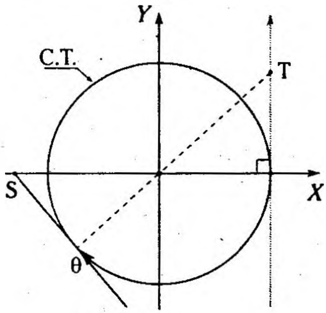
Luego, analizando en la C.T., se tiene $\frac{3\pi}{4} \le \beta \le \pi$

en general $\frac{3\pi}{4} + 2\pi K \le \beta \le \pi + 2\pi K$; $K \in \mathbb{Z}$

$$\left[\frac{3\pi}{4} + 2K\pi \ ; \ \pi + 2\pi K\right] ; \ K \in \mathbb{Z}$$

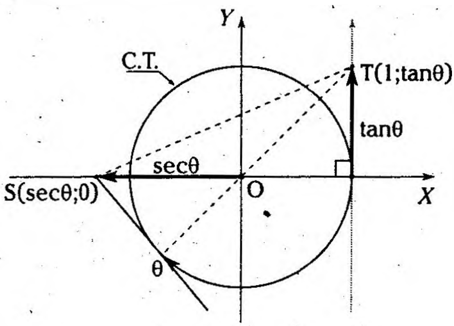
Problema 21

Del gráfico mostrado, calcule las coordenadas del punto medio de $\overline{TS}$ en términos de θ.



(a)

Resolución



(b)

Figura 4.58

Sea M(*x*;*y*) las coordenadas del punto medio de $\overline{TS}$, entonces

$$x = \frac{1+\sec\theta}{2}$$

$$y = \frac{\tan\theta}{2}$$

$$\left(\frac{1+\sec\theta}{2} ; \frac{\tan\theta}{2}\right)$$

Problema N° 22

Analice la verdad o falsedad de las proposiciones:

I. tan6>cot6

II. sec4>csc4

Resolución

En la C.T. se ubican los extremos de los arcos 4 y 6. También se han trazado las rectas tangentes a los extremos de los arcos $\frac{5\pi}{4}$ y 4 (ver figura 4.59).

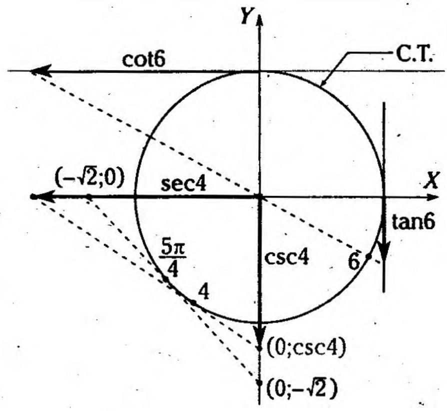


Figura 4.59

Nótese que $4 > \frac{5\pi}{4} \approx 3{,}9$

Para $\frac{5\pi}{4}$ se cumple $\sec\frac{5\pi}{4} = \csc\frac{5\pi}{4} = -\sqrt{2}$

Para el arco 4 se cumple sec4<csc4

Para el arco 6 se cumple tan6>cot6

I es verdadero y II es falso.

Problema 23

Describa los valores de $K=\text{sen}\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right)$, para todo θ; que está comprendido de $\frac{\pi}{3}$ a $\frac{5\pi}{6}$.

Resolución

Del enunciado $\frac{\pi}{3}<\theta<\frac{5\pi}{6}$

Formando $\theta-\frac{\pi}{6}$, tenemos

$$\frac{\pi}{6}<\theta-\frac{\pi}{6}<\frac{2\pi}{3}$$

Luego de representar y analizar en la C.T., (ver gráfico) tenemos

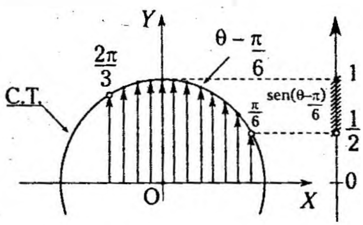


Figura 4.60

$$\underbrace{\frac{1}{2}<\text{sen}\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right)\leq 1}_{K}$$

$$\therefore\ K=\left\langle\frac{1}{2};1\right]$$

Problema 24

Determine los valores de la siguiente expresión

$P=3+\cos^2\alpha$, tal que $\alpha\in\left\langle\frac{\pi}{3};4\right\rangle$

Resolución

Representando $\alpha\in\left\langle\frac{\pi}{3};4\right\rangle$ en la C.T., se observa que

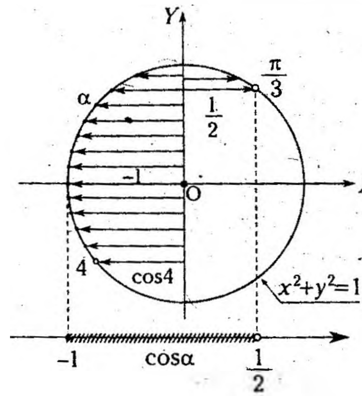


Figura 4.61

$$-1\leq\cos\alpha<\frac{1}{2}$$

Elevando al cuadrado

$$0\leq\cos^2\alpha\leq 1$$

Sumando 3 $\quad 3\leq\underbrace{3+\cos^2\alpha}_{P}\leq 4$

$$\therefore\ P=[3;4]$$

Problema 25

Calcule la variación de

$$E=\left|1-2\cos\left(\frac{\pi x}{2}+\frac{\pi}{6}\right)\right|\ ;\ \forall\,|x|<1$$

Resolución

De la condición $|x|<1$, tenemos $-1<x<1$

Multiplicando por $\left(\frac{\pi}{2}\right)$: $\quad -\frac{\pi}{2}<\frac{\pi x}{2}<\frac{\pi}{2}$

Sumando $\left(\frac{\pi}{6}\right)$: $\quad -\frac{\pi}{3}<\frac{\pi x}{2}+\frac{\pi}{6}<\frac{2\pi}{3}\quad .....(\Delta)$

Haciendo el cambio $\theta=\frac{\pi x}{2}+\frac{\pi}{6}$

y reemplazando en E y en la desigualdad Δ, tenemos

$$E=|1-2\cos\theta|\ ;\ -\frac{\pi}{3}<\theta<\frac{2\pi}{3}$$

Representando θ en la C.T., se obtiene

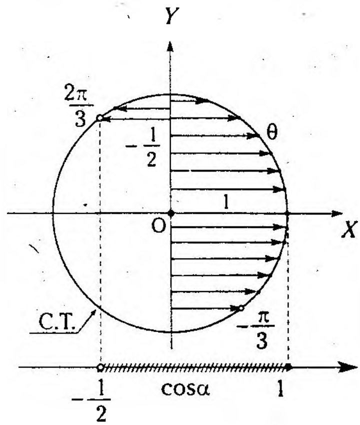


Figura 4.62

$$-\frac{1}{2} < \cos\theta \le 1 \Rightarrow -1 \le 1 - 2\cos\theta < 2$$

$$\Rightarrow 0 \le \underbrace{|1-2\cos\theta|}_{E} < 2$$

$$\therefore E = [0;2\rangle$$

Problema 26

Si $\theta \in \left[\frac{\pi}{4};\frac{7\pi}{6}\right\rangle$, para qué valores de m se cumple

que $\text{sen}^2\theta - 2\cos\theta = m + \frac{1}{2}$

Resolución

Por identidades se sabe $\text{sen}^2\theta = 1 - \cos^2\theta$

Reemplazando en la ecuación

$$1 - \cos^2\theta - 2\cos\theta = m + \frac{1}{2}$$

Completando cuadrados

$$2 - (\cos\theta + 1)^2 = m + \frac{1}{2}$$

$$m = \frac{3}{2} - (\cos\theta + 1)^2 \quad \ldots(\Delta)$$

Representando θ en la C.T.

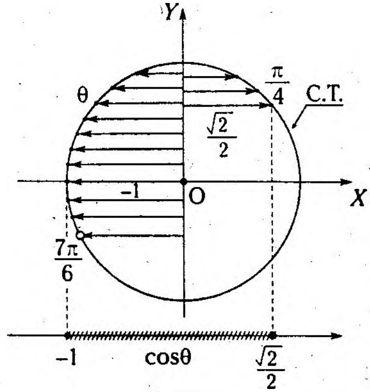


Figura 4.63

Entonces, de la figura obtenemos

$$-1 \le \cos\theta \le \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Luego dando forma a (Δ) para encontrar m, tenemos que

Sumando 1

$$0 \le 1 + \cos\theta \le 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Elevando al cuadrado

$$0 \le (1+\cos\theta)^2 \le \frac{3}{2} + \sqrt{2}$$

Multiplicando por −1

$$\frac{-3}{2} - \sqrt{2} \le (1+\cos\theta)^2 \le 0$$

Sumando $\frac{3}{2}$

$$-\sqrt{2} \le \underbrace{\frac{3}{2} - (1+\cos\theta)^2}_{m} \le \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow -\sqrt{2} \le m \le \frac{3}{2}$$

Expresando m como intervalo se obtiene

$$\left[-\sqrt{2};\frac{3}{2}\right]$$

Problema 27

Calcule los valores de a^2-1 si se verifica la siguiente condición:

$$\operatorname{sen}\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{a}{\sqrt{3}}\ ;\ 2\pi\leq x\leq\frac{5\pi}{2}$$

Resolución

Formamos los valores de $x+\frac{\pi}{6}$, luego representamos en la C.T. los arcos respectivos.

Del dato

$$2\pi\leq x\leq\frac{5\pi}{2}\Rightarrow\frac{13\pi}{6}\leq x+\frac{\pi}{6}\leq\frac{8\pi}{3}$$

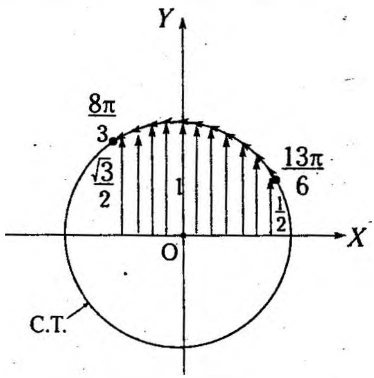


Figura 4.64

Según el gráfico

$$\frac{1}{2}\leq\operatorname{sen}\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\leq 1$$

Sustituyendo, según el enunciado

$$\frac{1}{2}\leq\frac{a}{\sqrt{3}}\leq 1\Rightarrow\frac{\sqrt{3}}{2}\leq a\leq\sqrt{3}$$

Elevando al cuadrado

$$\frac{3}{4}\leq a^2\leq 3$$

$$-\frac{1}{4}\leq a^2-1\leq 2$$

$$\therefore\ (a^2-1)=\left[-\frac{1}{4};2\right]$$

Problema 28

A partir de las siguientes condiciones

$\operatorname{sen}\alpha>\cos 1°$ ... (1)

$\cos\alpha<\operatorname{sen}1°$ ... (2)

halle α en el intervalo $\langle 0;360°\rangle$

Resolución

Lo haremos de la siguiente manera: de cada una de las condiciones (1) y (2) obtendremos un intervalo para α, pero como dichos valores deben cumplirse simultáneamente en las dos condiciones, entonces nuestra respuesta será la intersección de dichos intervalos.

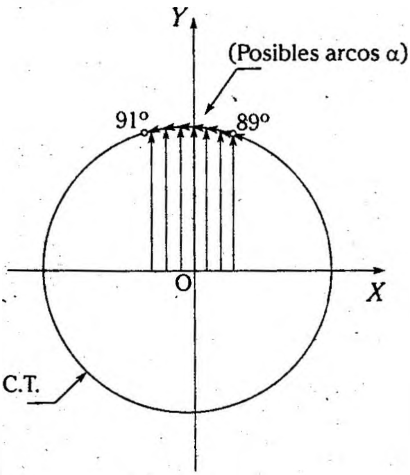
A partir de

$\operatorname{sen}\alpha>\cos 1°$ ... (1)

uniformizamos las R.T. (por R.T. de ángulos complementarios) obtenemos

$\operatorname{sen}\alpha>\operatorname{sen}89°$ ... (2)

Representamos la condición (2) en la C.T. (se sugiere observar la siguiente figura).



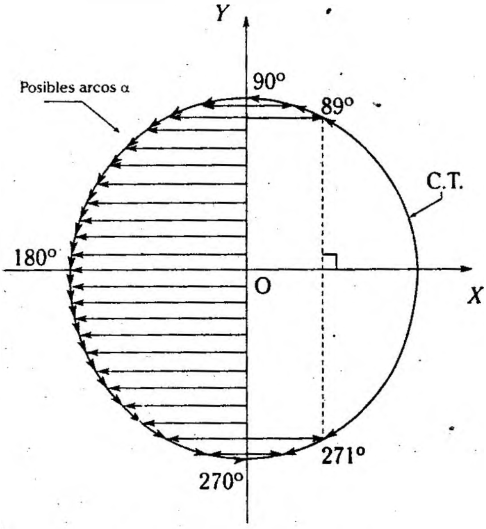
(a)

Del gráfico se observa $89°<\alpha<91°$ ... (3)

De la condición $\cos\alpha < \text{sen}1°$
uniformizamos las R.T. $\cos\alpha < \cos 89°$
(por R.T. de ángulos complementarios)
obtenemos

$$\cos\alpha < \cos 89° \quad ...(4)$$

representando la condición (4) en la C.T. se obtiene (se sugiere observar la siguiente figura).



(b)

Figura 4.65

Del gráfico observamos que los valores de α verifican la desigualdad

$$89° < \alpha < 271° \quad ...(5)$$

Al analizar las condiciones (1) y (2) se ha obtenido las condiciones siguientes:

$$89° < \alpha < 91° \Rightarrow \alpha \in \langle 89°;91° \rangle \quad ...(I)$$

$$89° < \alpha < 271° \Rightarrow \alpha \in \langle 89°;271° \rangle \quad ...(II)$$

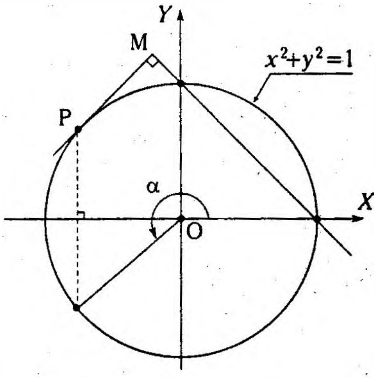
por lo que los valores de α se obtendrán de la intersección de las condiciones (I) y (II)

$$(I) \cap (II)$$

$$\therefore \alpha = 89°;91°$$

Problema 29

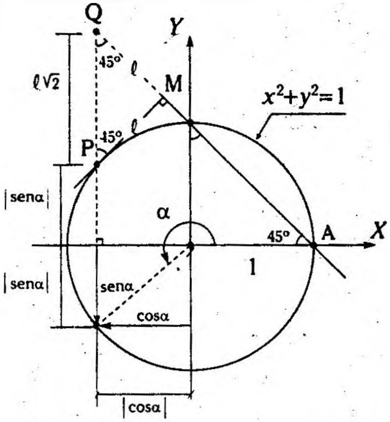
Del gráfico adjunto, halle PM en términos de α (P es punto de tangencia).



(a)

Resolución

De la figura, se ha prolongado $\overline{PR}$ hasta cortar a la prolongación de $\overline{AM}$ en Q.



(b)

Figura 4.66

Sea $PM = \ell$

De la figura, $RQ = RA$

$$\ell\sqrt{2} + |\text{sen}\alpha| = 1 + |\cos\alpha|$$

$$\ell\sqrt{2} - \text{sen}\alpha = 1 - \cos\alpha$$

$$\ell = \frac{1 + \text{sen}\alpha - \cos\alpha}{\sqrt{2}}$$

$$\therefore PM = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 + \text{sen}\alpha - \cos\alpha)$$

Problema 30

Calcule θ si se cumple

$$\tan\theta = -\cot\left(\frac{\pi}{19}\right)$$

además

$$-5\pi < \theta < -4\pi$$

Resolución

Cambiando a $\frac{\pi}{19}$ por su complemento, obtenemos

$$\tan\theta = -\tan\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{19}\right)$$

$$\tan\theta = -\tan\left(\frac{17\pi}{38}\right)$$

$$\tan\theta = \tan\left(-\frac{17\pi}{38}\right)$$

Graficamos en la C.T. el arco $-\frac{17\pi}{38}$

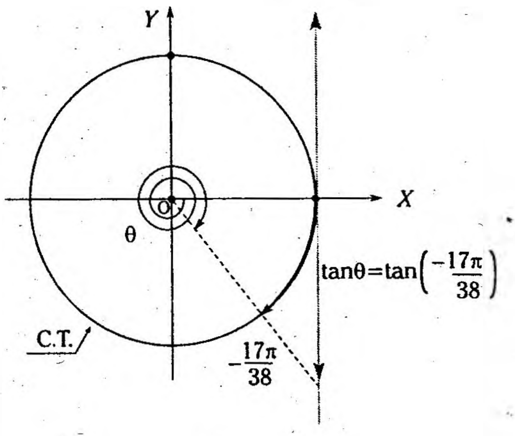


Figura 4.67

Del gráfico tenemos que

$$\theta = -4\pi - \frac{17\pi}{38}$$

$$\therefore\ \theta = -\frac{169\pi}{38}$$

Problema 31

Si se cumple

$$\tan(\theta+\beta) \geq \text{sen}^2 x_1 + \text{sen}^2 x_2 \qquad \text{... (I)}$$

$$1+\cos\theta = \sec^2 x_1 + |\csc x_2| \qquad \text{... (II)}$$

determine el conjunto de valores de la siguiente expresión

$$P = |2\text{sen}\beta - \cos\theta| + |\text{sen}\beta + \cos\theta|$$

Considere β en el IIIC.

Resolución

De I: $1+\cos\theta = \sec^2 x_1 + |\csc x_2|$

- $\forall\ x_1 \in \mathbb{R} - (2K+1)\frac{\pi}{2}$; $K \in \mathbb{Z}$
  $\sec^2 x_1 \geq 1$
- $\forall\ x_2 \in \mathbb{R} - n\pi$; $n \in \mathbb{Z}$
  $|\csc x_2| \geq 1$

Luego, $1+\cos\theta \geq 2$; $\cos\theta \geq 1$

Sabemos $\forall\ \theta \in \mathbb{R}\ -1 \leq \cos\theta \leq 1$

podemos afirmar que $\cos\theta = 1$; $\theta = 2K\pi$

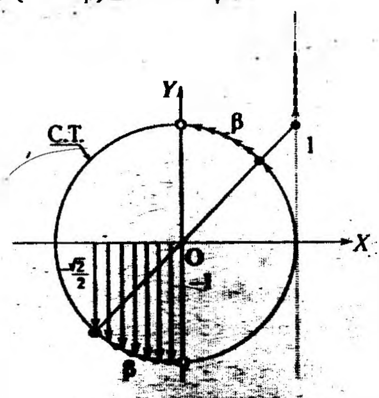
también, siendo

- $\sec^2 x_1 = 1 \Rightarrow \sec x_1 = 1$ o $\sec x_1 = -1$
- $|\csc x_2| = 1 \Rightarrow \csc x_2 = 1$ o $\csc x_2 = -1$

De II: $\tan(\theta+\beta) \geq \underbrace{\text{sen}^2 x_1}_{0} + \underbrace{\text{sen}^2 x_2}_{1}$

$\Rightarrow \tan(\theta+\beta) \geq 1$

$\Rightarrow \tan(2K\pi+\beta) \geq 1 \Rightarrow \tan\beta \geq 1$



En la C.T. podemos observar que

$$-1<\text{sen}\beta\leq-\frac{\sqrt{2}}{2}\qquad ...(\alpha)$$

Analizando P

$$P=\underbrace{|2\text{sen}\beta-1|}_{(-)}+\underbrace{|\text{sen}\beta+1|}_{(+)}$$

$$P=1-2\text{sen}\beta+1+\text{sen}\beta$$

$$P=2-\text{sen}\beta$$

De (α) por (−1)

$$1>-\text{sen}\beta\geq\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Sumando 2

$$\Rightarrow\ 3>\underbrace{2-\text{sen}\beta}_{P}\geq2+\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow\ 2+\frac{\sqrt{2}}{2}\leq P<3$$

$$\therefore\ P=\left[2+\frac{\sqrt{2}}{2};3\right\rangle$$

Problema 32

Si se cumple $\frac{1}{2}\leq\cos x\leq\frac{\sqrt{3}}{2}$.

además $4+\tan^2\theta=4(\cos^2x+\text{sen}x\tan\theta)$

determine los valores de $\tan\theta$.

Resolución

$$4+\tan^2\theta=4\cos^2x+4\text{sen}x\tan\theta$$

$$4(1-\cos^2x)+\tan^2\theta-4\text{sen}x\tan\theta=0$$

•En la condición

$$4\text{sen}^2x+\tan^2\theta-4\text{sen}x\tan\theta=0$$

$$(2\text{sen}x-\tan\theta)^2=0$$

de donde se obtiene $\tan\theta=2\text{sen}x$

De la desigualdad anterior obtenemos los valores del sen$x$, recuerde que

$$\text{sen}^2x\ =\ 1-\cos^2x$$

luego $\frac{1}{2}\leq\cos x\leq\frac{\sqrt{3}}{2}$

Al cuadrado $\frac{1}{4}\leq\cos^2x\leq\frac{3}{4}$

es decir $\frac{1}{4}\leq1-\text{sen}^2x\leq\frac{3}{4}$

$$\Rightarrow\ -\frac{3}{4}\leq-\text{sen}^2x\leq-\frac{1}{4}$$

Multiplicando por (−1) $\frac{1}{4}\leq\text{sen}^2x\leq\frac{3}{4}$

Evaluamos la raíz cuadrada

$$\frac{1}{2}\leq\text{sen}x\leq\frac{\sqrt{3}}{2}\ \vee\ -\frac{\sqrt{3}}{2}\leq\text{sen}x\leq-\frac{1}{2}$$

Multiplicando por 2

$$1\leq2\text{sen}x\leq\sqrt{3}\ \vee\ -\sqrt{3}\leq2\text{sen}x\leq-1$$

Reemplazando 2sen$x$ por $\tan\theta$

$$1\leq\tan\theta\leq\sqrt{3}\ \vee\ -\sqrt{3}\leq\tan\theta\leq-1$$

$$\therefore\ \tan\theta=\left[-\sqrt{3};-1\right]\cup\left[1;\sqrt{3}\right]$$

Otra forma

De la desigualdad $\frac{1}{2}\leq\cos x\leq\frac{\sqrt{3}}{2}$

obtenemos los valores de sen$x$; de esta manera

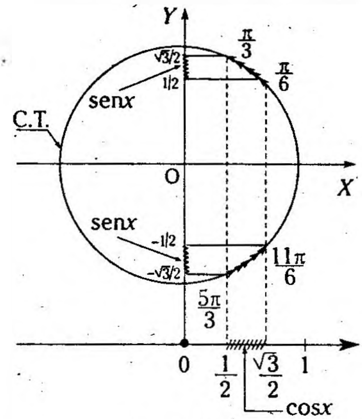


Figura 4.69

$$\Rightarrow\ \frac{1}{2}\leq\text{sen}x\leq\frac{\sqrt{3}}{2}\ \vee\ -\frac{\sqrt{3}}{2}\leq\text{sen}x\leq-\frac{1}{2}$$

Multiplicando por 2

$$1\leq2\text{sen}x\leq\sqrt{3}\ \vee\ -\sqrt{3}\leq2\text{sen}x\leq-1$$

$$1\leq\tan\theta\leq\sqrt{3}\ \vee\ -\sqrt{3}\leq\tan\theta\leq-1$$

$$\therefore\ \tan\theta=\left[-\sqrt{3};-1\right]\cup\left[1;\sqrt{3}\right]$$

Problema 33

Encuentre la suma de valores de w en el intervalo $\langle 0\,;\,4\pi\rangle$, tal que satisfaga la condición

$$1-\sec 3w=\operatorname{sen}^2\alpha$$

Resolución

Sabemos que $\forall\,\alpha\in\mathbb{R}:\ -1\leq \operatorname{sen}\alpha\leq 1$

también $0\leq \operatorname{sen}^2\alpha\leq 1$

Cambiando según la condición $0\leq 1-\sec 3w\leq 1$

Despejando sec3w: $0\leq \sec 3w\leq 1$

Pero debemos tener en cuenta que los valores de la secante se representan en la figura 4.70

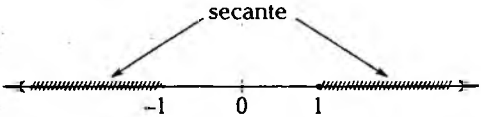


Figura 4.70

Entonces

$\sec 3w=1$

$3w=2\pi\,;4\pi\,;6\pi\,;8\pi\,;10\pi\,;12\pi\,;...$

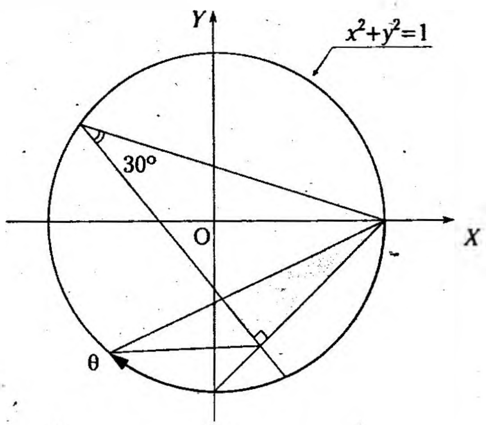
$$w=\underbrace{\frac{2\pi}{3}\,;\,\frac{4\pi}{3}\,;\,2\pi\,;\,\frac{8\pi}{3}\,;\,\frac{10\pi}{3}}_{\text{pertenece a }\langle 0\,;\,4\pi\rangle}\,;\,4\pi\,;\,...$$

Luego

$$\sum w=\frac{2\pi}{3}+\frac{4\pi}{3}+2\pi+\frac{8\pi}{3}+\frac{10\pi}{3}=10\pi$$

Problema 34

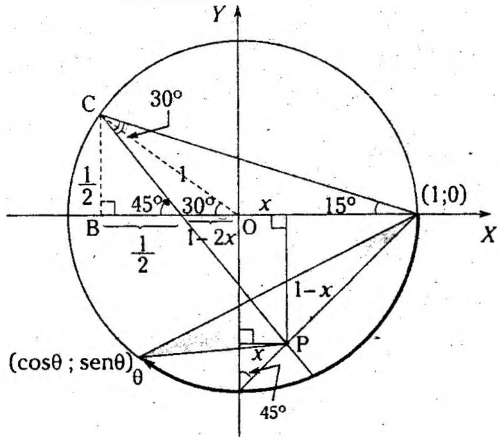
De la figura mostrada calcule el área de la región sombreada en función de θ.



(a)

Resolución

Cálculo de x en el triángulo rectángulo OBC.



(b)

Figura 4.71

$$BO=\frac{1}{2}\sqrt{3}=\frac{1}{2}+1-2x$$

Además el punto P es

$$(x\,;\,x-1)=\left(\frac{3-\sqrt{3}}{4}\,;\,-\frac{\sqrt{3}+1}{4}\right)$$

$$\Rightarrow\ x=\frac{3-\sqrt{3}}{4}$$

Cálculo del área S

$$S=\frac{1}{2}(m-n)\qquad ...(\alpha)$$

$$\begin{array}{c|cc|c}
 & 1 & 0 & \\
0 & \cos\theta & \operatorname{sen}\theta & \operatorname{sen}\theta \\
\left(\frac{3-\sqrt{3}}{4}\right)\operatorname{sen}\theta & \frac{3-\sqrt{3}}{4} & \frac{-1-\sqrt{3}}{4} & -\left(\frac{1+\sqrt{3}}{4}\right)\cos\theta \\
-\left(\frac{1+\sqrt{3}}{4}\right) & 1 & 0 & 0 \\
\hline
n & & & m
\end{array}$$

Reemplazando en (α)

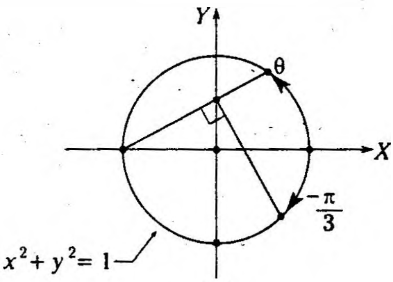
$$S=\frac{1}{2}\left[\left(\operatorname{sen}\theta-\left(\frac{\sqrt{3}+1}{4}\right)\cos\theta\right)-\left(\left(\frac{3-\sqrt{3}}{4}\right)\operatorname{sen}\theta-\left(\frac{\sqrt{3}+1}{4}\right)\right)\right]$$

$$S=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\sqrt{3}+1}{4}\right)\operatorname{sen}\theta+\left(\frac{\sqrt{3}+1}{4}\right)(1-\cos\theta)\right]$$

$$S=\frac{\sqrt{3}+1}{8}(\operatorname{sen}\theta-\cos\theta+1)\,u^2$$

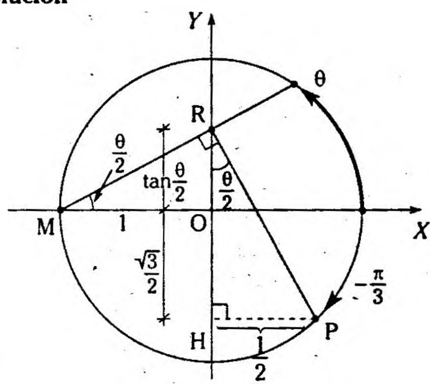
Problema 35

Del gráfico mostrado, determine el valor de $\tan\frac{\theta}{2}$



(a)

Resolución



(b)

Figura 4.72

En el ⊾MOR: $RO=\tan\frac{\theta}{2}$

Luego, en el triángulo rectángulo PHR

$$\tan\frac{\theta}{2}=\frac{\frac{1}{2}}{\tan\frac{\theta}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{1}{2\tan\frac{\theta}{2}+\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow\ 2\tan^2\frac{\theta}{2}+\sqrt{3}\tan\frac{\theta}{2}-1=0$$

Resolviendo la ecuación de 2do. grado

$$\tan\frac{\theta}{2}=\frac{-\sqrt{3}\pm\sqrt{\sqrt{3}^2-4(2)(-1)}}{2(2)}$$

$$\tan\frac{\theta}{2}=\frac{\sqrt{11}-\sqrt{3}}{4}$$

El valor $\tan\frac{\theta}{2}=\frac{\sqrt{11}+\sqrt{3}}{4}$ se descarta porque

$0<\frac{\theta}{2}<\frac{\pi}{2}$, entonces $\tan\frac{\theta}{2}>0$

Problema 36

Si se cumple $-\sqrt{2}\leq\sec(2\pi\cos A)\leq-1$
calcule los valores de M=secA

Resolución

Nótese que $\sec\theta=\frac{1}{\cos\theta}$

$$-\sqrt{2}\leq\frac{1}{\cos(2\pi\cos A)}\leq-1$$

En la condición

$$\Rightarrow\ -\frac{\sqrt{2}}{2}\geq\cos(2\pi\cos A)\geq-1$$

$$-1\leq\cos(2\pi\cos A)\leq-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Para averiguar los valores que asume el arco $(2\pi\cos A)$, analicemos en la C.T.

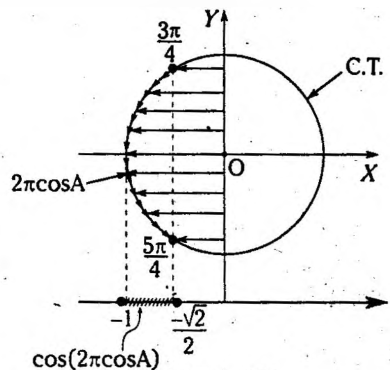


Figura 4.73

Luego, los valores de arco son de $3\pi/4$ a $5\pi/4$, es decir $\frac{3\pi}{4}\leq 2\pi\cos A\leq\frac{5\pi}{4}$

Formando la expresión M

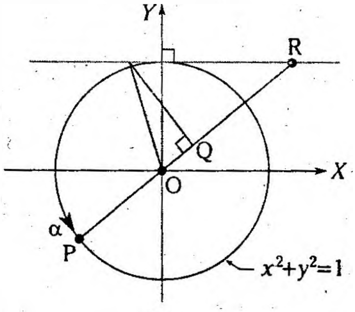
$$\times\frac{1}{2\pi}\ \Rightarrow\ \frac{3}{8}\leq\cos A\leq\frac{5}{8}\ \Rightarrow\ \frac{8}{3}\geq\frac{1}{\cos A}\geq\frac{8}{5}$$

$$\Rightarrow\ \frac{8}{5}\leq\sec A\leq\frac{8}{3}\ \Rightarrow\ \frac{8}{5}\leq M\leq\frac{8}{3}$$

Luego, $M=\left[\frac{8}{5};\frac{8}{3}\right]$

Problema 37

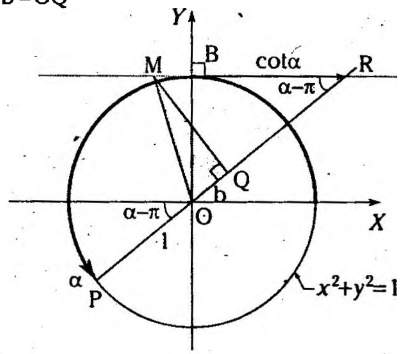
Calcule el área de la región sombreada en términos de α si PQ=QR.



(a)

Resolución

Sea b=OQ



(b)

Figura 4.74

Calculemos los catetos OQ y MQ del triángulo sombreado.

En $\triangle$OBR: $OR=|\csc\alpha|$

Luego, $2(1+b)=1+|\csc\alpha|$

Como $\alpha\in$ IIIC

$$2(1+b)=1-\csc\alpha \Rightarrow b=-\frac{1+\csc\alpha}{2}$$

En el $\triangle$MQR: $MQ=(1+b)\tan(\alpha-\pi)$

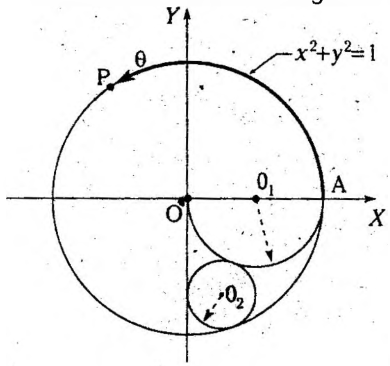
$$MQ=\left(\frac{1-\csc\alpha}{2}\right)\tan\alpha$$

Luego, $S=-\frac{1}{2}\left(\frac{1+\csc\alpha}{2}\right)\left(\frac{1-\csc\alpha}{2}\right)\tan\alpha$

$$\therefore\ S=\frac{\tan\alpha}{8}$$

Problema 38

De la figura, si la medida del arco AP es numéricamente igual al perímetro de la región sombreada más el área de dicha región.



(a)

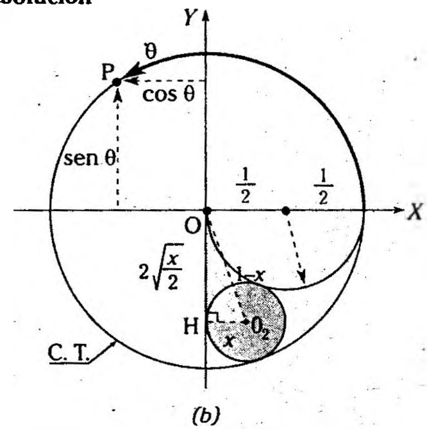
Indique la verdad o falsedad de las siguientes proposiciones:

i) $\operatorname{sen}\theta<\cos\theta$

ii) $|\operatorname{sen}\theta|<|\theta|$

iii) $\operatorname{sen}|\theta|>|\cos|\theta||$

Resolución



(b)

Figura 4.75

Del $\triangle OHO_2$: $x^2+\left(2\sqrt{\frac{x}{2}}\right)^2=(1-x)^2$

$\Rightarrow x=1/4$

Del dato: $\theta = 2\pi x + \pi x^2$

$$\theta = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{16}$$

$$\therefore\ \theta = 17\pi/16$$

De la C.T. se tiene

i) $\operatorname{sen}\theta > \cos\theta$

ii) $|\operatorname{sen}\theta| < |\theta|$, dado que $\theta > 1$.

iii) $\operatorname{sen}|\theta| > |\cos|\theta||$; $|\theta| = \theta$, puesto que $\theta > 0$.

Finalmente

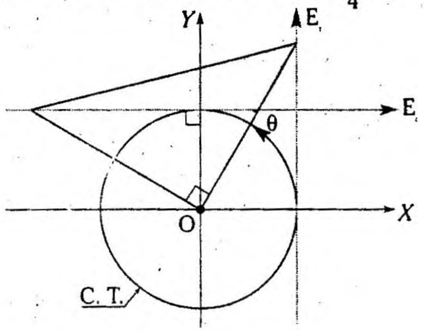
i) F ii) V iii) V

Problema 39

Del gráfico mostrado determine

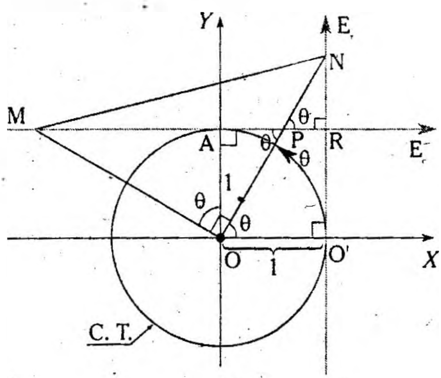
$$\sec^2\theta - (\tan\theta + \cot\theta)$$

si el área de la región sombreada es $\frac{5}{4}u^2$.



(a)

Resolución



(b)

Figura 4.76

De la figura mostrada $S_{\Delta MNP} = \frac{MP.NR}{2}$ ... (I)

Dato: $\triangle OAM$: $AM = \tan\theta$

$\triangle OAP$: $AP = \cot\theta$

Pero

$$MP = AM + AP$$

$$MP = \tan\theta + \cot\theta$$

$\triangle OO'N$: $O'N = \tan\theta$ siendo $O'R = 1$

$\Rightarrow NR = \tan\theta - 1$

Reemplazando en (I)

$$S_{\Delta MNP} = \frac{(\tan\theta + \cot\theta)(\tan\theta - 1)}{2}$$

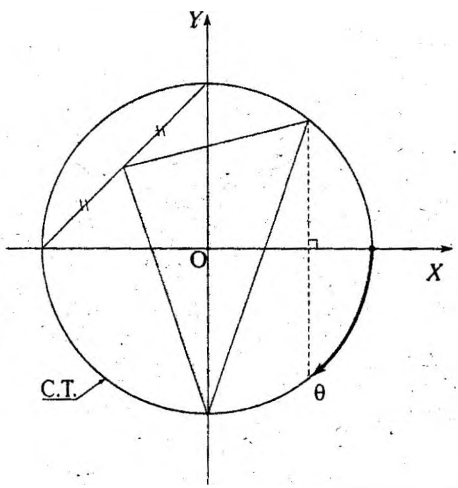
$$\frac{5}{4} = \frac{\tan^2\theta + 1 - (\tan\theta + \cot\theta)}{2}$$

$$\frac{5}{2} = \sec^2\theta - (\tan\theta + \cot\theta)$$

$$\therefore\ \sec^2\theta - (\tan\theta + \cot\theta) = \frac{5}{2}$$

Problema 40

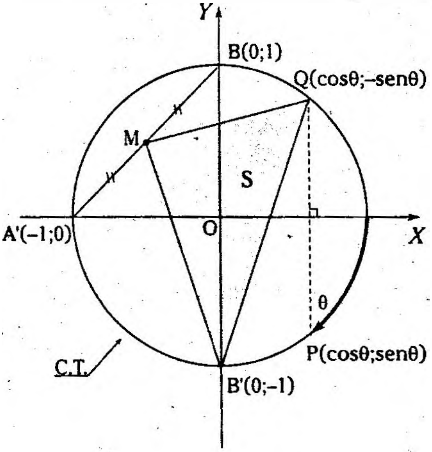
Calcule el área de la región sombreada en términos de θ.



(a)

Resolución

De la figura adjunta, determinaremos las coordenadas de los vértices del triángulo B'QM.



(b)

Figura 4.77

- P y Q son simétricos respecto al eje X, entonces $Q(\cos\theta\,;-\operatorname{sen}\theta)$
- M es punto medio de A'B, entonces $M\left(-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$

Luego calculamos el área de la región sombreada, así

	0	-1	
$-\cos\theta$	$\cos\theta$	$-\operatorname{sen}\theta$	0
$\frac{1}{2}\operatorname{sen}\theta$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\cos\theta$
0	0	-1	$\frac{1}{2}$
$-\cos\theta+\frac{1}{2}\operatorname{sen}\theta$			$\frac{1}{2}\cos\theta+\frac{1}{2}$

$$S=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{2}\cos\theta+\frac{1}{2}\right)-\left(-\cos\theta+\frac{1}{2}\operatorname{sen}\theta\right)\right]$$

$$S=\frac{1}{2}\left[\frac{3}{2}\cos\theta-\frac{1}{2}\operatorname{sen}\theta+\frac{1}{2}\right]$$

$$\therefore\ S=\frac{1}{4}[3\cos\theta-\operatorname{sen}\theta+1]\,u^2$$

Problema 41

Determine la variación de la expresión

$$f=\frac{2}{3}+\cot^2\left(\frac{\pi}{3}\cos\alpha\right)$$

Resolución

Considerando

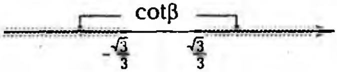
$$-1\le\cos\alpha\le 1\ \Rightarrow\ -\frac{\pi}{3}\le\frac{\pi}{3}\cos\alpha\le\frac{\pi}{3}$$

hacemos $\beta=\frac{\pi}{3}\cos\alpha$

Reemplazando en f tenemos

$$\Rightarrow\ f=\frac{2}{3}+\cot^2\beta$$

para hallar la variación de $\cot\beta$, debemos tener presente que $\beta\in\left[-\frac{\pi}{3}\,;\,\frac{\pi}{3}\right]-\{0\}$



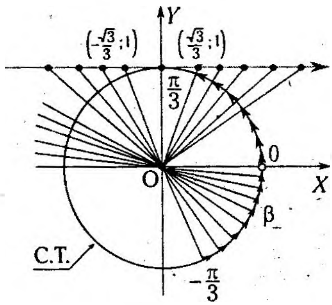


Figura 4.78

De la figura, tenemos

$$\cot\beta\le-\frac{\sqrt{3}}{3}\quad \text{ó}\quad \cot\beta\ge\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\Rightarrow\ \cot^2\beta\ge\frac{1}{3}\quad \text{ó}\quad \cot^2\beta\ge\frac{1}{3}$$

$$\therefore\ \cot^2\beta\ge\frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow\ \underbrace{\cot^2\beta+\frac{2}{3}}_{f}\ge 1$$

$$\therefore\ f=[1;+\infty\rangle$$

Problema 42

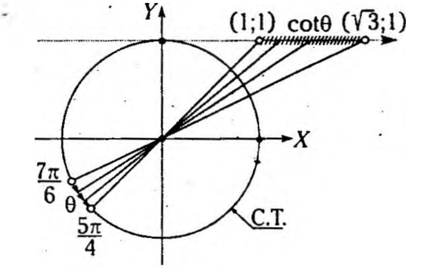
Determine entre qué límites debe encontrarse p para que no se cumpla la relación.

$$p\sec\frac{\pi}{4}=\sec\left(\frac{\pi}{4}\cot^2\theta\right)$$

Dato: $\theta\in\left\langle\frac{7\pi}{6};\frac{5\pi}{4}\right\rangle$

Resolución

Calculemos la variación de $\cot\theta$, representando $\theta\in\left\langle\frac{7\pi}{6};\frac{5\pi}{4}\right\rangle$ en la C.T. en la figura siguiente.



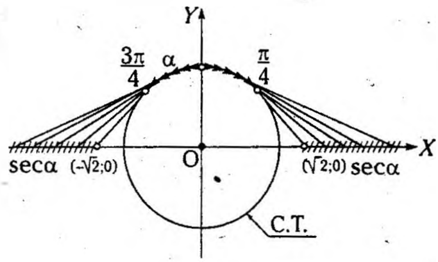
(a)

De la figura anterior obtenemos $1<\cot\theta<\sqrt{3}$

Elevando al cuadrado $1<\cot^2\theta<3$

multiplicando por $\left(\frac{\pi}{4}\right)$: $\frac{\pi}{4}<\frac{\pi}{4}\cot^2\theta<\frac{3\pi}{4}$

Hacemos $\alpha=\frac{\pi}{4}\cot^2\theta\Rightarrow\frac{\pi}{4}<\alpha<\frac{3\pi}{4}$



(b)

Figura 4.79

Calculemos la variación de $\sec\alpha$ a partir de la figura adjunta $\left(\alpha\neq\frac{\pi}{2}\right)$, por definición de $\sec\alpha$, entonces se cumple

$$\sec\alpha\in\left\langle-\infty;-\sqrt{2}\right\rangle\cup\left\langle\sqrt{2};+\infty\right\rangle$$

Por condición del problema, **no se cumple si**

$$-\sqrt{2}\leq\sec\alpha\leq\sqrt{2}$$

sustituyendo α por $\frac{\pi}{4}\cot^2\theta$, tenemos

$$-\sqrt{2}\leq\underline{\sec\left(\frac{\pi}{4}\cot^2\theta\right)}\leq\sqrt{2}$$

$$-\sqrt{2}\leq p\sec\frac{\pi}{4}\leq\sqrt{2}$$

$$-\sqrt{2}\leq p\sqrt{2}\leq\sqrt{2}$$

$$\therefore\ -1\leq p\leq 1$$

Problema 43

Halle la variación de cscw, si se encuentra en $\langle 0;\pi\rangle$, sabiendo que $\frac{3\csc^2 w-4}{\text{sen}w-1}\geq 0$

Resolución

Como $0<w<\pi\Rightarrow 0<\text{sen}w\leq 1$

Pero $\text{sen}w\neq 1\Rightarrow w\neq\frac{\pi}{2}$

(por la desigualdad del problema)

$\Rightarrow 0<\text{sen}w<1$ o $\csc w>1$

$\Rightarrow -1<\text{sen}w-1<0$

Como $(\text{sen}w-1)$ toma valores negativos, entonces la desigualdad $\frac{3\csc^2 w-4}{\text{sen}w-1}\geq 0$

se cumplirá si $3\csc^2 w-4\leq 0\Rightarrow\csc^2 w\leq\frac{4}{3}$

$\Rightarrow\frac{-2\sqrt{3}}{3}\leq\csc w\leq\frac{2\sqrt{3}}{3}$

pero $\csc w>1$

$\Rightarrow 1<\csc w\leq\frac{2\sqrt{3}}{3}$

$\therefore\ \csc w=\left\langle 1;\frac{2\sqrt{3}}{3}\right]$

En la C.T. obtendremos los valores de w que verifiquen

$$0 < w < \pi \ ; \ w \neq \frac{\pi}{2} \ ; \ 1 < \csc w \leq \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

De la figura se concluye

$$w \in \left[\frac{\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}\right] - \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$$

Problema 44

Determine el máximo y mínimo valor de

$$E = 3\text{sen}\theta - 2\cos^2\alpha$$

sabiendo que las variables θ y α son independientes entre sí.

Resolución

$\forall\, \theta, \alpha \in \mathbf{R}$, se cumple

- $-1 \leq \text{sen}\theta \leq 1 \Rightarrow -3 \leq 3\text{sen}\theta \leq 3$ ... (1)
- $0 \leq \cos^2\alpha \leq 1 \Rightarrow -2 \leq -2\cos^2\alpha \leq 0$ ... (2)

Luego, para conseguir los valores máximo y mínimo de E reemplazamos convenientemente

$$E_{máx} = \underbrace{3\text{sen}\theta}_{1} - \underbrace{2\cos^2\alpha}_{0}$$

$\therefore \ E_{máx} = 3$

$$E_{mín} = \underbrace{3\text{sen}\theta}_{-1} - \underbrace{2\cos^2\alpha}_{1}$$

$\therefore \ E_{mín} = -5$

Nota

Como α y θ son variables independientes, entonces se pueden sumar las desigualdades (1) y (2) obteniendo

$$-5 \leq \underbrace{3\text{sen}\theta - 2\cos^2\alpha}_{E} \leq 3$$

$\therefore \ E = [-5; 3]$

Problema 45

Si $\beta \in \left\langle \frac{3\pi}{2}; \frac{7\pi}{4} \right\rangle$ simplifique

$$M = \frac{|\text{sen}\beta - \cos\beta|}{\cos\beta - \text{sen}\beta} - \frac{|\cos\beta + \text{sen}\beta|}{\cos\beta + \text{sen}\beta}$$

Resolución

Representando en la circunferencia trigonométrica a los valores de β y las funciones seno y coseno.

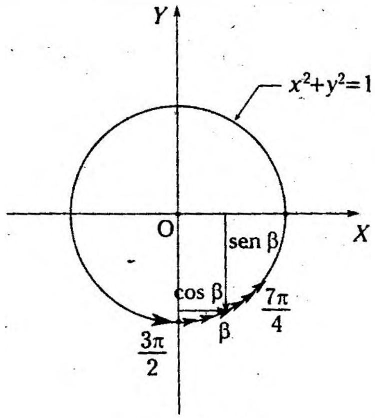


Figura 4.80

Del gráfico se tiene que $\cos\beta > 0$; $\text{sen}\beta < 0$

luego $\cos\beta > \text{sen}\beta \Rightarrow \text{sen}\beta - \cos\beta < 0$

Además

$$\underbrace{|\cos\beta|}_{\cos\beta} < \underbrace{|\text{sen}\beta|}_{-\ \text{sen}\beta}$$

$\Rightarrow \cos\beta + \text{sen}\beta < 0$

Puesto que ya sabemos los signos de $\text{sen}\beta - \cos\beta$ y $\cos\beta + \text{sen}\beta$, aplicamos la definición de valor absoluto en M

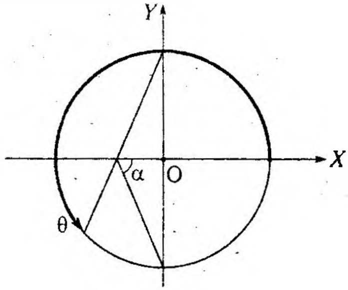
$$M = \frac{-(\text{sen}\beta - \cos\beta)}{\cos\beta - \text{sen}\beta} - \frac{-(\cos\beta + \text{sen}\beta)}{\cos\beta + \text{sen}\beta}$$

$$M = 1 - (-1)$$

$\therefore \ M = 2$

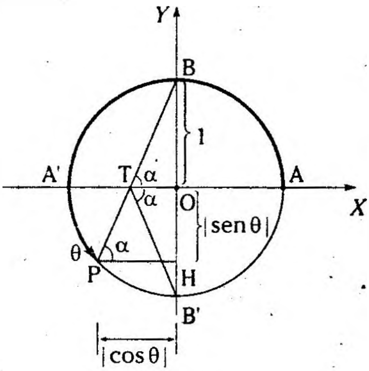
Problema 46

En la C.T. que se muestra, exprese $\tan\alpha$ en términos del arco θ.



(a)

Resolución



(b)

Figura 4.81

De la figura, por simetría los ángulos BTO y B'TO son de igual medida (α) como $\overline{PH}//\overline{TO}$, entonces los ángulos BTO y TPH son de igual medida (α).

Luego en el ⊾ BHP tenemos

$$\tan\alpha=\frac{1+|\text{sen}\theta|}{|\cos\theta|}\text{, pero } |\text{sen}\theta|=-\text{sen}\theta$$

y $|\cos\theta|=-\cos\theta$ ya que $\theta\in$ IIIC

$$\Rightarrow \tan\alpha=\frac{1-\text{sen}\theta}{-\cos\theta}$$

$$\therefore \tan\alpha=\frac{\text{sen}\theta-1}{\cos\theta}$$

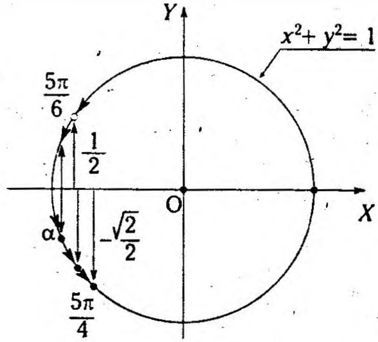
Problema 47

Halle la variación de la siguiente expresión.

$$f=\left|\text{sen}\alpha-\frac{2}{5}\right|-\text{sen}\frac{\pi}{4}\ ;\ \forall\,\alpha\in\left\langle\frac{5\pi}{6};\frac{5\pi}{4}\right]$$

Resolución

Analizando en la circunferencia trigonométrica

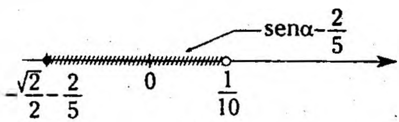


(a)

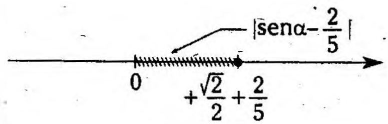
Entonces $-\frac{\sqrt{2}}{2}\leq\text{sen}\alpha<\frac{1}{2}$

Sumando (–2/5): $-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{2}{5}\leq\text{sen}\alpha-\frac{2}{5}<\frac{1}{10}$

En la recta numérica (ver figuras 4.82(b) y 4.82(c))



(b)



(c)

Figura 4.82

Es decir, $0\leq\left|\text{sen}\alpha-\frac{2}{5}\right|\leq\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{2}{5}$

Sumando $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$: $-\frac{\sqrt{2}}{2}\leq\underbrace{\left|\text{sen}\alpha-\frac{2}{5}\right|-\frac{\sqrt{2}}{2}}_{f}\leq\frac{2}{5}$

$$\therefore f=\left[-\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{2}{5}\right]$$

Problema 48

Halle la variación de la expresión siguiente

$$P=-\cos\theta-\operatorname{sen}\theta-\sqrt{1-2\operatorname{sen}\theta\cos\theta}$$

sabiendo que $\theta\in \left\langle \pi;\frac{5\pi}{4}\right\rangle$

Resolución

En primer lugar, simplifiquemos la expresión dada, para ello utilizamos la siguiente identidad fundamental $\operatorname{sen}^2\theta+\cos^2\theta=1$ la cual se demostrará más adelante.

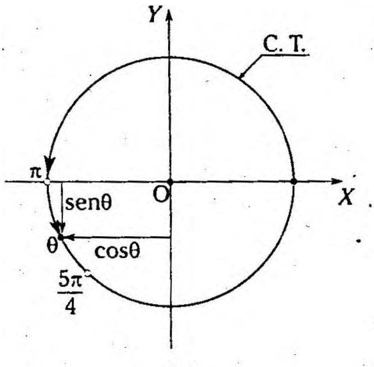
$$P=-\cos\theta-\operatorname{sen}\theta-\sqrt{\operatorname{sen}^2\theta+\cos^2\theta-2\operatorname{sen}\theta\cos\theta}$$

$$P=-\cos\theta-\operatorname{sen}\theta-\sqrt{(\operatorname{sen}\theta-\cos\theta)^2}$$

$$P=-\cos\theta-\operatorname{sen}\theta-|\operatorname{sen}\theta-\cos\theta|$$

Del dato $\pi<\theta<\frac{5\pi}{4}$

Representando estos arcos en la C.T. se obtiene



(a)

$\Rightarrow\ \operatorname{sen}\theta<0\ ;\ \cos\theta<0$

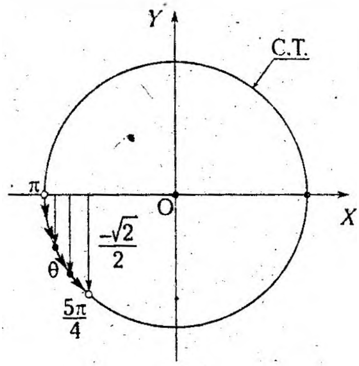
Para el intervalo dado

$$\operatorname{sen}\theta>\cos\theta\ \Rightarrow\ \operatorname{sen}\theta-\cos\theta>0$$

Luego

$$P=-\cos\theta-\operatorname{sen}\theta-(\operatorname{sen}\theta-\cos\theta)$$
$$P=-2\operatorname{sen}\theta$$

Hallando los valores del $\operatorname{sen}\theta$



(b)

Figura 4.83

$\Rightarrow\ -\frac{\sqrt{2}}{2}<\operatorname{sen}\theta<0$

Multiplicando por (–2)

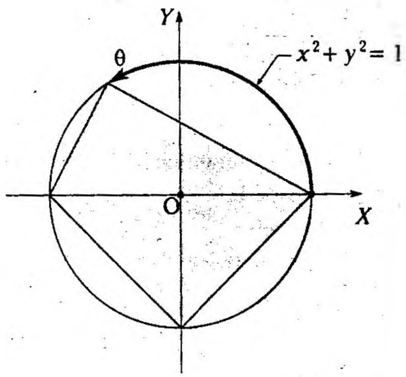
$$\sqrt{2}>\underbrace{-2\operatorname{sen}\theta}_{P}>0$$

$\therefore\ P=\left\langle 0;\sqrt{2}\right\rangle$

Problema 49

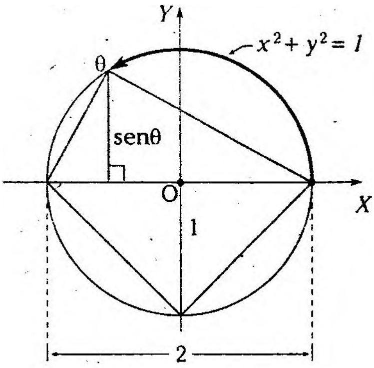
Halle la variación de θ en el recorrido $\left\langle\frac{\pi}{2};\pi\right\rangle$ si el área de la región sombreada varía entre

$$\left[1+\operatorname{sen}\frac{\pi}{7};\frac{\sqrt{3}}{2}+1\right]$$



(a)

Resolución



(b)

Designando S al área de la región solicitada y del gráfico anterior obtenemos

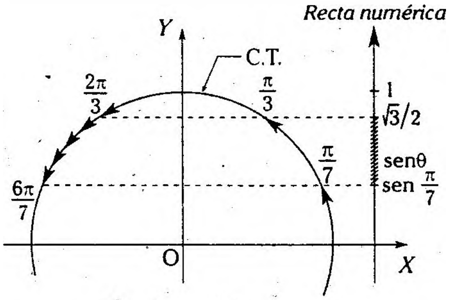
$$S=\frac{2\text{sen}\theta}{2}+\frac{2\times 1}{2} \Rightarrow S=1+\text{sen}\theta$$

Reemplazando en la desigualdad dada

$$1+\text{sen}\frac{\pi}{7}\leq \overbrace{1+\text{sen}\theta}^{S}\leq \frac{\sqrt{3}}{2}+1$$

$$\Rightarrow \text{sen}\frac{\pi}{7}\leq \text{sen}\theta\leq \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Expresamos en una recta numérica los valores del $\text{sen}\theta$, luego proyectamos estos puntos en la C.T., así



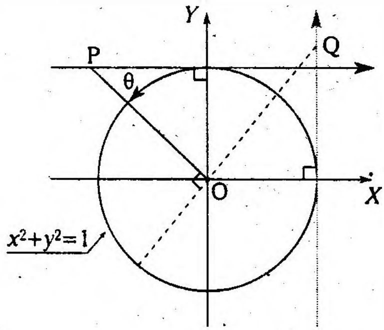
(c)
Figura 4.84

$$\Rightarrow \frac{2\pi}{3}\leq\theta\leq\frac{6\pi}{7}$$

$$\therefore\ \theta=\left[\frac{2\pi}{3};\frac{6\pi}{7}\right]$$

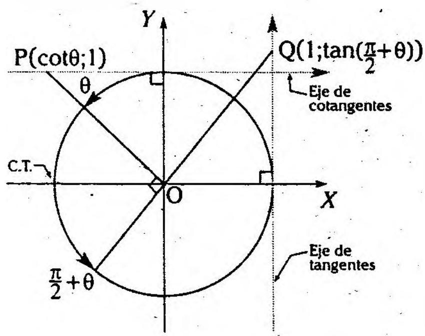
Problema 50

Del gráfico adjunto, halle la distancia entre P y Q.



(a)

Resolución



(b)
Figura 4.85

Aplicando la fórmula de distancia entre dos puntos (ver página **166**) tenemos

$$PQ=\sqrt{(\cot\theta-1)^2+\left(1-\tan\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)\right)^2}$$

pero $\tan\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=-\cot\theta$

$$\Rightarrow PQ=\sqrt{(\cot\theta-1)^2+(1+\cot\theta)^2}$$

Efectuando $PQ=\sqrt{2(1+\cot^2\theta)}$

$$PQ=\sqrt{2(\csc^2\theta)}=\sqrt{2}\,|\csc\theta|$$

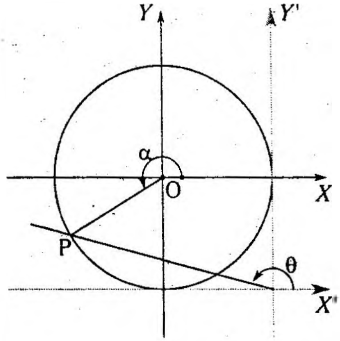
y como $\theta\in \text{IIC} \Rightarrow |\csc\theta|=\csc\theta$

$$\therefore\ PQ=\sqrt{2}\csc\theta$$

Problema 51

En la figura mostrada se tiene una circunferencia unitaria en el sistema XY, además θ es un ángulo en posición normal en el sistema $X'Y'$.

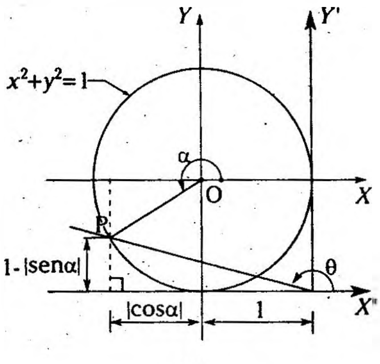
Calcule $\tan\theta$ en términos de α.



(a)

Resolución

Para hallar la $\tan\theta$, encontraremos las coordenadas del punto P en el sistema $X'Y'$



(b)

Figura 4.86

Las coordenadas del punto P en la circunferencia trigonométrica son de la forma $P(\cos\alpha;\operatorname{sen}\alpha)$.

En el sistema $X'Y'$ las coordenadas del punto P son de la forma $P'(x';y')$ del gráfico

$$x' = -(1+|\cos\alpha|)$$

$$y' = 1-|\operatorname{sen}\alpha|$$

Como $\alpha \in$ IIIC se tiene

$$|\cos\alpha| = -\cos\alpha \quad ; \quad |\operatorname{sen}\alpha| = -\operatorname{sen}\alpha$$

$$\Rightarrow x' = \cos\alpha - 1 \quad ; \quad y' = 1+\operatorname{sen}\alpha$$

Finalmente, aplicamos la definición de razones trigonométricas para ángulos en posición normal en el sistema $X'Y'$;

$$\tan\theta = \frac{y'}{x'}$$

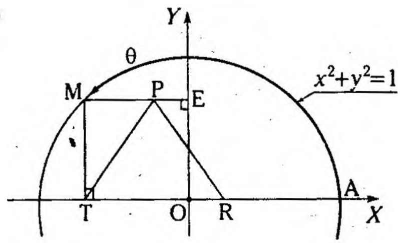
Reemplazando

$$\tan\theta = \frac{1+\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha - 1}$$

Problema 52

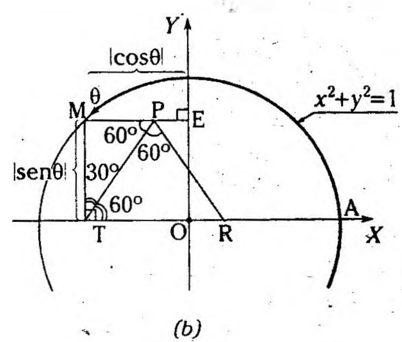
Del gráfico mostrado, si el triángulo PTR es equilátero y PE = OR, determine el valor de

$$E = \sqrt{3}\operatorname{sen}\theta - 2\cos\theta$$



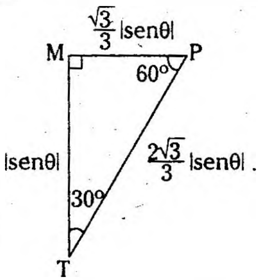
(a)

Resolución



(b)

De la figura extraemos el triángulo rectángulo TMP



(c)

$$\Rightarrow PE = |\cos\theta| - \frac{\sqrt{3}}{3}|\text{sen}\theta|$$

Además

TP=TR (lados del ΔTPR equilátero)

$$\Rightarrow TP = TO + OR\text{ ; pero } OR=PE$$

$$\Rightarrow TP = TO + PE$$

$$\Rightarrow \frac{2\sqrt{3}}{3}|\text{sen}\theta| = |\cos\theta| + |\cos\theta| - \frac{\sqrt{3}}{3}|\text{sen}\theta|$$

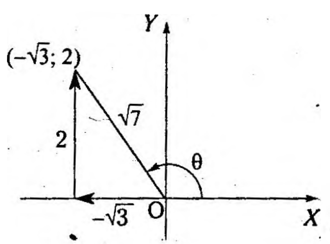
$$\Rightarrow \sqrt{3}|\text{sen}\theta| = 2|\cos\theta|$$

Como es evidente $\theta \in$ IIC

$$\Rightarrow \sqrt{3}\text{sen}\theta = -2\cos\theta$$

$$\Rightarrow \frac{\text{sen}\theta}{\cos\theta} = -\frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow \tan\theta = -\frac{2}{\sqrt{3}}$$



(d)

Figura 4.87

Luego obtenemos

$$\text{sen}\theta = \frac{2}{\sqrt{7}} \wedge \cos\theta = -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$$

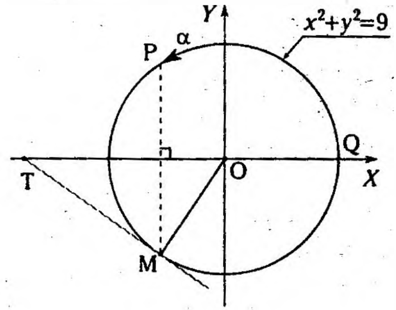
Reemplazando en E

$$E = \sqrt{3}\times\frac{2}{\sqrt{7}} - 2\times\left(\frac{-\sqrt{3}}{\sqrt{7}}\right)$$

$$\therefore E = \frac{4\sqrt{21}}{7}$$

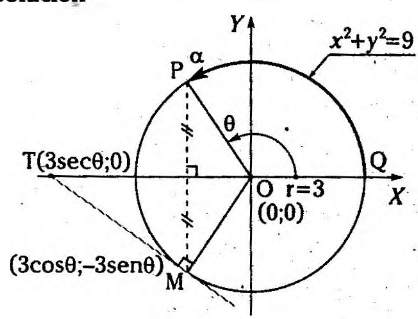
Problema 53

En la figura mostrada, determine las coordenadas del baricentro del triángulo TMO.



(a)

Resolución



(b)

Figura 4.88

La ecuación de la circunferencia $x^2+y^2=3^2$ indica que el radio de la circunferencia es (r=3), entonces no se trata de una circunferencia trigonométrica. Dibujando un ángulo θ en posición normal, tal que un punto de su lado final sea P, para relacionarlo con α mediante la fórmula de longitud de arco, así:

En el sector circular POQ: $\alpha = \theta\times 3 \Rightarrow \theta = \frac{\alpha}{3}$

Si las coordenadas de P son $(x;y)$, entonces $x=3\cos\theta$; $y=3\text{sen}\theta$

Los puntos P y M son simétricos respecto al eje X, entonces $M(3\cos\theta;-3\text{sen}\theta)$

Asimismo $T(3\sec\theta;0)$

Observación

Sean los puntos $A(x_1;y_1)$; $B(x_2;y_2)$; $C(x_3;y_3)$ para los vértices de un triángulo, luego las coordenadas $G(x;y)$ del baricentro de dicho triángulo son

$$x=\frac{x_1+x_2+x_3}{3} \quad ; \quad y=\frac{y_1+y_2+y_3}{3}$$

Aplicando en el triángulo TMO, con baricentro $G(x;y)$

$$x=\frac{0+3\sec\theta+3\cos\theta}{3}=\sec\theta+\cos\theta$$

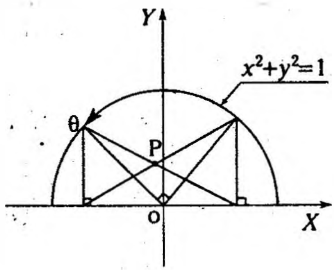
$$y=\frac{0+0+(-3\text{sen}\theta)}{3}=-\text{sen}\theta$$

Finalmente expresando en términos de α, obtenemos

$$G\left(\sec\frac{\alpha}{3}+\cos\frac{\alpha}{3}\ ;\ -\text{sen}\frac{\alpha}{3}\right)$$

Problema 54

En la siguiente circunferencia trigonométrica, determine la ordenada del punto P.

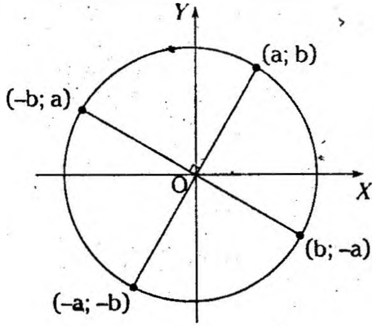


(a)

Resolución

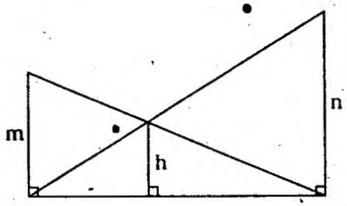
Para resolver este problema, debemos tener conocimiento de las siguientes propiedades:

i)



(b)

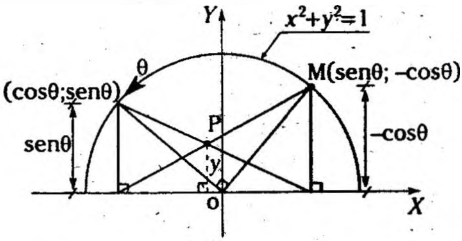
ii)



(c)

$$h=\frac{mn}{m+n}$$

Aplicando en el problema



(d)

Figura 4.89

Finalmente

$$y=\frac{\text{sen}\theta(-\cos\theta)}{\text{sen}\theta+(-\cos\theta)}$$

$$\therefore\quad y=\frac{\text{sen}\theta\cos\theta}{\cos\theta-\text{sen}\theta}$$

Problema 55

Determine la variación de Y en cada caso.

i) $Y=2\cos^2 2\theta-4\cos 2\theta$

ii) $Y=2\operatorname{sen}\alpha+\sqrt{3}$; si $0<|\alpha|\leq\frac{\pi}{3}$

Resolución

i) Completando cuadrados

$$Y=2(\cos^2 2\theta-2\cos 2\theta+1)-2$$

$$Y=2(\cos 2\theta-1)^2-2$$

Sabemos que si $\theta\in\mathbb{R}$

$\Rightarrow 2\theta\in\mathbb{R}$

$\Rightarrow -1\leq\cos 2\theta\leq 1$

Formando la expresión Y

Sumando (–1)

$\Rightarrow -2\leq\cos 2\theta-1\leq 0$

$\Rightarrow 0\leq(\cos 2\theta-1)^2\leq 4$

Elevando al cuadrado

$\Rightarrow 0\leq 2(\cos 2\theta-1)^2\leq 8$

Multiplicando por (2)

$$\Rightarrow -2\leq\underbrace{2(\cos 2\theta-1)^2-2}_{Y}\leq 6$$

Sumando (–2) $\Rightarrow -2\leq Y\leq 6$

$\therefore Y=[-2;6]$

ii) Como $0<|\alpha|\leq\frac{\pi}{3}$

A partir de esta desigualdad obtenemos los valores de α. Para ello debemos recordar que si $0<|a|\leq b$

$\Rightarrow -b\leq a\leq b$; $a\neq 0$

De (1) obtenemos

$\Rightarrow -\frac{\pi}{3}\leq\alpha\leq\frac{\pi}{3}$; $\alpha\neq 0$

Representando los valores de α en la C.T.

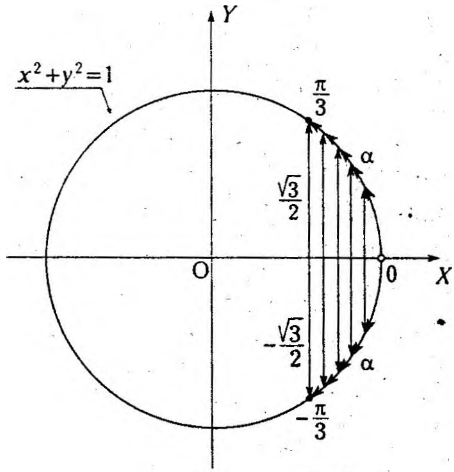


Figura 4.90

Del gráfico obtenemos

$$-\frac{\sqrt{3}}{2}\leq\operatorname{sen}\alpha\leq\frac{\sqrt{3}}{2}\ ;\ \operatorname{sen}\alpha\neq 0$$

$$\Rightarrow -\sqrt{3}\leq 2\operatorname{sen}\alpha\leq\sqrt{3}\ ;\ 2\operatorname{sen}\alpha\neq 0$$

$$\Rightarrow 0\leq\underbrace{2\operatorname{sen}\alpha+\sqrt{3}}_{Y}\leq 2\sqrt{3}\ ;\ \underbrace{2\operatorname{sen}\alpha+\sqrt{3}}_{Y}\neq\sqrt{3}$$

$$\therefore Y=\left[0;2\sqrt{3}\right]-\left\{\sqrt{3}\right\}$$

Problema 56

Si x es un arco positivo menor que una vuelta y perteneciente al tercer cuadrante, entonces halle los valores de

$$Y=2-6\csc^2\left(x+\frac{5\pi}{6}\right)$$

Resolución

Del enunciado, tenemos

$$\pi<x<\frac{3\pi}{2}\Rightarrow\frac{11\pi}{6}<x+\frac{5\pi}{6}<\frac{7\pi}{3}$$

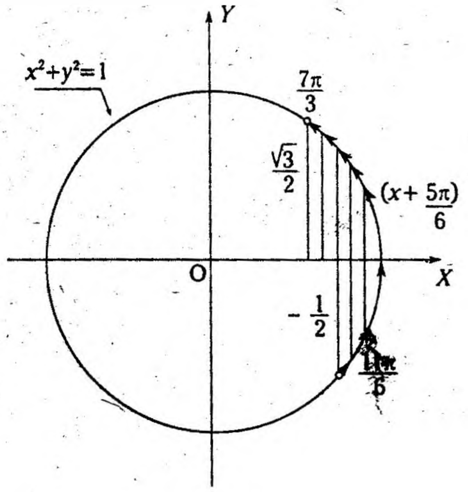


Figura 4.91

De la figura obtenemos

- $-\frac{1}{2}<\operatorname{sen}\left(x+\frac{5\pi}{6}\right)<\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\Rightarrow\ 0\le \operatorname{sen}^2\left(x+\frac{5\pi}{6}\right)<\frac{3}{4} \qquad \text{... (1)}$$

Como

$$\csc^2\left(x+\frac{5\pi}{6}\right)=\frac{1}{\operatorname{sen}^2\left(x+\frac{5\pi}{6}\right)}$$

$$\Rightarrow\ \operatorname{sen}^2\left(x+\frac{5\pi}{6}\right)\neq 0 \qquad \text{... (2)}$$

Así de (1) y (2) obtenemos que

- $0<\operatorname{sen}^2\left(x+\frac{5\pi}{6}\right)<\frac{3}{4}$

Teorema

Si $\quad y<x<z \ \wedge\ zy>0$

$$\Rightarrow\ \frac{1}{y}>\frac{1}{x}>\frac{1}{z}$$

$$\Rightarrow\ \frac{1}{\operatorname{sen}^2\left(x+\frac{5\pi}{6}\right)}>\frac{4}{3}$$

$$\Rightarrow\ \csc^2\left(x+\frac{5\pi}{6}\right)>\frac{4}{3}\ \Rightarrow\ -6\csc^2\left(x+\frac{5\pi}{6}\right)<-8$$

$$\Rightarrow\ \underbrace{2-6\csc^2\left(x+\frac{5\pi}{6}\right)}_{Y}<-6$$

$$\Rightarrow\ Y<-6$$

$$\therefore\ Y=\langle -\infty;-6\rangle$$

Problema 57

Determine la variación de

$$A=\frac{1}{\cos^2x-|\cos x|}$$

Resolución

Recordando $\cos^2x=|\cos x|^2$, entonces en A tenemos

$$A=\frac{1}{|\cos x|^2-|\cos x|}$$

Completando cuadrados en el denominador

$$A=\frac{1}{|\cos x|^2-2|\cos x|\times\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}}$$

$$A=\frac{1}{\left[|\cos x|-\frac{1}{2}\right]^2-\frac{1}{4}}$$

Sabemos que $\forall\ x\in\mathbb{R}\ ;\ -1\le \operatorname{sen}x\le 1$

$$\Rightarrow\ 0\le|\cos x|\le 1$$

Sumando (–1/2)

$$\Rightarrow\ -\frac{1}{2}\le|\cos x|-\frac{1}{2}\le\frac{1}{2}$$

Elevando al cuadrado

$$\Rightarrow 0 \leq \left[\cos x - \frac{1}{2}\right]^2 \leq \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{4} \leq \left[\cos x - \frac{1}{2}\right]^2 - \frac{1}{4} \leq 0 \quad ...(1)$$

Para que la expresión representada por A esté definida, se debe cumplir que

$$\left[\cos x - \frac{1}{2}\right]^2 - \frac{1}{4} \neq 0$$

Luego, de (1) obtenemos que

$$\Rightarrow -\frac{1}{4} \leq \left[\cos x - \frac{1}{2}\right]^2 - \frac{1}{4} < 0$$

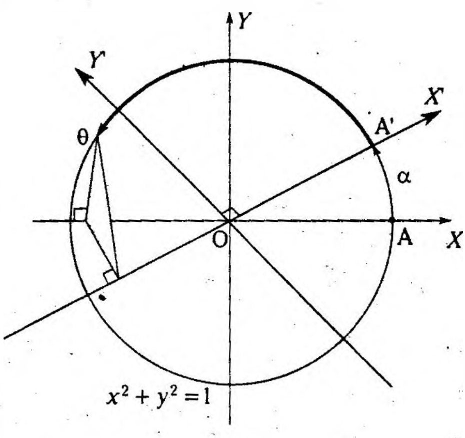
$$\Rightarrow -4 \geq \underbrace{\frac{1}{\left[\cos x - \frac{1}{2}\right]^2 - \frac{1}{4}}}_{A}$$

$$\Rightarrow -4 \geq A$$

$$\therefore A \in \langle -\infty ; -4]$$

Problema 58

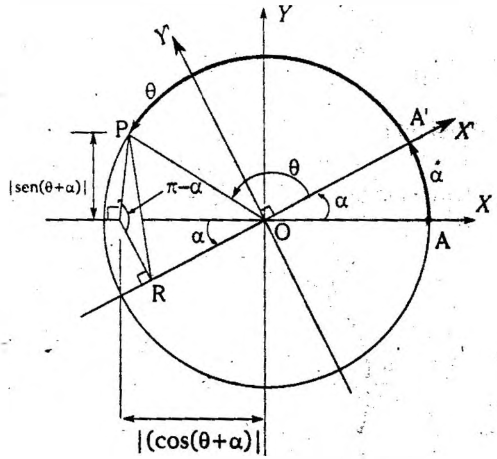
Dada la figura, determine el área de la región sombreada en términos de α y θ; siendo estos arcos en posición normal en los sistemas coordenados XY, $X'Y'$, respectivamente.



(a)

Resolución

Es necesario indicar que el sistema $X'Y'$ es generado por una rotación igual a α respecto al sistema XY.



(b)

Figura 4.92

Además consideramos que el punto A es el origen del arco α en XY y el punto A' es el origen del arco θ en $X'Y'$, designemos S al área solicitada. Observamos que en el sistema XY el extremo del arco P tiene por coordenadas

$$(\cos(\theta+\alpha) ; \text{sen}(\theta+\alpha))$$

En el ⊾TRO

$$TR = |\cos(\theta+\alpha)| \,\text{sen}\alpha$$

pero $(\theta+\alpha) \in$ IIC, en XY

$$\Rightarrow |\cos(\theta+\alpha)| = -\cos(\theta+\alpha)$$

$$TR = -\cos(\theta+\alpha)\text{sen}\alpha$$

$$PT = |\text{sen}(\theta+\alpha)| = \text{sen}(\theta+\alpha)$$

Además $m\sphericalangle PTR = \pi - \alpha$

Sabemos que el área de una región triangular es igual al semiproducto de dos lados, multiplicado por el seno del ángulo comprendido.

Del gráfico $S = \dfrac{PT \times TR}{2} \text{sen}(\pi - \alpha)$

Reemplazando

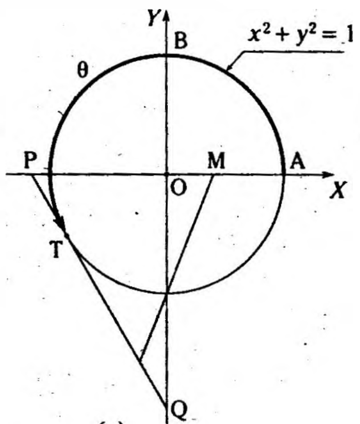
$$S=\frac{\text{sen}(\theta+\alpha)[-\cos(\theta+\alpha)\text{sen}\alpha]}{2}\text{sen}(\pi-\alpha)$$

$$S=\frac{-2\text{sen}(\theta+\alpha)\cos(\theta+\alpha)\text{sen}^2\alpha}{4}$$

$$\therefore\quad S=\frac{-\text{sen}(2\theta+2\alpha)\text{sen}^2\alpha}{4}$$

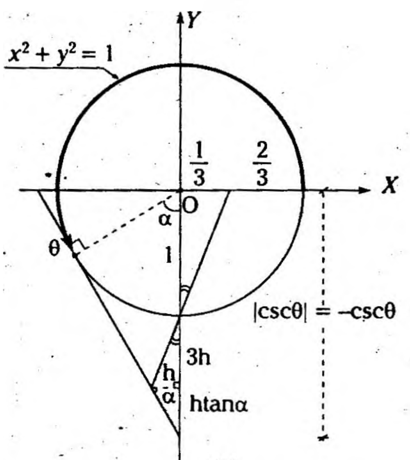
Problema 59

De la figura, halle el área de la región sombreada, en función de θ si AM=2MO.



(a)

Resolución



(b)

Figura 4.93

Del gráfico se observa que

- $1+3h+h\tan\alpha=-\csc\theta$

  $\Rightarrow\ 1+h(3+\tan\alpha)=-\csc\theta$ ... *(i)*

- $\theta+\alpha=\dfrac{3\pi}{2}\ \Rightarrow\ \tan\alpha=\cot\theta$

De *(i)*: $\quad h=-\left(\dfrac{1+\csc\theta}{\cot\theta+3}\right)$ ... *(ii)*

Si S es el área de la región sombreada

luego $\quad S=\dfrac{1}{2}(-\csc\theta-1)h$ ... *(iii)*

(*i*) en (*ii*) y simplificando obtenemos

$$\therefore\quad S=\frac{1}{2}\frac{(1+\csc\theta)^2}{(3+\cot\theta)}u^2$$

Problema 60

Si $\theta\in\left\langle\dfrac{\pi}{24};\dfrac{5\pi}{12}\right\rangle$ calcule los valores de la siguiente expresión

$$H=\cos^3\theta+\frac{3}{2}\text{sen}^2\frac{\theta}{2}$$

Resolución

Para este problema debemos tener en cuenta las siguientes identidades que se estudiarán con mayor detalle en el capítulo sobre identidades de arcos múltiples.

$$2\text{sen}^2\theta=1-\cos2\theta$$

$$\cos3\theta=4\cos^3\theta-3\cos\theta$$

$$4H=4\cos^3\theta+3\times2\text{sen}^2\frac{\theta}{2}$$

$$4H=\underline{4\cos^3\theta-3\cos\theta}+3\ ;$$

Identificando la identidad de arco triple

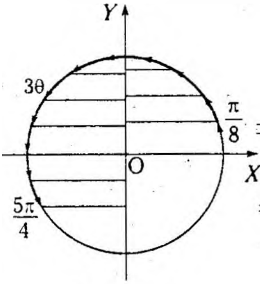
$$4H=\cos3\theta+3$$

$$H=\frac{1}{4}\cos3\theta+\frac{3}{4}$$

De la condición

$$\frac{\pi}{24}<\theta<\frac{5\pi}{12}\ \Rightarrow\ \frac{\pi}{8}<3\theta<\frac{5\pi}{4}$$

En la circunferencia trigonométrica



$$\Rightarrow -1 \le \cos 3\theta < \cos\frac{\pi}{8}$$

$$\Rightarrow -1 \le \cos 3\theta < \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$$

Figura 4.94

Multiplicando $\frac{1}{4}$ y sumando $\frac{3}{4}$, obtenemos

$$\frac{1}{2} \le H < \frac{6+\sqrt{2+\sqrt{2}}}{8}$$

$$\therefore\ H = \left[\frac{1}{2};\frac{6+\sqrt{2+\sqrt{2}}}{8}\right\rangle$$

Problema 61

Ordene en forma creciente

cov1, vers2, exsec4

Resolución

Utilizando los segmentos dirigidos, tenemos

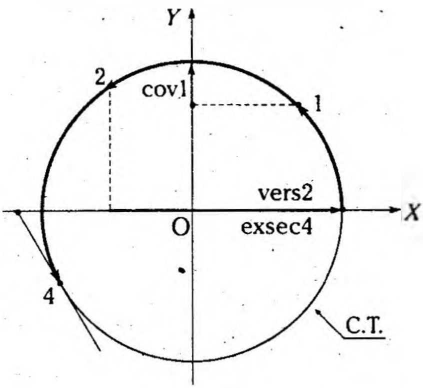


Figura 4.95

De la figura ordenando en forma creciente obtenemos: exsec4 ; cov1 ; vers2

Problema 62

Siendo θ un arco positivo y menor que una vuelta para el cual se cumple

$$\sqrt{\text{vers}2\theta} + \sqrt{\text{cov}\,\theta - 1} \le \tan\frac{3\pi}{4} + 2\text{sen}\frac{\pi}{6}$$

calcule el valor de

$$K = \text{cov}2\theta + \text{vers}\theta$$

Resolución

De la condición

$$\tan\frac{3\pi}{4} = -1 \quad ; \quad \text{sen}\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$$

entonces

$$\sqrt{\text{vers}2\theta} + \sqrt{\text{cov}\,\theta - 1} \le 0$$

de lo cual, sólo se cumple para

$$\sqrt{\text{vers}2\theta} + \sqrt{\text{cov}\,\theta - 1} = 0$$

tal que

$$\sqrt{\text{vers}2\theta} = 0 \ \wedge \ \sqrt{\text{cov}\theta - 1} = 0$$

Se tiene

i) $\underbrace{\text{vers}2\theta} = 0$

$$1 - \cos 2\theta = 0$$

$$\Rightarrow \cos 2\theta = 1$$

es decir $2\theta = 0; 2\pi; 4\pi; \ldots$

$$\Rightarrow \theta = 0; \pi; 2\pi; \ldots$$

ii) $\underbrace{\text{cov}\theta} - 1 = 0$

$$1 - \text{sen}\theta - 1 = 0$$

$$\Rightarrow \text{sen}\theta = 0$$

$$\Rightarrow \theta = 0; \pi; 2\pi; \ldots$$

De (*i*) y (*ii*) elegimos $\theta = \pi$, por enunciado del problema, sustituyendo este valor en k

$$k = \text{cov}2\pi + \text{vers}\pi$$

$$\therefore\ k = 3$$

Problemas Propuestos

1. ¿Cuáles de las siguientes expresiones son negativas?

I. $\tan(3;8)$ II. $\cos 10$ III. $\operatorname{sen}(-4)$

IV. $\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{9}\right)$ V. $\cot(\pi-1)$

A) I y II B) I y IV C) I y III
D) II, IV y V E) III y IV

2. Represente las figuras correspondientes en la C.T. y halle los valores de

I. $\operatorname{sen}\theta+\cos\theta+\tan\theta$

II. $\sec\alpha-\csc\alpha \,.\, \cot\alpha$

siendo $\theta=\frac{7\pi}{4}$ y $\alpha=\frac{11\pi}{6}$

A) $-1; -\frac{4\sqrt{3}}{3}$ B) $-1; \frac{4\sqrt{3}}{3}$

C) $-2; \frac{4\sqrt{3}}{3}$

D) $-2; -\frac{4\sqrt{3}}{3}$ E) $-1; -22$

3. Determine el valor de verdad de las proposiciones.

I. $\operatorname{sen}2+\cos 2>0$

II. $\operatorname{sen}4-\cos 4<0$

III. $\operatorname{sen}5+\cos 5>0$

A) FVF B) FFV C) VFF
D) VVF E) VVV

4. Determine el valor de verdad de las proposiciones.

I. $\tan 3>\sec 3>\csc 3$

II. $\tan(-1)<\cot(-1)<\sec(-1)$

III. $\tan 2>\cot 2>\sec 2$

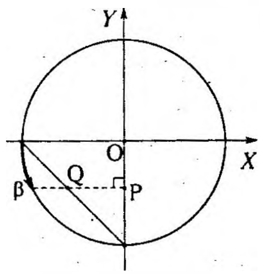
A) FFF B) FVF C) VVV
D) FVV E) VVF

5. Si el arco α en posición normal tiene su extremo en el cuarto cuadrante y $\cos\alpha=\frac{\sqrt{5}}{3}$, obtenga el valor de $\tan^2\alpha+\operatorname{sen}\alpha$.

A) $\frac{2}{15}$ B) $\frac{3}{5}$ C) 1

D) $\frac{2}{5}$ E) $\frac{3}{7}$

6. De la circunferencia trigonométrica mostrada, halle PQ en términos de β



A) $1+\operatorname{sen}\beta$ B) $1-\operatorname{sen}\beta$ C) $1+\cos\beta$
D) $\operatorname{sen}\beta+\cos\beta$ E) $1-\cos\beta$

7. En una circunferencia trigonométrica las coordenadas del extremo de un arco θ del segundo cuadrante son $\left(x;\frac{1}{2}\right)$. Determine las coordenadas del extremo de arco dado por $\theta+\pi$.

A) $\left(\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{-\sqrt{2}}{2}\right)$ B) $\left(\frac{2}{3};\frac{-\sqrt{5}}{3}\right)$

C) $\left(\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{-1}{2}\right)$

D) $\left(\frac{3}{5};\frac{-4}{5}\right)$ E) $\left(\frac{5}{13};\frac{-12}{13}\right)$

8. Se tiene los números reales x_1, x_2 en el recorrido $-\pi < x_1 < x_2 < -\frac{\pi}{2}$. ¿Cuál de las siguientes proposiciones es verdadera?

I. $\operatorname{sen}(-x_1) < \operatorname{sen}(-x_2)$

II. $\cos x_1 > \cos x_2$

III. $|\operatorname{sen} x_1| > |\operatorname{sen} x_2|$

A) I B) II C) III
D) I y II E) II y III

9. Si $\alpha \in \langle 30° ; 345° \rangle$, halle todos los valores de

$$\operatorname{sen}\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha$$

A) $\left[-2;\frac{1}{2}\right]$ B) $\left[-1;\frac{1}{2}\right]$ C) $[-2;1\rangle$
D) $\langle -1;1\rangle$ E) $\langle 1;2\rangle$

10. Si $\theta \in$ IIC, halle la extensión de la siguiente expresión:

$$\operatorname{sen}\theta + \cos\theta$$

A) $\langle -\infty;0]$ B) $\langle -\infty;-1]$ C) $\langle -\infty;-1\rangle$
D) $\mathbb{R}^-$ E) $\langle -1;1\rangle$

11. Si $x \in$ IIIC, halle los intervalos al que pertenece la siguiente expresión:

$$\sqrt{1-2\tan x+\tan^2 x}$$

A) $\mathbb{R}_0^+$ B) $\mathbb{R}$ C) $\mathbb{R}-\langle -1;1\rangle$
D) $\langle 1;+\infty\rangle$ E) $[1;\infty+\rangle$

12. Halle el máximo y mínimo valor de la siguiente expresión: $\cos(\operatorname{sen} x)$.

A) $1;\cos 1$ B) $\cos 1;1$ C) $\cos 1;\cos\frac{1}{2}$
D) $1;\cos\frac{1}{2}$ E) $1;\cos 2$

13. Ordene de mayor a menor

$$\alpha = \tan\left(-\operatorname{vers}\frac{\pi}{3}\right);\ \beta = \operatorname{sen}(\operatorname{cov} 2)\ \text{y}$$

$$\phi = \cos\left(\operatorname{exsec}\frac{\pi}{3}\right)$$

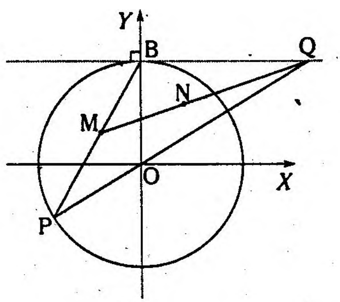
A) α,β,ϕ B) β,α,ϕ C) ϕ,β,α
D) β,ϕ,α E) α,ϕ,β

14. Ordene en forma ascendente

$$\cot^2 6,\ \cot^2 5,\ \cot^2 4,\ \cot^2 1,\ \cot^2 3$$

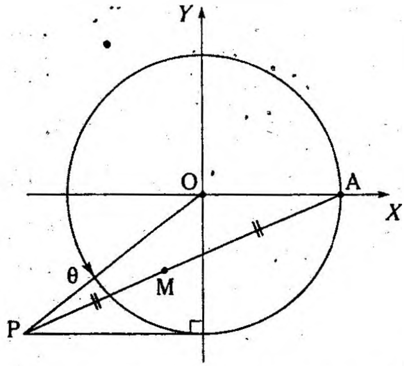
A) $\cot^2 5$, $\cot^2 1$, $\cot^2 6$, $\cot^2 4$, $\cot^2 3$
B) $\cot^2 1$, $\cot^2 5$, $\cot^2 4$, $\cot^2 6$, $\cot^2 3$
C) $\cot^2 6$, $\cot^2 3$, $\cot^2 1$, $\cot^2 4$, $\cot^2 5$
D) $\cot^2 5$, $\cot^2 1$, $\cot^2 4$, $\cot^2 6$, $\cot^2 3$
E) $\cot^2 1$, $\cot^2 4$, $\cot^2 3$, $\cot^2 5$, $\cot^2 6$

15. En la figura adjunta, se tiene una circunferencia de ecuación $x^2+y^2=1$, donde M y N son puntos medios de los segmentos PB y MQ, respectivamente.
¿Entre qué valores se encuentra la ordenada de N? ($P \in$ IIIC)



A) $\frac{1}{2}$ y $\frac{3}{4}$ B) $\frac{1}{4}$ y $\frac{3}{4}$ C) $\frac{1}{2}$ y 1
D) 0 y 1 E) $\frac{1}{4}$ y 1

16. De la C.T. mostrada, calcule las coordenadas del punto M (siendo M punto medio de AP).

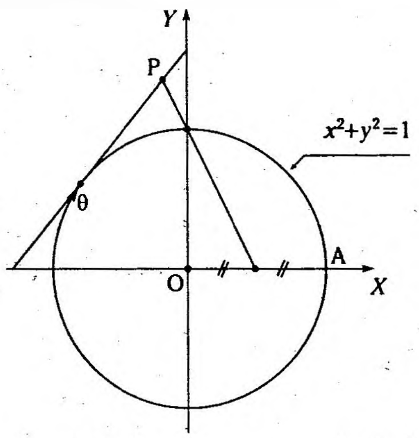


A) $\left(-\frac{\cot\theta}{2};\frac{1}{2}\right)$ B) $\left(\frac{1+\cot\theta}{2};\frac{-1}{2}\right)$

C) $\left(\frac{1-\cot\theta}{2};\frac{-1}{2}\right)$

D) $\left(\frac{\cot\theta}{2};\frac{-1}{2}\right)$ E) $\left(\frac{1+\tan\theta}{2};\frac{-1}{2}\right)$

17. Del gráfico, halle la abscisa de P.

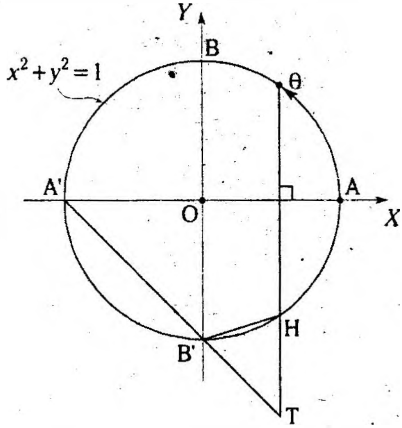


A) $\frac{1-\cos\theta}{2\cos\theta-\operatorname{sen}\theta}$ B) $\frac{1-\operatorname{sen}\theta}{\operatorname{sen}\theta+2\cos\theta}$

C) $\frac{1-\cos\theta}{2\operatorname{sen}\theta+3\cos\theta}$

D) $\frac{1-\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta-2\operatorname{sen}\theta}$ E) $\frac{1-\operatorname{sen}\theta}{2\operatorname{sen}\theta-\cos\theta}$

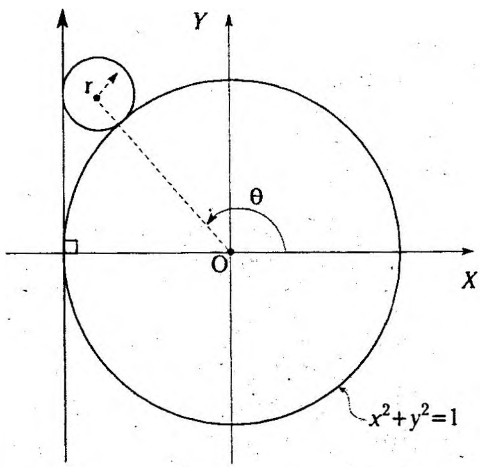
18. Del gráfico mostrado, halle $(B'H)^2-2HT$ en función de θ.



A) $-\operatorname{sen}\theta$ B) $-\cos\theta$ C) $\operatorname{sen}\theta$

D) $2\operatorname{sen}\theta$ E) $-2\cos\theta$

19. Del gráfico adjunto, halle el valor de la expresión $\frac{1}{4r}+\frac{r}{4}$



A) $\tan^2\theta+\frac{1}{2}$ B) $\cot^2\theta+\frac{1}{2}$ C) $\csc^2\theta+\frac{1}{2}$

D) $\sec^2\theta+\frac{1}{2}$ E) $\operatorname{sen}\theta$

20. Si $\theta\in\left\langle \operatorname{sen}1;\frac{2\pi}{3}\right\rangle$, calcule la secante de $\frac{\pi}{4}\operatorname{sen}\theta$ cuando $\operatorname{sen}\theta$ es máximo.

A) $\sqrt{3}$ B) $\sqrt{2}$ C) $2\sqrt{2}$
D) $3\sqrt{2}$ E) $3\sqrt{3}$

21. Si $\operatorname{cov}\theta-\operatorname{vers}\alpha=0$, calcule

$$M=\tan\left(\sec\alpha-\csc\theta+\frac{\pi}{4}\right)$$

A) 0 B) 1 C) 2
D) 3 E) 4

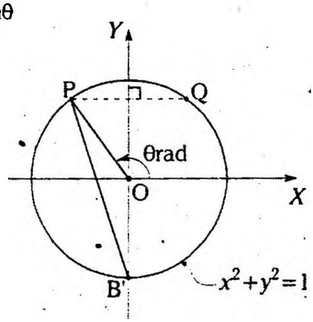
22. Si $2<|\theta|<\frac{3\pi}{2}$, halle la variación del $\cos\theta$.

A) $\langle -1;1$ B) $\langle -1;0\rangle$ C) $[-1;0\rangle$
D) $[-1;0]$ E) $[-1;1]$

23. Siendo la expresión $k-\sqrt{\pi-t}=\sqrt{2t-5}$ donde k es real, calcule el máximo valor de exsect.

A) −4 B) −3 C) −2
D) 0 E) 1

24. Del gráfico, si PB' = 2PQ, calcule
$N=\sec\theta+\tan\theta$



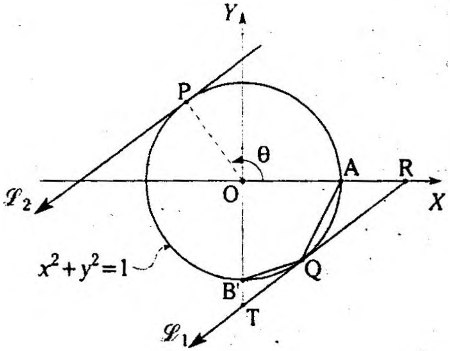
A) $-\sqrt{13}$
B) $-\sqrt{19}$
C) $-\sqrt{15}$
D) $-\sqrt{17}$
E) $-\sqrt{47}$

25. Del gráfico mostrado se tiene que el producto de las áreas de las regiones ARQ y QB'T adopta la forma

$$\frac{1}{4}+a\operatorname{sen}\theta+b\cos\theta+c\operatorname{sen}\theta\cos\theta$$

Calcule a+b+c

P y Q son puntos de tangencia, $\mathscr{L}_1//\mathscr{L}_2$



A) $-\frac{1}{2}$ B) $-\frac{1}{4}$ C) $\frac{1}{2}$
D) $\frac{1}{4}$ E) $\frac{3}{4}$

26. Sabiendo que $\psi\in\left[\frac{3}{2};5\right]$, halle el mayor valor de A y el menor valor de B, respectivamente, tal que $A\le 2\cos\left(\frac{\pi\psi}{6}\right)\le B$

A) −1 y 2 B) 0 y $\sqrt{2}$ C) $-\sqrt{3}$ y $\sqrt{2}$
D) $-\sqrt{2}$ y $\sqrt{3}$ E) −2 y $\sqrt{3}$

27. Sabiendo que se cumple $\operatorname{exsec}\theta=\sqrt{-\operatorname{cov}\alpha}$ además $7<\alpha<9$; $5<\theta<7$, calcule $2\alpha+\theta$

A) 5π B) 6π C) 7π
D) 8π E) 9π

28. Determine la suma del valor máximo y mínimo de la expresión:

$$P=\frac{1}{2+\operatorname{sen}\theta}+\frac{1}{2-\operatorname{sen}\theta}$$

sabiendo que $\sqrt{2}\leq\theta\leq\frac{4\pi}{3}$

A) $\frac{16}{13}$ B) $\frac{18}{13}$ C) $\frac{5}{3}$

D) $\frac{7}{3}$ E) $\frac{10}{3}$

29. Dado $\theta\in\left[\frac{\pi}{6};\frac{11\pi}{6}\right\rangle$, calcule la variación de

$t=\cos^2\theta+\cos\theta$

A) $\left[0;\frac{3+2\sqrt{3}}{4}\right]$

B) $\left[-\frac{1}{4};\frac{3+2\sqrt{3}}{4}\right]$

C) $\left[-\frac{1}{2};\frac{3+\sqrt{3}}{4}\right]$

D) $\left[\frac{3-2\sqrt{3}}{4};\frac{1}{2}\right]$

E) $\left[0;\frac{1}{2}\right]$

30. Los arcos α y θ pertenecen al tercer cuadrante; son positivos y menores que una vuelta. Halle los valores de θ, sabiendo que $\csc\alpha-2\cos\theta=0$.

A) $\left[\frac{7\pi}{6};\frac{4\pi}{3}\right]$ B) $\left\langle\frac{7\pi}{6};\frac{3\pi}{2}\right\rangle$

C) $\left\langle\pi;\frac{4\pi}{3}\right\rangle$

D) $\left[\pi;\frac{4\pi}{3}\right]$ E) $\left\langle\frac{4\pi}{3};\frac{3\pi}{2}\right\rangle$

31. Sabiendo que $f(\theta)=|\operatorname{sen}|\theta||+\operatorname{sen}\theta$,

además $\frac{\pi^2}{36}\leq\theta^2<\frac{\pi^2}{9}$,

calcule $M=f(\theta)_{\min}+f(\cos 2)+2$

A) 3 B) $-\cos 2$ C) $\sqrt{3}+2$

D) 2 E) 0

32. Calcule el máximo valor del arco ϕ negativo que cumple $\sqrt{3}\tan\phi=\sqrt{\operatorname{sen}x+8}$, sabiendo que x pertenece al intervalo $\left[\frac{5\pi}{2};3\pi\right]$

A) $-\frac{\pi}{4}$ B) $-\frac{\pi}{3}$ C) $-\frac{2\pi}{3}$

D) $-\frac{5\pi}{3}$ E) $-\frac{11\pi}{12}$

33. Determine la variación de $k=\tan^2\alpha-7$, si $\frac{7\pi}{12}<|\alpha|<\frac{11\pi}{12}$

A) $\langle 0;7\rangle$ B) $[-7;2\sqrt{3}\rangle$

C) $[2\sqrt{3};7\rangle$

D) $\langle -1;2\sqrt{3}\rangle$ E) $\langle -4\sqrt{3};4\sqrt{3}\rangle$

34. Siendo x un arco perteneciente al intervalo $\langle -\pi;0\rangle$, además $-1\leq\operatorname{sen}x<-\frac{\sqrt{3}}{2}$, halle la variación de $k=\sqrt{3}\tan\left(\left|\frac{x}{2}\right|-\frac{\pi}{6}\right)+1$.

A) $\langle 1;2\rangle$ B) $\langle\sqrt{2};2\rangle$ C) $\left\langle\frac{1}{2};2\right\rangle$

D) $\left\langle\frac{1}{2};1\right\rangle$ E) $\left\langle\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{3}{2}\right\rangle$

35. Sabiendo que se cumple $\text{sen}(\pi\cos\alpha) \geq 0$, halle los valores de α en el intervalo de $[0\,;2\pi\rangle$.

A) $\left[0\,;\dfrac{\pi}{2}\right] \cup \left[\dfrac{3\pi}{2}\,;2\pi\right\rangle$

B) $[0\,;\pi] \cup \left\{\dfrac{3\pi}{2}\right\}$

C) $[0\,;\pi] \cup \left[\dfrac{3\pi}{2}\,;2\pi\right\rangle$

D) $\left[0\,;\dfrac{\pi}{2}\right] \cup \left[\dfrac{3\pi}{2}\,;2\pi\right\rangle \cup \{\pi\}$

E) $\left[\dfrac{\pi}{2}\,;\pi\right] \cup \left[\dfrac{3\pi}{2}\,;2\pi\right\rangle$

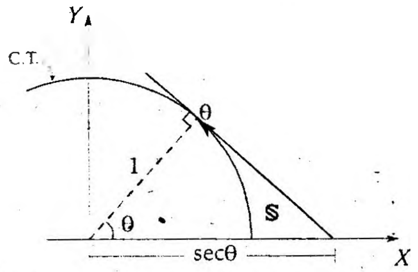
36. Si $\pi < \phi < 2\pi$, además $-\dfrac{\sqrt{7}}{4} \leq \cos\phi \leq \dfrac{\sqrt{15}}{4}$, halle la extensión de $\tan^2\phi$.

A) $\left\langle\dfrac{9}{7}\,;\infty\right\rangle$ B) $\left[\dfrac{1}{15}\,;\infty\right\rangle$ C) $[15\,;\infty\rangle$

D) $[\sqrt{7}\,;\infty\rangle$ E) $[7\,;\infty\rangle$

37. En la C.T. mostrada, calcule $M = (2\mathbb{S} + \theta)\cot\theta$

$\mathbb{S}$: área de la región sombreada.



A) $\dfrac{1}{4}$ B) $\dfrac{1}{2}$ C) $\sqrt{2}$

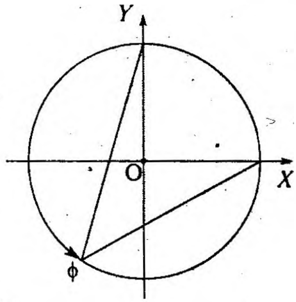
D) 1 E) $\dfrac{2}{3}$

38. Siendo $-2\pi < x < y < 0$ para los cuales se cumple $\text{cov}x - \text{exsec}y = 2$, determine el valor de $M = \text{sen}(x+y) + \cos(2x+y)$.

A) 0 B) 1 C) -1

D) -2 E) 2

39. Calcule el valor máximo del área de la región sombreada en la C.T. mostrada.



A) $\dfrac{\pi\sqrt{2}}{4}u^2$

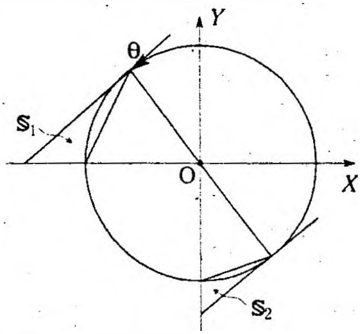
B) $\left(\dfrac{\pi - \sqrt{2}}{2}\right)u^2$

C) $\left(\dfrac{\pi + \sqrt{2}}{4}\right)u^2$

D) $\dfrac{\pi\sqrt{3}}{2}u^2$

E) $\left(\dfrac{\pi + 2\sqrt{2}}{4}\right)u^2$

40. Halle $\mathbb{S}_1\mathbb{S}_2$ de la C.T. mostrada, siendo $\mathbb{S}_1$ y $\mathbb{S}_2$ las áreas de las regiones sombreadas.



A) $\dfrac{1}{4}(1+\cos\theta)(1+\text{sen}\theta)\ u^4$

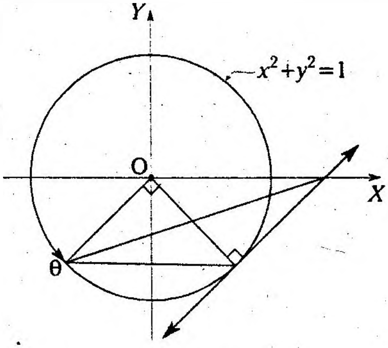
B) $\dfrac{1}{2}(1+\cos\theta)(1-\text{sen}\theta)\ u^4$

C) $\dfrac{1}{2}(1+\text{sen}\theta)(1-\cos\theta)\ u^4$

D) $\dfrac{1}{4}(1+\cos\theta)(1-\text{sen}\theta)\ u^4$

E) $\dfrac{1}{4}(1-\cos\theta)(1-\text{sen}\theta)\ u^4$

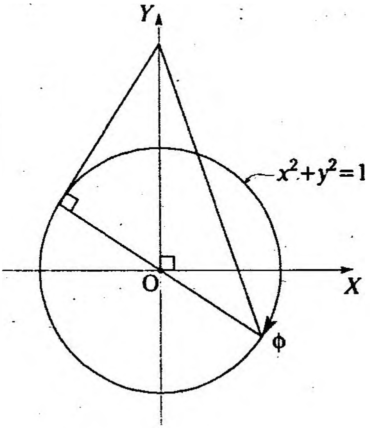
41. Del gráfico, halle el área de la región sombreada.



A) $\frac{1}{2}\cot\theta$ B) $\frac{1}{2}\tan\theta$ C) $\frac{1}{2}\text{sen}\theta\ u^2$

D) $\frac{1}{3}\cos\theta\ u^2$ E) $\sqrt{2}\tan\theta$

42. Halle el área de la región sombreada en términos de ϕ.



A) $\dfrac{-\text{sen}\phi\cos\phi}{2(1+\cos^2\phi)}$ B) $\dfrac{-\text{sen}\phi\cos\phi}{1+2\text{sen}\phi}$

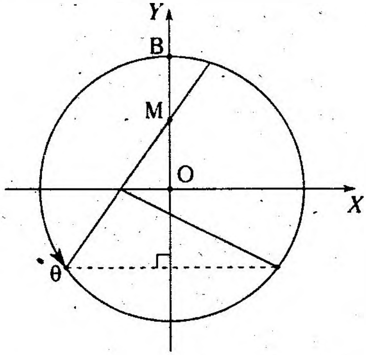
C) $-\text{sen}\phi\cos\phi$

D) $-\dfrac{\cot\phi}{2}\left(\dfrac{2+\text{sen}^2\phi}{1+\text{sen}^2\phi}\right)$ E) $-\dfrac{1}{2}\text{sen}\phi\cos\phi$

43. En la circunferencia trigonométrica adjunta, A representa el área de la región sombreada.

Calcule $A\sec\theta(\text{sen}\theta-1)$

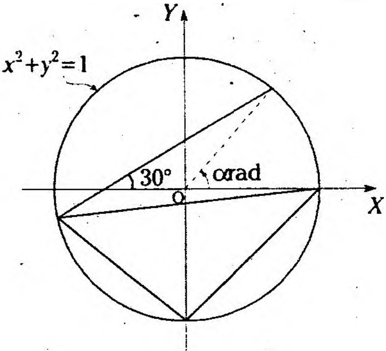
Nota: M es punto medio de OB



A) 1 B) $\frac{3}{4}$ C) $\frac{1}{2}$

D) $\frac{1}{4}$ E) $\frac{3}{2}$

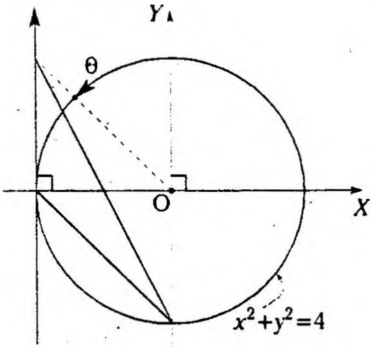
44. Determine el valor de p+q, siendo $\left(p\,\text{sen}\alpha+q\cos\alpha+\frac{1}{2}\right)$ la expresión que representa el área de la región sombreada.



A) 0 B) $\frac{1}{2}$ C) 1

D) $-\frac{1}{2}$ E) -1

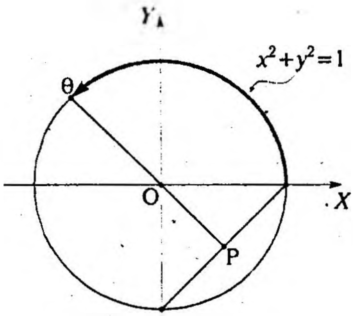
45. Halle el área de la región sombreada en términos de θ.



A) $2\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$ B) $-2\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$ C) $\tan\theta$

D) $-\tan\theta$ E) $4\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$

46. Del gráfico mostrado, calcule las coordenadas del punto P.



A) $\left(\frac{\tan\theta}{1-\tan\theta};\frac{\tan\theta}{1-\tan\theta}\right)$

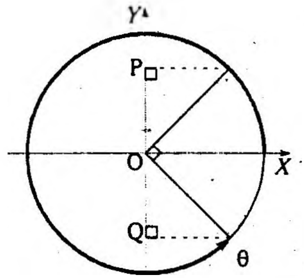
B) $\left(\frac{1}{1-\tan\theta};\frac{-\tan\theta}{1-\tan\theta}\right)$

C) $\left(\frac{1}{1+\tan\theta};\frac{-\tan\theta}{1-\tan\theta}\right)$

D) $\left(\frac{1}{1+\tan\theta};\frac{-\tan\theta}{1+\tan\theta}\right)$

E) $\left(\frac{1}{1-\tan\theta};\frac{\tan\theta}{1-\tan\theta}\right)$

47. De la C.T. mostrada, halle PQ en función de θ.



A) $\cos\theta+\operatorname{sen}\theta$

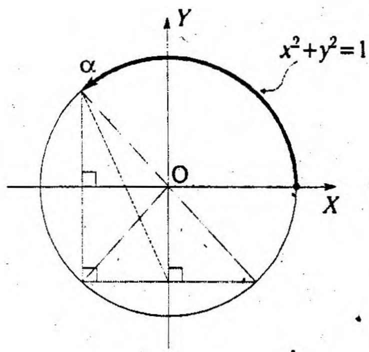
B) $\cos\theta-\operatorname{sen}\theta$

C) $\cos\theta+2\operatorname{sen}\theta$

D) $-\cos\theta-\operatorname{sen}\theta$

E) $2\cos\theta-\operatorname{sen}\theta$

48. Halle el área de la región sombreada.

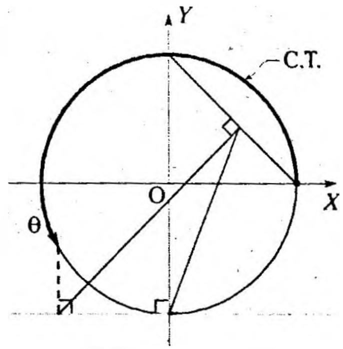


A) $-\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha$ B) $-\frac{2}{3}\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha$

C) $\operatorname{sen}\alpha+\cos\alpha$

D) $\operatorname{sen}\alpha-\cos\alpha$ E) $\operatorname{sen}\alpha-2\cos\alpha$

49. De la figura adjunta, halle el área de la región sombreada.



A) $-\frac{1}{2}\cos\theta(2-\cos\theta)$

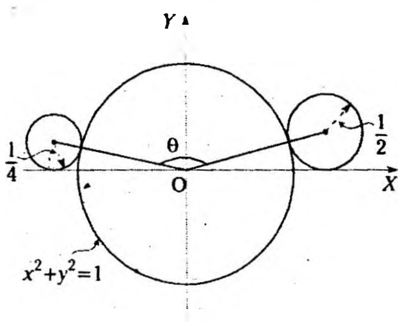
B) $-\frac{1}{2}\cos\theta(2+\cos\theta)$

C) $\frac{1}{2}\text{sen}\theta\cos\theta$

D) $-\frac{1}{4}\cos\theta(2+\cos\theta)$

E) $-\cos\theta(2+\cos\theta)$

50. De la figura mostrada, calcule $15\text{sen}\theta$



A) $2\sqrt{2}+\sqrt{6}$

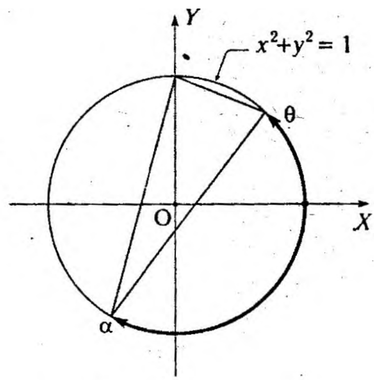
B) $2\sqrt{6}-\sqrt{2}$

C) $\sqrt{6}-\sqrt{2}$

D) $\sqrt{2}+\sqrt{6}$

E) $2(\sqrt{2}+\sqrt{6})$

51. A partir del gráfico, halle el área del triángulo sombreado en términos de α y θ.



A) $\frac{1}{2}(\cos\theta+\cos\alpha+\text{sen}\theta\cos\alpha-\text{sen}\alpha\cos\theta)$

B) $\frac{1}{2}(\cos\theta\cos\alpha-\text{sen}\theta\cos\alpha+\text{sen}\alpha\cos\theta)$

C) $\frac{1}{2}(\cos\theta-\cos\alpha+\text{sen}\theta\cos\alpha-\text{sen}\alpha\cos\theta)$

D) $\frac{1}{2}(\text{sen}\alpha-\text{sen}\theta+\text{sen}\theta\cos\alpha-\text{sen}\alpha\cos\theta)$

E) $\frac{1}{2}(\text{sen}\theta-\text{sen}\alpha+\text{sen}\theta\cos\alpha-\text{sen}\alpha\cos\theta)$

52. Si α y θ son ángulos agudos, calcule el intervalo de $M=\dfrac{\text{sen}\alpha\cos\theta}{(\text{sen}\alpha+\cos\theta)^2}$

A) $\left\langle 0;\frac{1}{2}\right]$ B) $\left\langle 0;\frac{1}{4}\right]$ C) $\left\langle 0;\frac{1}{2}\right\rangle$

D) $\langle 2;5\rangle$ E) $\langle 3;6\rangle$

53. Si $\frac{5\pi}{6}\leq x\leq\frac{3\pi}{2}$, halle la variación de

$$M=4\text{sen}^2\left(\frac{\pi}{3}\text{sen}x\right)+2$$

A) $[1;4]$ B) $[2;5]$ C) $[3;6]$

D) $\langle 2;5\rangle$ E) $\langle 3;6\rangle$

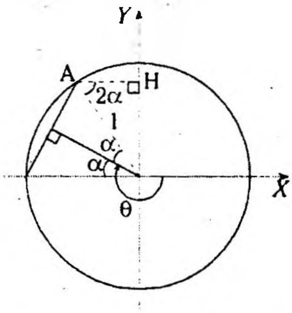
54. Si $\sec\theta \in \langle 2\,;\,4\rangle$, determine la variación de

$$E=\frac{2+4\cos\theta}{2+3\cos\theta}$$

A) $\left\langle \frac{2}{11};1\right\rangle$ B) $\left\langle -\frac{12}{11};-1\right\rangle$ C) $\left\langle \frac{12}{11};\frac{8}{7}\right\rangle$

D) $\left\langle -\frac{12}{11};-\frac{1}{8}\right\rangle$ E) $\left\langle \frac{11}{12};\frac{8}{7}\right\rangle$

55. De la siguiente circunferencia trigonométrica, halle la abscisa del punto A.

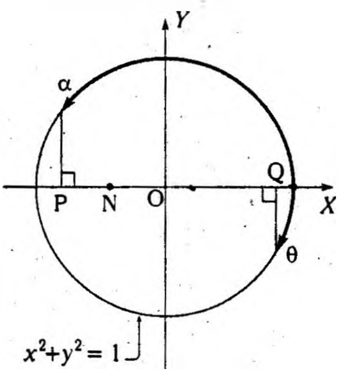


A) $\dfrac{1}{\tan\theta-\cot\theta}$ B) $\dfrac{\tan\theta}{\tan\theta-\cot\theta}$

C) $\dfrac{\tan\theta-\cot\theta}{\tan\theta+\cot\theta}$

D) $\dfrac{\cot\theta}{\tan\theta+\cot\theta}$ E) $\dfrac{\cot\theta-\tan\theta}{\tan\theta+\cot\theta}$

56. Del gráfico mostrado, determine la abscisa del punto N, si PN=0,5QN.



A) $\dfrac{2\cos\alpha+\cos\theta}{3}$

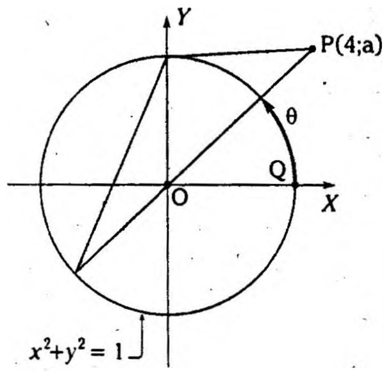
B) $\dfrac{2\cos\alpha-\cos\theta}{3}$

C) $\dfrac{\cos\theta-2\cos\alpha}{3}$

D) $\dfrac{-2\cos\alpha-2\cos\theta}{3}$

E) $\dfrac{2\cos\alpha+\cos\theta}{4}$

57. Del gráfico, halle el área de la región sombreada en términos de θ.



A) $2+\cos\theta$ B) $\dfrac{4-\mathrm{sen}\theta+\cos\theta}{2}$

C) $\dfrac{4-\mathrm{sen}\theta}{2}$

D) $\dfrac{4+\mathrm{sen}\theta-\cos\theta}{2}$ E) $\dfrac{4+\cos\theta}{2}$

58. Para qué valores de α la relación $\mathrm{exsec}\theta=0{,}25(2\alpha-5)$ no se cumple.

A) $\langle -1\,;\,1$ B) $\langle -2\,;\,2{,}5\rangle$ C) $\langle -1{,}5\,;\,2{,}5\rangle$

D) $\langle 0\,;\,2$ E) $\langle 1{,}5\,;\,2{,}5\rangle$

59. Si $\cos\theta\in[-1\,;-0{,}5]$, halle la variación de θ cuando $\theta\in[0\,;4\pi]$.

A) $\left[\frac{2\pi}{3};\frac{4\pi}{3}\right]\cup\left[\frac{8\pi}{3};\frac{10\pi}{3}\right]$

B) $\left[\frac{\pi}{3};\frac{2\pi}{3}\right]\cup\left[\frac{3\pi}{2};\frac{5\pi}{3}\right]$

C) $\left[\frac{5\pi}{6};\frac{4\pi}{3}\right]\cup\left[\frac{13\pi}{6};\frac{7\pi}{3}\right]$

D) $\left[\frac{5\pi}{6};\frac{7\pi}{6}\right]\cup\left[\frac{8\pi}{3};\frac{10\pi}{3}\right]$

E) $[0\,;2\pi]$

60. Si x es un arco positivo del segundo cuadrante y menor que una vuelta, halle la variación de $\tan(x+y)$ si $\frac{\pi}{4}<y<\frac{\pi}{3}$.

A) $\langle -1\,;\sqrt{2}\rangle$ B) $[-1\,;\sqrt{2}]$ C) $\langle -1\,;\sqrt{3}\rangle$
D) $\langle -1\,;\sqrt{3}]$ E) $\langle 0\,;\sqrt{3}\rangle$

61. Si $0\le\alpha\le\frac{\pi}{2}$; $\frac{\pi}{2}\le\beta\le\pi$; $\pi\le\theta\le2\pi$, calcule la suma del máximo y mínimo valor de
$E=2\text{sen}\alpha-3\cos\beta+4\text{sen}\theta$

A) –1 B) 2 C) 0
D) 1 E) –2

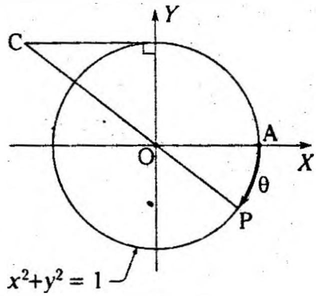
62. Calcule el producto del máximo y mínimo valor de $f_{(\alpha;\beta;\theta)}=2\text{sen}^2\alpha-3|\cos\beta|+\text{sen}\theta$, siendo α,β y θ independientes entre sí.

A) 0 B) 4 C) 8
D) –8 E) –12

63. Calcule θ, sabiendo que es positivo, mayor que una vuelta, pero menor que dos vueltas y pertenece al tercer cuadrante, además $\sec\theta=-\csc\frac{\pi}{14}$

A) $\frac{23\pi}{7}$ B) $\frac{24\pi}{7}$ C) $\frac{25\pi}{7}$
D) $\frac{26\pi}{7}$ E) $\frac{22\pi}{7}$

64. Del gráfico adjunto, halle PC en términos de θ.



A) $\sqrt{\cot^2\theta-2\csc\theta+2}$

B) $\sqrt{\cos^2\theta-2\text{sen}\theta+2}$

C) $\sqrt{\tan^2\theta-2\sec\theta+2}$

D) $\sqrt{2(\text{sen}\theta+\cos\theta+1)}$

E) $\sqrt{\sec^2\theta-\csc\theta+2}$

65. Siendo θ un arco, el cual cumple que $\frac{2}{\sqrt{3}}\le\csc\theta\le\sqrt{2}$, halle los valores de $\cos\theta$.

A) $\left[-\frac{\sqrt{2}}{2};-\frac{1}{2}\right]\cup\left[\frac{1}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$

B) $\left[-\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right]\cup\left[\frac{\sqrt{3}}{2};1\right]$

C) $\left[-\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$

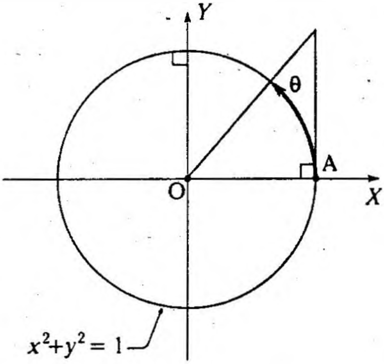
D) $\left[-\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$

E) $\left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]$

66. Halle el rango de la función $y=\tan^2x$ en el recorrido $\left[-\frac{5\pi}{6};-\frac{\pi}{3}\right]$

A) $[3\,;+\infty\rangle$ B) $\left[\frac{1}{3};+\infty\right\rangle$ C) $[2\,;+\infty\rangle$
D) $[1\,;+\infty\rangle$ E) $[\sqrt{3}\,;+\infty\rangle$

67. Si $\theta \in \left[\frac{\pi}{6} ; \frac{\pi}{3}\right]$, determine cuál es el intervalo de variación del área sombreada.



A) $\left[\frac{\sqrt{3}}{6};\frac{\sqrt{3}}{3}\right]$ B) $\left[\frac{\sqrt{3}}{6};\sqrt{3}\right]$ C) $\left[\frac{\sqrt{3}}{3};\sqrt{3}\right]$

D) $\left[\frac{\sqrt{3}}{6};\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$ E) $[1 ; 2]$

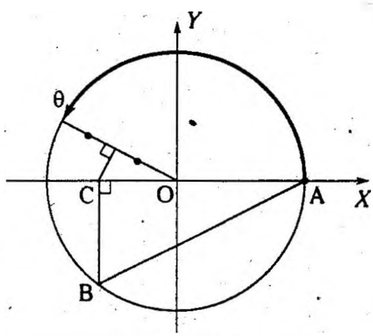
68. Si $\theta \in \left\langle \frac{5\pi}{4} ; \frac{3\pi}{2} \right\rangle$, halle los valores de h, siendo

$$h=\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}}+\csc\theta+\cot\theta$$

A) $\langle 0 ; 2\rangle$ B) $\langle 0 ; 1\rangle$ C) $\langle 1 ; 2\rangle$

D) $\langle\sqrt{3} ; 2\rangle$ E) $[0 ; 2\rangle$

69. En la circunferencia trigonométrica mostrada, determine el área de la región triangular ABC en términos de θ.



A) $\frac{(2-\sec\theta)\left(\sqrt{4-\sec^2\theta}\right)}{2}$

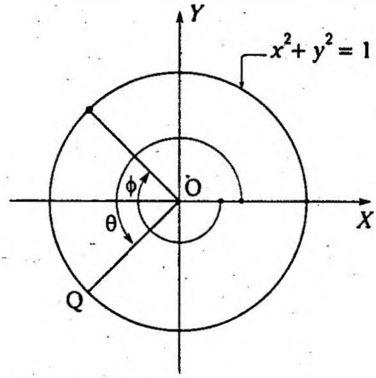
B) $\frac{(2-\sec\theta)\left(\sqrt{4-\sec^2\theta}\right)}{8}$

C) $\frac{(2-\sec\theta)\left(\sqrt{4-\sec^2\theta}\right)}{4}$

D) $\frac{(2-\sec\theta)\left(\sqrt{4+\sec^2\theta}\right)}{4}$

E) $\frac{(2-\sec\theta)\left(\sqrt{4+\sec^2\theta}\right)}{8}$

70. De la figura, G es el baricentro del triángulo OPQ. Calcule la ecuación de la recta que pasa por G y por el origen del sistema de coordenadas, en términos de θ y ϕ.



A) $y=\tan\left(\frac{\phi-\theta}{2}\right)\cdot x$

B) $y=\tan\left(\frac{\theta+\phi}{2}\right)\cdot x$

C) $y=\tan\left(\frac{\theta-\phi}{2}\right)\cdot x$

D) $y=\cot\left(\frac{\phi+\theta}{2}\right)\cdot x$

E) $y=\cot\left(\frac{\phi-\theta}{2}\right)\cdot x$

71. Si $\text{sen}\theta \in \left[-\frac{3}{4}; -\frac{1}{2}\right] \cup \left\langle \frac{3}{4}; 1 \right\rangle$, entonces halle todos los valores que toma $|\tan\theta|$.

A) $\left[\frac{\sqrt{3}}{3}; +\infty\right\rangle$

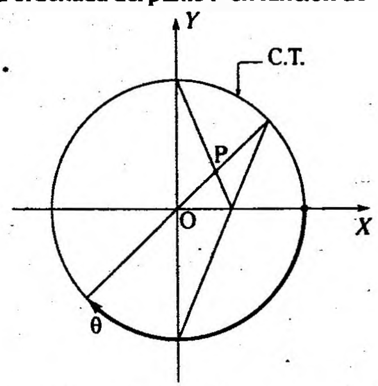
B) $\left\langle\frac{3\sqrt{3}}{7}; +\infty\right\rangle$

C) $\left[\frac{\sqrt{3}}{3}; +\infty\right\rangle - \left\{\frac{3\sqrt{3}}{7}\right\}$

D) $\left[\frac{3\sqrt{3}}{7}; +\infty\right\rangle$

E) $[0; +\infty\rangle - \left\{\frac{\sqrt{3}}{3}; \frac{3\sqrt{7}}{7}\right\}$

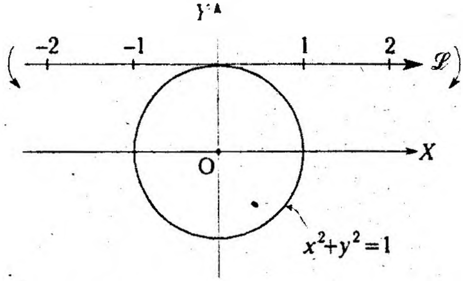
72. De la circunferencia trigonométrica, determine la ordenada del punto P en función de θ.



A) $\frac{1}{1-\tan\theta}$ B) $\frac{1}{2+\sec 2\theta}$ C) $\frac{1}{1+\tan\theta}$

D) $\frac{1}{2-\csc\theta}$ E) $\frac{1}{1-\sec\frac{\theta}{2}}$

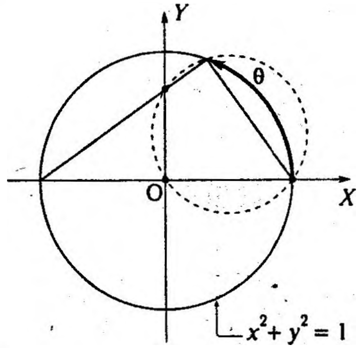
73. Considerando la recta numérica $\overrightarrow{\mathscr{L}}$ como un hilo inextensible, de la misma escala del sistema *XY* y la envolvemos en la C.T. tal como se muestra en el gráfico. Calcule la distancia entre los extremos de los arcos 3 y –2.



A) $2\text{sen}\frac{3}{2}$ B) $2\text{sen}\frac{5}{2}$ C) $2\cos\frac{3}{2}$

D) $2\cos\frac{5}{2}$ E) $2\sec\frac{5}{2}$

74. Halle el área de la región sombreada en términos de θ.



A) $\frac{1}{4}\left(\pi\sec^2\frac{\theta}{2} - 2\text{sen}\theta\right)$

B) $\frac{1}{4}\left(\pi\sec^2\frac{\theta}{2} + 2\tan\frac{\theta}{2} - 2\text{sen}\theta\right)$

C) $\frac{1}{4}\left(\pi\sec^2\frac{\theta}{2} + 2\tan\frac{\theta}{2} - 4\text{sen}\theta\right)$

D) $\frac{1}{4}\left(\sec^2\frac{\theta}{2} + \tan\frac{\theta}{2} - \text{sen}\theta\right)$

E) $\frac{1}{4}\left(\tan^2\frac{\theta}{2} + \tan\frac{\theta}{2} - \text{sen}\theta\right)$

75. Sabiendo que θ es un arco positivo menor que una vuelta, halle los valores de θ a partir de la siguiente desigualdad

$$\frac{\tan^2\theta-1}{\tan[\cot(14,56)]-\tan[\cot(30,12)]}>0$$

A) $\left\langle 0;\frac{\pi}{4}\right\rangle$

B) $\left\langle \frac{3\pi}{4};\frac{5\pi}{4}\right\rangle\cup\left\langle \frac{7\pi}{4};2\pi\right\rangle$

C) $\left\langle \frac{7\pi}{4};2\pi\right\rangle$

D) $\left\langle -\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right\rangle$

E) $A\cup B$

76. De la siguiente condición

$\cos^2 x_1>\cos^2 x_2 \quad (x_1;x_2\in\mathbb{R})$

las proposiciones incorrectas son

I) $\operatorname{sen}^2 x_1\in[0;1]$

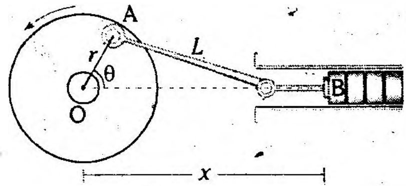
II) $\cos^2 x_2\in[-1;1]$

III) $\tan x_2\in\mathbb{R}-\{0\}$

IV) $\cot x_1\in\mathbb{R}-\{0\}$

A) I, II y III
B) II y III
C) I y II
D) I y III
E) Todas las proposiciones

77. La manivela OA (véase la gráfica) gira alrededor del punto fijo O de manera que el punto A se mueve sobre un círculo de radio r. Conectada al punto A está otra barra $\overline{AB}$ de longitud $L>r$ y el punto B está conectado a un pistón. Calcule x, donde θ es el ángulo de rotación de la manivela $\overline{OA}$.



A) $r\cos\theta+\sqrt{r^2\cos^2\theta+L^2-r^2}$

B) $r\cos\theta-\sqrt{r^2\cos^2\theta+L^2+r^2}$

C) $r\cos\theta+\sqrt{r^2\cos^2\theta+r^2-L^2}$

D) $r\cos\theta-\sqrt{r^2\cos^2\theta+L^2-r^2}$

E) $r\operatorname{sen}\theta-\sqrt{r^2\cos^2\theta+L^2-r^2}$

78. Siendo α, A, B, C, y D números reales positivos, tal que se verifica la siguiente ecuación de variable α

$(\tan\alpha+A)(\tan\alpha+B)(\tan\alpha+C)=D$

cuyas soluciones son β, θ y ϕ.

Indique la verdad o falsedad de las siguientes proposiciones.

I. $\tan\beta+\tan\theta+\tan\phi>\sum_{i=1}^{10}\frac{\cos i}{\operatorname{sen}2i}$

II. $\tan\beta.\tan\theta.\tan\phi>D+1+\cos\left(\alpha[\![\cos^2\alpha+A\cos\alpha]\!]\right)$

III. La suma $\cot\alpha+\cot\beta+\cot\theta$ tiene como uno de sus valores al cero.

A) FFV
B) FVF
C) VVV
D) VVF
E) FFF

N°	Clave	N°	Clave	N°	Clave	N°	Clave	N°	Clave
1	D	16	C	32	C	48	B	64	A
2	A	17	D	33	E	49	D	65	A
3	D	18	E	34	A	50	E	66	B
4	B	19	B	35	D	51	C	67	D
5	A	20	B	36	C	52	B	68	A
6	B	21	B	37	D	53	B	69	B
7	C	22	C	38	A	54	C	70	B
8	A	23	C	39	E	55	C	71	A
9	A	24	C	40	D	56	A	72	D
10	E	25	B	41	A	57	E	73	B
11	A	26	C	42	D	58	C	74	C
12	A	27	C	43	D	59	A	75	E
13	C	28	D	44	B	60	C	76	E
14	D	29	B	45	B	61	D	77	A
15	A	30	C	46	E	62	E	78	E
		31	D	47	B	63	B		

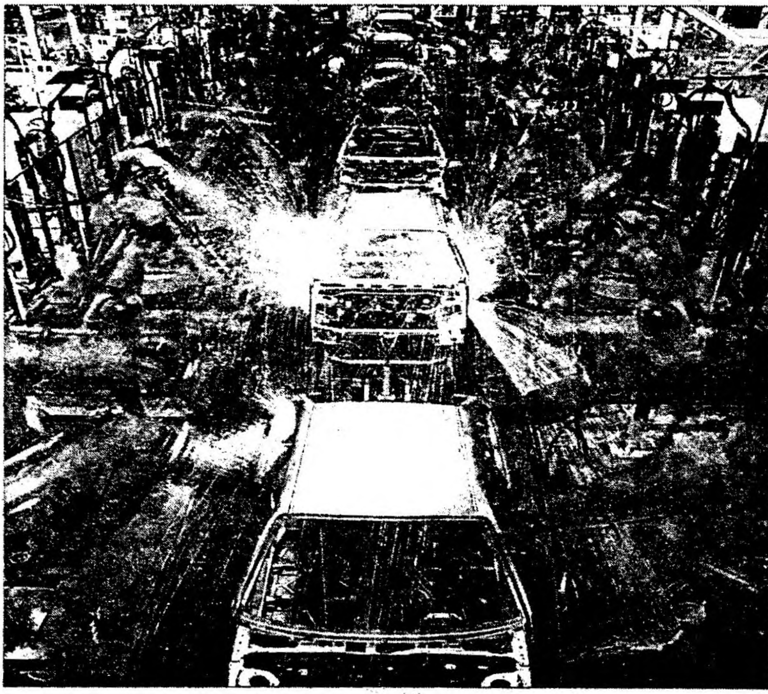
Claves

CAPÍTULO

V

Identidades trigonométricas

TRIGONOMETRÍA



Procesos idénticos

En la fabricación de automóviles en serie se utilizan procesos idénticos. En matemática elemental y superior es usual la manipulación de expresiones y su simplificación; es decir se transforman expresiones trigonométricas complejas en otras más simples.

LECTURA

UN ARTEFACTO ELÉCTRICO

Uno de los aparatos eléctricos más usados en la mayoría de las industrias ya sean manufactureras, metalúrgicas, metalmecánicas, industria del calzado, etc., es el motor eléctrico.

El motor eléctrico tiene por función transformar la energía eléctrica (corriente eléctrica) en trabajo mecánico. Puede ser útil en iluminaciones industriales mediante grupos electrógenos, pulido para el cromado de ciertos metales, etc. Específicamente nos interesa el consumo de corriente eléctrica del motor ya que esto se traduce en tarifas (pagos) que hacen los usuarios a la concesionaria (empresas eléctricas).

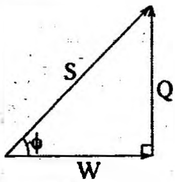
Definimos los siguientes términos:

W: Potencia activa, es la potencia utilizada por el motor, es la potencia a pagar. Se mide en kilowatts (kw).

Q: Potencia reactiva, es la potencia consumida por el bobinado del motor. Se mide en kilovolt-amperios-reactivos (KVAR).

S : Potencia aparente, se mide en kilovolt-amperios (KVA).

ϕ : Es el desfasaje (ángulo) entre el voltaje y la corriente utilizada por el motor.



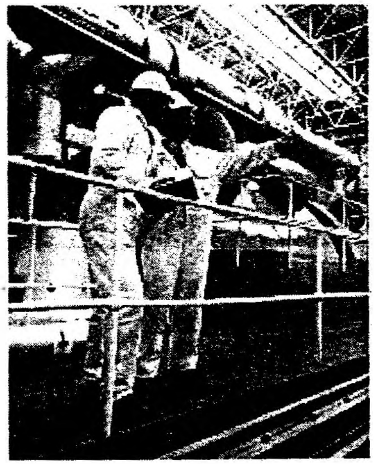
Luego haciendo uso del triángulo de potencias (vea la figura) se observa que:

$$Q = S\cos\phi \Rightarrow Q^2 = S^2\cos^2\phi \qquad \ldots (1)$$

$$W = S\operatorname{sen}\phi \Rightarrow W^2 = S^2\operatorname{sen}^2\phi \qquad \ldots (2)$$

Sumando (1) y (2): $Q^2 + W^2 = S^2\underbrace{(\cos^2\phi + \operatorname{sen}^2\phi)}_{1}$ (identidad trigonométrica)

$$Q^2 + W^2 = S^2 \quad \Rightarrow \quad W = \sqrt{S^2 - Q^2}$$



En la siguiente exposición de potencias de las corrientes alternas, se suponen ondas senoidales de voltaje y corriente.

Esto es $e = Em\ \operatorname{sen}wt$

$L = Im\ \operatorname{sen}(wt - \phi)$

donde Em e Im son los valores máximos de voltaje y corrientes y el factor de potencia (fp) es la relación entre la potencia activa y la aparente

$$fp = \frac{\not{S}\cos\phi}{\not{S}} = \cos\phi$$

Identidades trigonométricas

OBJETIVOS

- Conocer las identidades básicas y reconocer las formas alternativas de cada una.
- Conocer técnicas empleadas en la comprobación de las diversas identidades.
- Comprender las identidades de la forma sen($x+y+.....+z$), cos($x+y+...+z$), etc. y sus diversas propiedades.
- Conocer las identidades para sen$2x$, sen$3x$....sen(nx), relacionando los números complejos y el desarrollo del binomio de Newton; también conoceremos las identidades para transformar de suma o diferencia a producto y las diversas aplicaciones.

INTRODUCCIÓN

Las ecuaciones en matemática cumplen un rol de mucha importancia, y las identidades se encuentran dentro del marco teórico de las ecuaciones.

A continuación planteamos dos ecuaciones:

$$x^2+x = 0 \ .. (1) \qquad\qquad x^2+x = x(x+1) \ ... (2)$$

Nótese que la ecuación (1) es válida sólo si $x = 0$ ó $x=-1$ ya que $0^2+0 = 0$; $(-1)^2+(-1) = 0$, para cualquier otro valor de x diferente de 0 ó -1, la ecuación (1) no se verificará (por ejemplo si $x=1$ tenemos $1^2+1=2 \neq 0$).

En cambio, la ecuación (2) es válida para cualquier valor que se le asigne a x; por ejemplo si $x=0$, tenemos $0^2+0=0(0+1)=0$ ó si $x=5$, tenemos $5^2+5 = 5(5+1)=30$...etc.

Entonces una identidad es una ecuación que se verifica para todos los valores permitidos o admisibles de la variable o variables; donde la expresión *valores permitidos* se refiere a aquellos valores para los que está definida la ecuación dada.

Por ejemplo la ecuación $\dfrac{x-1}{x^2-1}=\dfrac{1}{x+1}$ es una identidad ya que se cumple para cualquier valor de x diferente a 1 ó -1; en este caso 1 y -1 son valores no admisibles para dicha identidad.

En Álgebra, identidades tales como:

$$x + y = y + x \ , \ 1x = x, \ x^2-y^2 = (x+y)(x-y)$$
$$(x+y)^2 = x^2+2xy+y^2$$

son útiles para simplificar expresiones y resolver ecuaciones.

IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS

Una ecuación que contiene operadores trigonométricos tales como sen, cos, etc., y que es válida para todos los valores admisibles de la variable o variables, recibe el nombre de identidad trigonométrica.

Así por ejemplo, las siguientes ecuaciones:

- $\tan x = \dfrac{\text{sen}x}{\cos x}$;
- $\text{sen}(x+y) = \text{sen}x\cos y + \cos x\,\text{sen}y$
- $\sec(270°-\theta) = -\csc\theta$
- $\text{sen}\alpha - \text{sen}\beta = 2\text{sen}\left(\dfrac{\alpha-\beta}{2}\right)\cos\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)$
- $\cos 2x = \cos^2 x - \text{sen}^2 x$
- $\text{sen}2x = \dfrac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$
- $\sec^2\theta - \tan^2\theta = 1$
- $\tan(\pi+\theta) = \tan\theta$
- $4\text{sen}x\,\text{sen}(60°-x)\,\text{sen}(60°+x) = \text{sen}3x$
- $\left|\cos\dfrac{x}{2}\right| = \sqrt{\dfrac{1+\cos x}{2}}$
- $\sec\alpha + \tan\alpha = \tan\left(\dfrac{\alpha}{2}+\dfrac{\pi}{4}\right)$
- $\cos^7\alpha + \cos^7(120°+\alpha) + \cos^7(120°-\alpha) = \dfrac{63}{64}\cos 3\alpha$

Son verdaderas para todos los valores de reemplazo posibles de las variables x, y, θ, α y β. Por lo tanto, dichas ecuaciones son **identidades trigonométricas**.

Para tener un mejor entendimiento de lo que es un valor admisible, preste atención a lo siguiente: las identidades trigonométricas sólo se pueden aplicar cuando las razones trigonométricas de la variable angular tienen un valor determinado.

Ejemplo

$\tan 45° = 1$ (1 es un valor determinado: $1 \in \mathbb{R}$)

En consecuencia, sí se puede aplicar la identidad siguiente $\tan 45° = \dfrac{\text{sen}45°}{\cos 45°}$

Pero como usted recordará del capítulo II, $\tan 90°$ no tiene un valor determinado, es decir, no tiene un valor real; en consecuencia no se puede aplicar la identidad siguiente:

$\tan 90° = \dfrac{\text{sen}90°}{\cos 90°}$ (incorrecto, esto significa que $\tan 90° \neq \dfrac{\text{sen}90°}{\cos 90°}$)

De otro lado

$\csc 30° = 2$, como 2 es un valor determinado, esto es $2 \in \mathbf{R}$, entonces sí se puede utilizar la siguiente identidad: $\csc 30° = \dfrac{1}{\text{sen}30°}$ (esta identidad será demostrada más adelante).

$\csc 180°$: no tiene un valor determinado, en consecuencia la identidad siguiente:

$\csc 180° = \dfrac{1}{\text{sen}180°}$ es incorrecta, esto significa que $\csc 180° \neq \dfrac{1}{\text{sen}180°}$

Para un mejor estudio de todas las identidades trigonométricas, en la presente obra clasificamos dichas identidades en 5 partes, las cuales mencionamos a continuación:

I. Identidades Trigonométricas Fundamentales.
II. Identidades de la Suma y Diferencia de Dos Arcos.
III. Identidades de Reducción al Primer Cuadrante.
IV. Identidades del Arco Doble, Mitad y Triple.
V. Identidades de Transformaciones Trigonométricas.

A continuación, el desarrollo de cada parte.

IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS FUNDAMENTALES

Identidades recíprocas
- *i*) $\operatorname{sen}\theta\csc\theta = 1$
- *ii*) $\cos\theta\sec\theta = 1$
- *iii*) $\tan\theta\cot\theta = 1$

Identidades por cociente
- *iv*) $\tan\theta = \dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}$
- *v*) $\cot\theta = \dfrac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}$

Identidades pitagóricas
- *vi*) $\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$
- *vii*) $1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$
- *viii*) $1 + \cot^2\theta = \csc^2\theta$

Las demostraciones de las ocho identidades mencionadas las podemos obtener a partir de las definiciones de las razones trigonométricas de un arco en la circunferencia trigonométrica. Considerando un arco cualquiera θ en el IIIC, entonces las coordenadas del extremo P de dicho arco son respectivamente

$$x = \cos\theta \quad ; \quad y = \operatorname{sen}\theta$$

Veamos el siguiente gráfico

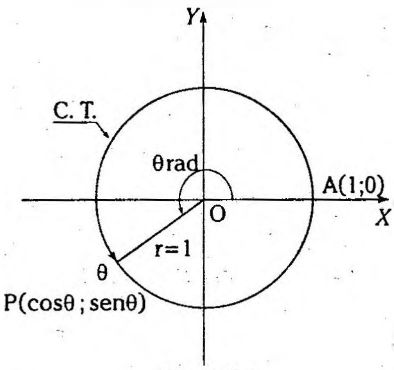


Figura 5.1

También recordemos algunas definiciones:

$$\operatorname{sen}(\theta rad) = \frac{y}{r} \Rightarrow \operatorname{sen}\theta = \frac{y}{r}$$

$$\cos(\theta rad) = \frac{x}{r} \Rightarrow \cos\theta = \frac{x}{r}$$

$$\csc(\theta rad) = \frac{r}{y} \Rightarrow \csc\theta = \frac{r}{y}$$

Para las Identidades Recíprocas

I. $\csc\theta = \dfrac{r}{y} \Rightarrow \csc\theta = \dfrac{1}{\operatorname{sen}\theta} \Rightarrow \mathbf{sen\theta csc\theta = 1}$

Véase que en el cociente es necesario analizar los valores admisibles para θ, así $\operatorname{sen}\theta \neq 0$, es decir $\theta \neq K\pi ; K \in \mathbb{Z}$

Luego planteamos que θ asume cualquier valor real menos los $K\pi ; K \in \mathbb{Z}$

Asimismo

II. $\sec\theta = \dfrac{r}{x} \Rightarrow \sec\theta = \dfrac{1}{\cos\theta} \Rightarrow \mathbf{\cos\theta \sec\theta = 1}$

Aquí la restricción es $\cos\theta \neq 0$; es decir $\theta \neq (2K+1)\dfrac{\pi}{2} \; ; \; K \in \mathbb{Z}$

Luego planteamos que θ asume cualquier valor real menos los $(2K+1)\dfrac{\pi}{2}$.

También

III. $\cot\theta = \dfrac{x}{y} \Rightarrow \cot\theta = \dfrac{\frac{x}{x}}{\frac{y}{x}} = \dfrac{1}{\tan\theta} \Rightarrow \mathbf{\tan\theta\cot\theta = 1}$

Aquí el lector debe deducir que $\theta \neq \dfrac{K\pi}{2} ; K \in \mathbb{Z}$

Para las Identidades por Cociente

IV. $\tan\theta = \dfrac{y}{x} \Rightarrow \mathbf{\tan\theta = \dfrac{sen\theta}{cos\theta}}$

Analizando para los valores admisibles de θ,

$\cos\theta \neq 0$

es decir $\theta \neq (2K+1)\dfrac{\pi}{2} ; K \in \mathbb{Z}$

V. También: $\cot\theta = \dfrac{x}{y} \Rightarrow \mathbf{\cot\theta = \dfrac{cos\theta}{sen\theta}}$

Luego decimos que $\operatorname{sen}\theta \neq 0$, es decir $\theta \neq K\pi \; ; K \in \mathbb{Z}$.

Es decir los valores admisibles para la variable angular θ son $\mathbb{R} - \{K\pi\}$

Para las Identidades Pitagóricas

VI. La ecuación de la circunferencia trigonométrica:

$x^2 + y^2 = 1$

Evaluamos en el punto P

(abscisa de P)^2 + (ordenada de P)^2=1

$(\cos\theta)^2 + (\text{sen}\theta)^2 = 1$

$\Rightarrow \mathbf{sen^2\theta + cos^2\theta = 1}$

VII. Aquí no hay necesidad de restringir, luego decimos que dicha identidad es válida para todo θ que pertenece a $\mathbb{R}$.

Si dividimos a esta última identidad por $\cos^2\theta$, obtenemos:

$$\frac{\cos^2\theta}{\cos^2\theta} + \frac{\text{sen}^2\theta}{\cos^2\theta} = \frac{1}{\cos^2\theta} \Rightarrow \mathbf{1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta}$$

Aquí la identidad se restringe $\cos\theta \neq 0$,

es decir $\theta \neq (2K+1)\frac{\pi}{2}$; $K \in \mathbb{Z}$

VIII. Pero al dividir por $\text{sen}^2\theta$, obtenemos:

$$\frac{\text{sen}^2\theta}{\text{sen}^2\theta} + \frac{\cos^2\theta}{\text{sen}^2\theta} = \frac{1}{\text{sen}^2\theta} \Rightarrow \mathbf{1 + \cot^2\theta = \csc^2\theta}$$

Esta identidad permite indicar que $\text{sen}\theta \neq 0$, es decir $\theta \neq K\pi$; $K \in \mathbb{Z}$

Ejemplo

$\text{sen}^2 50° + \cos^2 50° = 1$

$1 + \tan^2\frac{\pi}{10} = \sec^2\frac{\pi}{10}$

$1 + \cot^2 28° = \csc^2 28°$

$\tan 2 = \frac{\text{sen}\, 2}{\cos 2}$; $\cot 4° = \frac{\cos 4°}{\text{sen}\, 4°}$

$\text{sen}\frac{\pi}{8} . \csc\frac{\pi}{8} = 1$

A continuación planteamos la tabla ($n \in \mathbb{Z}$)

Identidades trigonométricas fundamentales	Identidades equivalentes
i) $\text{sen}\theta \csc\theta = 1$; $\forall\, \theta \neq n\pi$	$\text{sen}\theta = \frac{1}{\csc\theta}$; $\csc\theta = \frac{1}{\text{sen}\theta}$
ii) $\cos\theta \sec\theta = 1$; $\forall\, \theta \neq (2n+1)\frac{\pi}{2}$	$\cos\theta = \frac{1}{\sec\theta}$; $\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$
iii) $\tan\theta \cot\theta = 1$; $\forall\, \theta \neq \frac{n\pi}{2}$	$\tan\theta = \frac{1}{\cot\theta}$; $\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$
iv) $\tan\theta = \frac{\text{sen}\theta}{\cos\theta}$; $\forall\, \theta \neq (2n+1)\frac{\pi}{2}$	$\tan\theta \cos\theta = \text{sen}\theta$
v) $\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\text{sen}\theta}$; $\forall\, \theta \neq n\pi$	$\cot\theta\, \text{sen}\theta = \cos\theta$
vi) $\text{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$; $\forall\, \theta \in \mathbb{R}$	$\text{sen}^2\theta = 1 - \cos^2\theta$; $\cos^2\theta = 1 - \text{sen}^2\theta$
vii) $1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$; $\forall\, \theta \neq (2n+1)\frac{\pi}{2}$	$\tan^2\theta = \sec^2\theta - 1$; $\sec^2\theta - \tan^2\theta = 1$
viii) $1 + \cot^2\theta = \csc^2\theta$; $\forall\, \theta \neq n\pi$	$\cot^2\theta = \csc^2\theta - 1$; $\csc^2\theta - \cot^2\theta = 1$

Tipos de Problemas sobre Identidades Fundamentales

Debido a que de ahora en adelante se desarrollarán ciertas operaciones con identidades, se ha creído conveniente clasificar los tipos de problemas a fin de tener un mejor panorama para el uso y aplicación de las identidades.

A continuación presentamos la mencionada clasificación:

1) Demostraciones.
2) Problemas de simplificación o reducción de expresiones.
3) Problemas con condición.
4) Problemas de eliminación de la variable angular.

Antes de empezar con el desarrollo de los tipos de problemas, se debe comprender que para los dos primeros tipos, no es necesario que estemos al tanto de los valores admisibles de la variable angular, porque se sobreentiende que estamos realizando operaciones con dichos valores admisibles, así es que las identidades se pueden utilizar sin temor a equivocarnos. El siguiente ejemplo aclara un poco más este concepto; le sugerimos que preste bastante atención a las dos formas de resolución.

Ejemplo

Simplifique la siguiente expresión

$$R = \text{sen}\theta\cot\theta \quad ....(1)$$

Resolución 1

Dada la expresión $R = \text{sen}\theta\cot\theta \quad ....(1)$

se pensaría utilizar la identidad

$$\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\text{sen}\theta};\ \forall\theta \neq n\pi;(n\in \mathbb{Z}) \ ...(2)$$

Reemplazando (2) en (1) se obtiene

$$R = \text{sen}\theta\left(\frac{\cos\theta}{\text{sen}\theta}\right)$$

Luego la expresión simplificada será

$$R = \cos\theta\ ,\ \forall\theta \neq n\pi,\ (n\in \mathbb{Z})$$

Resolución 2

Dada la expresión

$$R = \text{sen}\theta\cot\theta \ ...(1)$$

debido a que solo se pide simplificar pensaríamos en utilizar la identidad

$$\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\text{sen}\theta} \quad ...(3)$$

Observe que en (3) a diferencia de (2) en la Resolución (1) no se ha hecho ninguna restricción para θ porque se sobreentiende que estamos trabajando con valores admisibles para la variable angular

Reemplazando (3) en (1) se tiene

$$R = \text{sen}\theta\left(\frac{\cos\theta}{\text{sen}\theta}\right)$$

Luego la expresión simplificada será

$$\therefore\ A = \cos\theta$$

De las dos formas de resolución le sugerimos que trabaje con la segunda forma sólo para los dos primeros tipos de problemas, en donde se sobreentenderá que se está utilizando la identidad sólo para valores admisibles de la variable angular. Antes de ver algunos ejemplos sobre demostración, preste atención a lo siguiente:

Demostración de Identidades

En las identidades trigonométricas se tiene que dos expresiones son iguales para todos los valores admisibles de la variable (s). Estas dos expresiones se llaman idénticas. Para verificar que la igualdad dada es una identidad, o como suele decirse demostrar la identidad, debemos trabajar cada lado de la igualdad de manera independiente. Es decir, al demostrar una identidad no se debe realizar las "mismas operaciones" en ambos lados, como cuando se resuelve una ecuación. Por ejemplo, si intentamos verificar una identidad, no se debe multiplicar ambos lados de la ecuación por la misma cantidad, esto sólo puede hacerse cuando se supone cierta la identidad. A continuación, la demostración del siguiente ejemplo lo desarrollaremos transformando sólo el primer miembro.

Ejemplo 1
Demuestre la identidad siguiente

$$\text{sen}^4\theta - \cos^4\theta = 1 - 2\cos^2\theta$$

Demostración
Seleccionamos la expresión más complicada (1er. miembro) y debemos llegar a la forma del 2do. miembro, veamos por diferencia de cuadrados:

$$(\text{sen}^2\theta - \cos^2\theta)\underbrace{(\text{sen}^2\theta + \cos^2\theta)}_{1} = 1 - 2\cos^2\theta$$

entonces

$$\text{sen}^2\theta - \cos^2\theta = 1 - 2\cos^2\theta$$

Luego cambiamos a $\text{sen}^2\theta$ por $1-\cos^2\theta$; de la identidad pitagórica

$$(1-\cos^2\theta) - \cos^2\theta = 1 - 2\cos^2\theta$$

$\therefore\ 1 - 2\cos^2\theta = 1 - 2\cos^2\theta$

Esta identidad quedó demostrada.

Ejemplo 2
Demuestre la siguiente identidad

$$\tan\theta + \cot\theta = \sec\theta\csc\theta$$

Al igual que en el ejemplo 1 se transformará sólo las razones trigonométricas que se hallan en el primer miembro de tal forma que se obtenga las razones que se hallan en el segundo miembro.
Dado

$\tan\theta + \cot\theta = \sec\theta\csc\theta \quad ...(1)$

pensaríamos en utilizar las identidades (*iv*) y (*v*) esto es

$$\left.\begin{aligned} \tan\theta &= \frac{\text{sen}\theta}{\cos\theta} \\ \cot\theta &= \frac{\cos\theta}{\text{sen}\theta} \end{aligned}\right\} ...(2)$$

Reemplazando (2) en (1) obtenemos

$$\frac{\text{sen}\theta}{\cos\theta} + \frac{\cos\theta}{\text{sen}\theta} = \sec\theta\csc\theta$$

Efectuando la suma de fracciones

$$\frac{\text{sen}^2\theta + \cos^2\theta}{\cos\theta\,\text{sen}\theta} = \sec\theta\csc\theta \quad ...(3)$$

Pero de la identidad $\text{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1 \quad ...(4)$

Reemplazando (4) en (3) **obtenemos**

$$\frac{1}{\cos\theta\,\text{sen}\theta} = \sec\theta\csc\theta$$

lo cual es equivalente a

$$\left(\frac{1}{\cos\theta}\right)\left(\frac{1}{\text{sen}\theta}\right) = \sec\theta\csc\theta \quad ...(5)$$

Pero de las identidades (I) y (II)

$$\left.\begin{aligned} \text{sen}\theta\csc\theta = 1 &\Rightarrow \frac{1}{\text{sen}\theta} = \csc\theta \\ \cos\theta\sec\theta = 1 &\Rightarrow \frac{1}{\cos\theta} = \sec\theta \end{aligned}\right| ...(6)$$

Reemplazando (6) en (5) obtenemos

$$\left(\frac{1}{\cos\theta}\right)\left(\frac{1}{\text{sen}\theta}\right) = \sec\theta\csc\theta$$

$\therefore\ \sec\theta\csc\theta = \sec\theta\csc\theta$

(Esto es lo que se buscaba demostrar)

Ejemplo 3
Demuestre la siguiente identidad

$$\sec^2\theta + \csc^2\theta = \sec^2\theta\csc^2\theta$$

Resolución
Para la demostración de esta identidad podemos escoger el segundo miembro, para luego de transformarlo obtener el primer miembro. A este tipo de demostración en donde se parte del segundo miembro, para obtener el primero se le suele llamar **demostración de venida**.
A partir del dato

$$\underbrace{\sec^2\theta + \csc^2\theta}_{\text{Primer miembro}} = \underbrace{\sec^2\theta\csc^2\theta}_{\text{Segundo miembro}}$$

Acomodando el segundo miembro

$\sec^2\theta + \csc^2\theta = (\sec\theta\csc\theta)^2 ...(1)$

Pero en el ejemplo 2 se demostró

$\sec\theta\csc\theta = \tan\theta + \cot\theta \quad ...(2)$

Reemplazando (2) en (1) obtenemos

$\sec^2\theta + \csc^2\theta = (\tan\theta + \cot\theta)^2 \quad ...(3)$

En el segundo miembro desarrollamos un binomio al cuadrado

$\sec^2\theta+\csc^2\theta=\tan^2\theta+\cot^2\theta+2\tan\theta\cot\theta$ ...(4)

Pero de la identidad recíproca (*iii*)

$\tan\theta\cot\theta=1$ ... (5)

reemplazando (5) en (4)

$$\sec^2\theta+\csc^2\theta=\tan^2\theta+\cot^2\theta+2\underbrace{\tan\theta\cot\theta}_{1}$$

Luego

$$\sec^2\theta+\csc^2\theta=\tan^2\theta+\cot^2\theta+2$$

Descomponiendo obtenemos

$$\sec^2\theta+\csc^2\theta=\underbrace{\tan^2\theta+1}_{\sec^2\theta}+\underbrace{\cot^2\theta+1}_{\csc^2\theta}$$

De donde finalmente obtenemos

$$\therefore\ \sec^2\theta+\csc^2\theta=\sec^2\theta+\csc^2\theta$$

(esto es lo que se buscaba demostrar, que luego de algunas operaciones el segundo miembro sea idéntico al primero).

Ejemplo 4

Demuestre la siguiente identidad

$$\text{sen}^4\theta+\cos^4\theta=1-2\text{sen}^2\theta\cos^2\theta$$

Resolución

Para la demostración de esta identidad partiremos del primer miembro.

Del dato

$$\text{sen}^4\theta+\cos^4\theta=1-2\text{sen}^2\theta\cos^2\theta \ ...(1)$$

descomponemos $\text{sen}^4\theta$, $\cos^4\theta$ de forma adecuada

$$\text{sen}^2\theta\text{sen}^2\theta+\cos^2\theta\cos^2\theta=1-2\text{sen}^2\theta\cos^2\theta \ ...(2)$$

pero de la identidad (*vi*) $\text{sen}^2\theta+\cos^2\theta=1$ se obtiene

$$\left.\begin{aligned}\text{sen}^2\theta&=1-\cos^2\theta\\ \cos^2\theta&=1-\text{sen}^2\theta\end{aligned}\right\}...(3)$$

reemplazando (3) en (2)

$$\text{sen}^2\theta\ (1-\cos^2\theta)+\cos^2\theta\ (1-\text{sen}^2\theta)=1-2\text{sen}^2\theta\cos^2\theta$$

Efectuando

$$\text{sen}^2\theta-\text{sen}^2\theta\cos^2\theta+\cos^2\theta-\cos^2\theta\text{sen}^2\theta=1-2\text{sen}^2\theta\cos^2\theta$$

Acomodando los términos convenientemente

$$\underbrace{\text{sen}^2\theta+\cos^2\theta}_{1}\underbrace{-\text{sen}^2\theta\cos^2\theta-\cos^2\theta\text{sen}^2\theta}_{-2\text{sen}^2\theta\cos^2\theta}=1-2\text{sen}^2\theta\cos^2\theta$$

Ordenando se obtiene

$$\therefore 1-2\text{sen}^2\theta\cos^2\theta=1-2\text{sen}^2\theta\cos^2\theta$$

(esto es lo que se buscaba demostrar, que luego de transformar el primer miembro se obtenga el segundo).

Ejemplo 5

Demuestre la siguiente identidad

$$\text{sen}^6\theta+\cos^6\theta=1-3\text{sen}^2\theta\cos^2\theta$$

Resolución

Al igual que la demostración del ejemplo 4 partiremos del primer miembro.

Del dato

$$\text{sen}^6\theta+\cos^6\theta=1-3\text{sen}^2\theta\cos^2\theta \ ...(1)$$

descomponemos $\text{sen}^6\theta$ y $\cos^6\theta$ de forma adecuada

$$\underbrace{\text{sen}^2\theta}_{(1-\cos^2\theta)}.\text{sen}^4\theta+\underbrace{\cos^2\theta}_{(1-\text{sen}^2\theta)}.\cos^4\theta=1-3\text{sen}^2\theta\cos^2\theta \ ...(2)$$

Efectuando

$$(1-\cos^2\theta)\ \text{sen}^4\theta+(1-\text{sen}^2\theta)\ \cos^4\theta=1-3\ \text{sen}^2\theta\cos^2\theta \ ...(3)$$

De (3)

$$\text{sen}^4\theta-\cos^2\theta\text{sen}^4\theta+\cos^4\theta-\text{sen}^2\theta\cos^4\theta=1-3\text{sen}^2\theta\cos^2\theta$$

Acomodando los términos

$$\underbrace{\text{sen}^4\theta+\cos^4\theta}_{1-2\text{sen}^2\theta\cos^2\theta}-\cos^2\theta\text{sen}^4\theta-\text{sen}^2\theta\cos^4\theta=1-3\text{sen}^2\theta\cos^2\theta \ ...(4)$$

Luego de (4)

$$1-2\text{sen}^2\theta\cos^2\theta-\text{sen}^2\theta\cos^2\theta\underbrace{(\text{sen}^2\theta+\cos^2\theta)}_{1}=$$

$$1-3\text{sen}^2\theta\cos^2\theta$$

$$\Rightarrow 1-2\text{sen}^2\theta\cos^2\theta-\text{sen}^2\theta\cos^2\theta(1)=1-3\text{sen}^2\theta\cos^2\theta$$

De donde finalmente obtenemos

$$\Rightarrow 1-3\text{sen}^2\theta\cos^2\theta=1-3\text{sen}^2\theta\cos^2\theta$$

(esto es lo que se buscaba demostrar, que luego de transformar el primer miembro obtengamos una expresión idéntica al segundo miembro).

Ejemplo 6

Demuestre la siguiente identidad

$$\boxed{(1+\text{sen}\theta+\cos\theta)^2=2(1+\text{sen}\theta)(1+\cos\theta)}$$

Resolución

Para la demostración de esta identidad partiremos del primer miembro, pero para ello recordemos la siguiente identidad algebraica

$$(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2+2xy+2xz+2yz$$

Del dato

$$(1+\text{sen}\theta+\cos\theta)^2=2(1+\text{sen}\theta)(1+\cos\theta)$$

Desarrollando el primer miembro

$$(1+\text{sen}\theta+\cos\theta)^2=$$

$$1^2+\underbrace{\text{sen}^2\theta+\cos^2\theta}_{1}+2(1)(\text{sen}\theta)+2(1)(\cos\theta)+2(\text{sen}\theta)(\cos\theta)$$

reduciendo

$$=2+2\text{sen}\theta+2\cos\theta+2\text{sen}\theta\cos\theta$$

$$=2(1+\text{sen}\theta)+2\cos\theta(1+\text{sen}\theta)$$

Factorizando

$$\therefore\ (1+\text{sen}\theta+\cos\theta)^2=2(1+\text{sen}\theta)(1+\cos\theta)$$

(esto es lo que se buscaba demostrar, que luego de transformar el primer miembro se obtenga el segundo).

Lo invitamos a que demuestre análogamente las siguientes identidades:

$(1-\text{sen}\theta-\cos\theta)^2=2(1-\text{sen}\theta)(1-\cos\theta)$
$(1+\text{sen}\theta-\cos\theta)^2=2(1+\text{sen}\theta)(1-\cos\theta)$
$(1-\text{sen}\theta+\cos\theta)^2=2(1-\text{sen}\theta)(1+\cos\theta)$

A manera de resumen, se presenta a continuación las siguientes identidades (las cuales han sido demostradas en los ejemplos anteriores). Cabe mencionar que estas identidades serán de ahora en adelante de uso frecuente en los problemas posteriores de este capítulo.

ix) $\tan\theta+\cot\theta=\sec\theta\csc\theta\,;\ \forall\theta\neq\frac{n\pi}{2}\,;\ n\in\mathbb{Z}$
x) $\sec^2\theta+\csc^2\theta=\sec^2\theta\csc^2\theta\ ;\ \forall\theta\neq\frac{n\pi}{2}\ ;\ n\in\mathbb{Z}$
xi) $\text{sen}^4\theta+\cos^4\theta=1-2\text{sen}^2\theta\cos^2\theta\,;\ \forall\theta\in\mathbb{R}$
xii) $\text{sen}^6\theta+\cos^6\theta=1-3\text{sen}^2\theta\cos^2\theta\ ;\ \forall\theta\in\mathbb{R}$
xiii) $(1\pm\text{sen}\theta\pm\cos\theta)^2=2(1\pm\text{sen}\theta)(1\pm\cos\theta)\ ;\ \forall\theta\in\mathbb{R}$

Además el lector debe demostrar las siguientes identidades

$$\sec^4\theta+\tan^4\theta=1+2\sec^2\theta\tan^2\theta$$

$$\text{sen}^8\theta+\cos^8\theta=1-4\text{sen}^2\theta\cos^2\theta+2\text{sen}^4\theta\cos^4\theta$$

$$\text{sen}^{10}\theta+\cos^{10}\theta=1-5\text{sen}^2\theta\cos^2\theta+6\text{sen}^4\theta\cos^4\theta$$

Como usted comprobará más adelante, es de uso frecuente el cálculo de razones trigonométricas. A este efecto, es de mucha utilidad expresar una razón trigonométrica en términos de otra razón trigonométrica dato. Para que usted tenga una mejor apreciación al respecto le sugerimos seguir el desarrollo de los siguientes ejemplos.

Cálculo de Razones Trigonométricas en Función de otras Razones Trigonométricas

Ejemplo

Exprese cada una de las razones trigonométricas de θ en términos de $\text{sen}\theta$.

Resolución

De la identidad $\text{sen}^2\theta+\cos^2\theta=1$

se tiene $\cos^2\theta=1-\text{sen}^2\theta$

de donde despejando $\cos\theta$ obtenemos

$$\boxed{\cos\theta=\pm\sqrt{1-\text{sen}^2\theta}} \quad ...(1)$$

De igual manera de la identidad fundamental

$$\tan\theta=\frac{\text{sen}\theta}{\cos\theta} \quad ...(2)$$

Reemplazando (1) en (2) obtenemos

$$\boxed{\tan\theta=\frac{\text{sen}\theta}{\pm\sqrt{1-\text{sen}^2\theta}}} \quad ...(3)$$

Si hacemos uso de las identidades recíprocas, esto es

$$\cot\theta=\frac{1}{\tan\theta} \quad ...(4)$$

Reemplazando (3) en (4)

$$\cot\theta=\frac{\pm\sqrt{1-\text{sen}^2\theta}}{\text{sen}\theta} \quad ...(5)$$

también $\sec\theta=\dfrac{1}{\cos\theta}$ ...(6)

pero $\cos\theta=\pm\sqrt{1-\text{sen}^2\theta}$

Reemplazando en (6)

$$\boxed{\sec\theta=\frac{1}{\pm\sqrt{1-\text{sen}^2\theta}}} \quad ...(7)$$

y de igual manera $\csc\theta=\dfrac{1}{\text{sen}\theta}$ ...(8)

Observación

El signo $(\pm)$ se elige según la posición del ángulo θ (es decir del cuadrante al cual pertenece θ) y de la razón trigonométrica deseada.

Para ver la utilidad de estas expresiones obtenidas siga el desarrollo de los siguientes ejemplos

Ejemplo 1

Dado $\text{sen}\theta=\dfrac{-3}{5}$; $\theta\in$ IVC entonces el valor de $\cos\theta$ será:

Resolución

Como $\theta\in$ IVC, entonces $\cos\theta>0$

entonces de (1) la opción a utilizar será

$$\cos\theta=+\sqrt{1-\text{sen}^2\theta}$$

Luego $\cos\theta=+\sqrt{1-\text{sen}^2\theta}=\sqrt{1-\left(\dfrac{-3}{5}\right)^2}$

Reduciendo obtenemos $\cos\theta=\dfrac{4}{5}$

Ejemplo 2

Dado $\text{sen}\theta=\dfrac{1}{3}$; $\theta\in$ IIC, entonces el valor de $\tan\theta$ será

Resolución

Como $\theta\in$ IIC, entonces $\tan\theta<0$

entonces de (3) escogemos la opción con signo (–)

esto es $\tan\theta=\dfrac{\text{sen}\theta}{-\sqrt{1-\text{sen}^2\theta}}$

luego $\tan\theta=\dfrac{\text{sen}\theta}{-\sqrt{1-\text{sen}^2\theta}}=\dfrac{\frac{1}{3}}{-\sqrt{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2}}$

reduciendo, obtenemos $\tan\theta=\dfrac{-\sqrt{2}}{4}$

Ejemplo 3

Exprese cada una de las razones trigonométricas de θ en términos de $\tan\theta$

Resolución

De la identidad $1+\tan^2\theta=\sec^2\theta$

se obtiene $\sec\theta=\pm\sqrt{1+\tan^2\theta}$

De la identidad

$\dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}=\tan\theta \Rightarrow \operatorname{sen}\theta=\tan\theta\cos\theta$

se tiene $\operatorname{sen}\theta=\dfrac{\tan\theta}{\sec\theta}$

de donde reemplazando el valor de $\operatorname{sen}\theta$

obtenemos $\operatorname{sen}\theta=\dfrac{\pm\tan\theta}{\sqrt{1+\tan^2\theta}}$

De igual forma que en el caso anterior usted puede verificar las siguientes relaciones a partir de las identidades recíprocas

$$\boxed{\cos\theta=\frac{1}{\pm\sqrt{1+\tan^2\theta}}}$$

$$\boxed{\csc\theta=\frac{\pm\sqrt{1+\tan^2\theta}}{\tan\theta}}$$

$$\boxed{\cot\theta=\frac{1}{\tan\theta}}$$

A continuación, siga la resolución de los ejemplos donde se ve la utilidad de estas últimas expresiones obtenidas.

Ejemplo 1

Dado $\tan\theta=7$; $\theta\in$ IIIC, determine el valor de $\operatorname{sen}\theta$.

Resolución

Como $\theta\in$ IIIC, entonces $\operatorname{sen}\theta<0$

luego $\operatorname{sen}\theta=\dfrac{-\tan\theta}{\sqrt{1+\tan^2\theta}}=\dfrac{-7}{\sqrt{1+(7)^2}}$

Reduciendo obtenemos $\operatorname{sen}\theta=\dfrac{-7\sqrt{2}}{10}$

Ejemplo 2

Dado $\tan\theta=-\sqrt{15}$; $\theta\in$ IIC
determine el valor de $\cos\theta$.

Resolución

Como $\theta\in$ IIC, entonces $\cos\theta<0$
De lo anterior la expresión a utilizar será

$$\cos\theta=\frac{-1}{\sqrt{1+\tan^2\theta}}=\frac{-1}{\sqrt{1+(-\sqrt{15})^2}}$$

Reduciendo obtenemos $\cos\theta=-\dfrac{1}{4}$

Ejemplo 3

Obtenga el valor de F de tal manera que la expresión R sea independiente de α

$R=4+F\cos\alpha$

Resolución

Dando algunos valores reales a F se obtiene

si $F=2 \Rightarrow R=4+2\cos\alpha$
(la expresión R depende de α)

si $F=5 \Rightarrow R=4+5\cos\alpha$
(la expresión R depende de α)

si $F=-1 \Rightarrow R=4-\cos\alpha$
(la expresión R depende de α)

si $F=0 \Rightarrow R=4$
(la expresión R no depende de α o también podemos decir que R es independiente de α)

si $F=10 \Rightarrow R=4+10\cos\alpha$
(la expresión R depende de α)

A partir de las relaciones obtenidas, podemos concluir

El valor de F, que hace a la expresión R independiente de α es 0, en consecuencia R=4

$\therefore\ F=0$

Ejemplo 4

Halle el valor de k para que la expresión M no dependa de β

$$M=\operatorname{sen}^6\beta+\cos^6\beta+k(\operatorname{sen}^4\beta+\cos^4\beta)$$

Resolución

Según el ejemplo anterior se podría pensar que a K se le debe asignar (K=0)

$\Rightarrow M=\operatorname{sen}^6\beta+\cos^6\beta$

(pero esta expresión depende de β)

En consecuencia, el valor adecuado de K para que la expresión no dependa de β, no es K=0; por lo que buscaremos agrupar convenientemente.

$M = \underline{sen^6\beta+cos^6\beta} + K\underline{(sen^4\beta+cos^4\beta)}$

$M = 1-3sen^2\beta cos^2\beta + K(1-2sen^2\beta cos^2\beta)$

$M = 1-3sen^2\beta cos^2\beta + K(-2sen^2\beta cos^2\beta)+K$

Factorizando $sen^2\beta cos^2\beta$ se obtiene

$M = K+1+sen^2\beta cos^2\beta(-3-2K)$

Para que la expresión no dependa de β se igualará el coeficiente $(-3-2K)$ a cero

Luego $-2K-3=0 \Rightarrow K=\frac{-3}{2}$

$\therefore$ El valor de K que hace a la expresión M independiente de β es $-3/2$

Ejemplo 5

Elimine α y obtenga una relación independiente de α a partir de las siguientes condiciones

$sen\alpha - cos\alpha = a$ ...(1)

$sen\alpha + cos\alpha = b$ ...(2)

Resolución

Eliminar una variable significa que, a partir de las condiciones o expresiones dadas, se debe obtener una expresión adicional, en la cual la variable a eliminar (en nuestro ejemplo α) no deba estar presente, para ello podemos realizar todas las operaciones matemáticas permitidas con las expresiones dadas como son sumar, restar, elevar al cuadrado, etc.

Según lo expuesto anteriormente, veamos con el desarrollo siguiente:

De (1) elevado al cuadrado se obtiene

$sen^2\alpha + cos^2\alpha - 2sen\alpha cos\alpha = a^2$

$\Rightarrow 1-2sen\alpha cos\alpha = a^2$ ... (3)

De (2) elevado al cuadrado se obtiene

$sen^2\alpha + cos^2\alpha + 2sen\alpha cos\alpha = b^2$

$\Rightarrow 1+2sen\alpha cos\alpha = b^2$ ... (4)

Sumando (3) y (4) obtenemos

$2-2sen\alpha cos\alpha + 2sen\alpha cos\alpha = a^2+b^2$

$\Rightarrow 2=a^2+b^2$ ... (5)

De todas las adicionales que hemos obtenido observamos que (3) y (4) dependen de α en cambio (5) no depende de α, por lo que afirmamos

$\therefore a^2+b^2=2$ (esta expresión no depende de α o también se dice que la variable α se ha eliminado)

Ejemplo 6

Elimine β a partir de las condiciones

$sec\beta = a$ ... (1)

$tan\beta = b$ ... (2)

Resolución

Utilizamos la identidad pitagórica $sec^2\beta = 1+tan^2\beta$

Reemplazando (1) y (2)

$a^2 = 1+b^2$ (la variable se ha eliminado)

Ejemplo 7

Elimine x, sabiendo que

$a sen x + tan x = 1$ ....(1)

$b cos x + cot x = 1$ ....(2)

Resolución

Multiplicamos en (1) por $cos x$

$a sen x cos x + sen x = cos x$

$\Rightarrow a sen x cos x = cos x - sen x$ ....(3)

Multiplicamos en (2) por $sen x$

$b sen x cos x + cos x = sen x$

$\Rightarrow b sen x cos x = sen x - cos x$ ....(4)

Dividiendo las ecuaciones (3) y (4)

$\frac{a sen x \cancel{cos x}}{b sen x \cancel{cos x}} = \frac{cos x - sen x}{sen x - cos x}$

$\frac{a}{b} = -1$

$\therefore a+b=0$

Problemas Resueltos

Problema 1

Demuestre las siguientes identidades.

a) $\dfrac{\csc x+\sec x}{1+\tan x}=\csc x$

b) $\cot^2 x-\cos^2 x=\cot^2 x\cos^2 x$

c) $\dfrac{(\operatorname{sen}x+\cos x)^2-1}{\cot x-\operatorname{sen}x\cos x}=2\tan^2 x$

d) $\sqrt{\dfrac{1+\operatorname{sen}x}{1-\cos x}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\,|\cot x+\csc x+1|$

Resolución

En los cuatro casos partiremos del primer miembro y lo transformaremos de tal manera que se obtenga el segundo miembro.

a) $$\frac{\csc x+\sec x}{1+\tan x}=\frac{\dfrac{1}{\operatorname{sen}x}+\dfrac{1}{\cos x}}{\dfrac{1}{1}+\dfrac{\operatorname{sen}x}{\cos x}}$$

Efectuando

$$\frac{\sec x+\csc x}{1+\tan x}=\frac{\dfrac{\cos x+\operatorname{sen}x}{\operatorname{sen}x\cos x}}{\dfrac{\cos x+\operatorname{sen}x}{\cos x}}$$

(MEDIOS, EXTREMOS)

$$\frac{\sec x+\csc x}{1+\tan x}=\frac{(\cos x+\operatorname{sen}x)(\cos x)}{(\operatorname{sen}x\cos x)(\cos x+\operatorname{sen}x)}$$

$$\frac{\sec x+\csc x}{1+\tan x}=\frac{\cos x}{\operatorname{sen}x\,.\cos x}$$

Reduciendo

$$\frac{\sec x+\csc x}{1+\tan x}=\csc x$$

b) $$\cot^2 x-\cos^2 x=\cot^2 x-\frac{\operatorname{sen}^2 x}{\operatorname{sen}^2 x}\cos^2 x$$

(multiplicamos y dividimos por $\operatorname{sen}^2 x$)

Acomodando los términos

$$\cot^2 x-\cos^2 x=\cot^2 x-\operatorname{sen}^2 x.\underbrace{\frac{\cos^2 x}{\operatorname{sen}^2 x}}$$

$$\cot^2 x-\cos^2 x=\cot^2 x-\operatorname{sen}^2 x\,.\cot^2 x$$

Factorizando $\cot^2 x$

$$\cot^2 x-\cos^2 x=\cot^2 x\underline{(1-\operatorname{sen}^2 x)}$$

$$\therefore\ \cot^2 x-\cos^2 x=\cot^2 x.\cos^2 x$$

c) $$\frac{(\operatorname{sen}x+\cos x)^2-1}{\cot x-\operatorname{sen}x\cos x}=\frac{\overbrace{\operatorname{sen}^2 x+\cos^2 x}^{1}+2\operatorname{sen}x\cos x-1}{\dfrac{\cos x}{\operatorname{sen}x}-\operatorname{sen}x\cos x}$$

$$\frac{(\operatorname{sen}x+\cos x)^2-1}{\cot x-\operatorname{sen}x\cos x}=\frac{\not{1}+2\operatorname{sen}x\cos x-\not{1}}{\dfrac{\cos x-\operatorname{sen}^2 x\cos x}{\operatorname{sen}x}}$$

$$\frac{(\operatorname{sen}x+\cos x)^2-1}{\cot x-\operatorname{sen}x\cos x}=\frac{2\operatorname{sen}x\not{\cos x}}{\dfrac{\not{\cos x}(1-\operatorname{sen}^2 x)}{\operatorname{sen}x}}$$

$$\frac{(\operatorname{sen}x+\cos x)^2-1}{\cot x-\operatorname{sen}x\cos x}=\frac{2\operatorname{sen}^2 x}{1-\operatorname{sen}^2 x}=\frac{2\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x}$$

$$\therefore\ \frac{(\operatorname{sen}x+\cos x)^2-1}{\cot x-\operatorname{sen}x\cos x}=2\tan^2 x$$

d) $$\sqrt{\frac{1+\operatorname{sen}x}{1-\cos x}}=\sqrt{\left(\frac{1+\operatorname{sen}x}{1-\cos x}\right)\left(\frac{1+\cos x}{1+\cos x}\right)}$$

$$\sqrt{\frac{1+\operatorname{sen}x}{1-\cos x}}=\sqrt{\frac{(1+\operatorname{sen}x)(1+\cos x)}{\underbrace{(1-\cos x)(1+\cos x)}_{1-\cos^2 x=\operatorname{sen}^2 x}}}$$

$$\sqrt{\frac{1+\operatorname{sen}x}{1-\cos x}}=\sqrt{\frac{(1+\operatorname{sen}x)(1+\cos x)}{\operatorname{sen}^2 x}}$$

de la identidad *xiii* (véase página **282**), tenemos $(1+\operatorname{sen}x+\cos x)^2=2(1+\operatorname{sen}x)(1+\cos x)$

Reemplazando

$$\sqrt{\frac{1+\operatorname{sen}x}{1-\cos x}}=\sqrt{\frac{\frac{1}{2}(1+\operatorname{sen}x+\cos x)^2}{\operatorname{sen}^2x}}$$

$$\Rightarrow\sqrt{\frac{1+\operatorname{sen}x}{1-\cos x}}=\sqrt{\frac{(1+\operatorname{sen}x+\cos x)^2}{2\operatorname{sen}^2x}}$$

$$\Rightarrow\sqrt{\frac{1+\operatorname{sen}x}{1-\cos x}}=\frac{|1+\operatorname{sen}x+\cos x|}{\sqrt{2}|\operatorname{sen}x|}=\frac{\sqrt{2}}{2}\left|\frac{1+\operatorname{sen}x+\cos x}{\operatorname{sen}x}\right|$$

$$\Rightarrow\sqrt{\frac{1+\operatorname{sen}x}{1-\cos x}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\left|\frac{1}{\operatorname{sen}x}+\frac{\operatorname{sen}x}{\operatorname{sen}x}+\frac{\cos x}{\operatorname{sen}x}\right|$$

$$\therefore\ \sqrt{\frac{1+\operatorname{sen}x}{1-\cos x}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\left|\csc x+\cot x+1\right|$$

Problema 2

Demuestre la identidad

$$\frac{1-\cos x}{\operatorname{sen}x\cos x}+\operatorname{sen}x=\frac{1-\cos x}{\tan x}+\tan x$$

Resolución

Sea M el primer miembro entonces

$$M=\operatorname{sen}x+\frac{1-\cos x}{\operatorname{sen}x\cos x}\ ;\text{ desdoblando}$$

$$M=\operatorname{sen}x+\frac{1}{\operatorname{sen}x\cos x}-\frac{\cos x}{\operatorname{sen}x\cos x}$$

$$M=\operatorname{sen}x+\left(\frac{1}{\operatorname{sen}x}\right)\left(\frac{1}{\cos x}\right)-\frac{1}{\operatorname{sen}x}$$

$$M=\operatorname{sen}x+\underline{\csc x.\sec x}-\frac{1}{\operatorname{sen}x}\ ;\text{ agrupando}$$

$$M=\operatorname{sen}x-\frac{1}{\operatorname{sen}x}+\tan x+\cot x$$

$$M=\frac{\operatorname{sen}^2x-1}{\operatorname{sen}x}+\cot x+\tan x$$

Pero $\operatorname{sen}^2x-1=-\cos^2x$

$$\Rightarrow M=\underbrace{\frac{-\cos^2x}{\operatorname{sen}x}+\frac{\cos x}{\operatorname{sen}x}}_{\text{factorizando }\cos x}+\tan x$$

$$M=\frac{\cos x(1-\cos x)}{\operatorname{sen}x}+\tan x$$

$$M=\frac{1-\cos x}{\frac{\operatorname{sen}x}{\cos x}}+\tan x\ ;\text{ finalmente}$$

$$M=\frac{1-\cos x}{\tan x}+\tan x$$

el cual es idéntico al segundo miembro, que era lo que se quería demostrar.

Problema 3

Simplifique la siguiente expresión

$$M=\frac{(1+\operatorname{sen}x+\cos x)^2}{(\operatorname{sen}x+\tan x)(\cos x+\cot x)}$$

Resolución

Transformando el denominador sin alterarlo

$$M=\frac{(1+\operatorname{sen}x+\cos x)^2}{\left(\cos x\underbrace{\frac{\operatorname{sen}x}{\cos x}}_{\tan x}+\tan x\right)\left(\operatorname{sen}x\underbrace{\frac{\cos x}{\operatorname{sen}x}}_{\cot x}+\cot x\right)}$$

$$M=\frac{2(1+\operatorname{sen}x)(1+\cos x)}{\tan x(\cos x+1)\cot x(\operatorname{sen}x+1)}$$

Luego

$$M=\frac{2}{\underbrace{\tan x\cot x}_{1}}\qquad\therefore\ M=2$$

Problema 4

Simplifique la expresión siguiente

$$L=1-\frac{\operatorname{sen}^2\theta}{1+\cot\theta}-\frac{\cos^2\theta}{1+\tan\theta}$$

Resolución

Expresando la $\tan\theta$ y $\cot\theta$ en términos de senos y cosenos

$$\left(\cot\theta=\frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}\quad\text{y}\quad\tan\theta=\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}\right)$$

Obtenemos

$$L = 1 - \frac{\text{sen}^2\theta}{1+\frac{\cos\theta}{\text{sen}\theta}} - \frac{\cos^2\theta}{1+\frac{\text{sen}\theta}{\cos\theta}}$$

Efectuando

$$L = 1 - \frac{\text{sen}^3\theta}{\text{sen}\theta+\cos\theta} - \frac{\cos^3\theta}{\cos\theta+\text{sen}\theta}$$

$$L = 1 - \left[\frac{\text{sen}^3\theta+\cos^3\theta}{\text{sen}\theta+\cos\theta}\right]$$

Aplicando una suma de cubos en el numerador del segundo término

$$L=1-\left[\frac{(\text{sen}\theta+\cos\theta)(\text{sen}^2\theta-\text{sen}\theta\cos\theta+\cos^2\theta)}{(\text{sen}\theta+\cos\theta)}\right]$$

$$L=1-[\underbrace{\text{sen}^2\theta+\cos^2\theta}_{1}-\text{sen}\theta\cos\theta]=+1-1+\text{sen}\theta\cos\theta$$

$\therefore\ L = \text{sen}\theta\cos\theta$

Problema 5

Siendo x un arco del segundo cuadrante, reduzca la siguiente expresión

$$P = \sqrt{\frac{2+2\text{sen}x}{1-\cos x}} - \frac{\text{sen}x}{1-\cos x}$$

Resolución

Multiplicamos por la conjugada de $(1 - \cos x)$ la cual es $(1+\cos x)$ tal como se indica

$$P=\sqrt{\frac{2(1+\text{sen}x)}{1-\cos x}\left(\frac{1+\cos x}{1+\cos x}\right)} - \frac{\text{sen}x}{1-\cos x}\left(\frac{1+\cos x}{1+\cos x}\right)$$

$$P = \sqrt{\frac{(1+\text{sen}x+\cos x)^2}{\text{sen}^2x}} - \frac{\text{sen}x(1+\cos x)}{\text{sen}^2x}$$

[se utilizó $(1-\cos x)(1+\cos x)=\text{sen}^2x$]

Reduciendo se obtiene

$$P = \frac{|1+\text{sen}x+\cos x|}{|\text{sen}x|} - \frac{1+\cos x}{\text{sen}x}$$

como $x\in \text{IIC}$, es sabido que $\text{sen}x>0$, además $1+\text{sen}x+\cos x>0$, entonces

$|1+\text{sen}x+\cos x|=1+\text{sen}x+\cos x$ y $|\text{sen}x|=\text{sen}x$

Luego, reemplazando en P se obtiene

$$P=\frac{1+\text{sen}x+\cos x}{\text{sen}x} - \frac{1+\cos x}{\text{sen}x}$$

$$P=\frac{1+\text{sen}x+\cos x-1-\cos x}{\text{sen}x}=\frac{\text{sen}x}{\text{sen}x}$$

$\therefore\ P = 1$

Problema 6

Simplifique la expresión K, tal que se verifique la siguiente condición: $0<\theta<\frac{\pi}{4}$

$$K = \sqrt{\sec^2\theta+\csc^2\theta}\left[1+\sqrt{1-4\text{sen}^2\theta\cos^2\theta}\right]$$

Resolución

Recordando la identidad

$$\sec^2\theta+\csc^2\theta=\sec^2\theta\csc^2\theta$$

$$K=\sqrt{\sec^2\theta\csc^2\theta}\left[1+\sqrt{(1-2\text{sen}\theta\cos\theta)(1+2\text{sen}\theta\cos\theta)}\right]$$

sabemos que se cumple

$(\text{sen}\theta\pm\cos\theta)^2=1\pm 2\text{sen}\theta\cos\theta$;

reemplazando tenemos

$$K=|\sec\theta.\csc\theta|.\left[1+\sqrt{\underbrace{(\text{sen}\theta-\cos\theta)^2.(\text{sen}\theta+\cos\theta)^2}_{(\text{sen}^2\theta-\cos^2\theta)^2}}\right]$$

$$K=|\sec\theta.\csc\theta|\left[1+|\text{sen}^2\theta-\cos^2\theta|\right]$$

pero $0<\theta<\frac{\pi}{4}\Rightarrow \text{sen}\theta<\cos\theta$; $\sec\theta\csc\theta>0$

luego $\text{sen}^2\theta-\cos^2\theta<0$

entonces $|\text{sen}^2\theta-\cos^2\theta|=-(\text{sen}^2\theta-\cos^2\theta)$

y $|\sec\theta\csc\theta|=\sec\theta\csc\theta$

Reemplazando en K se obtiene

$$K=\sec\theta\csc\theta\left[1-(\text{sen}^2\theta-\cos^2\theta)\right]$$

$$K=\sec\theta\csc\theta(2\cos^2\theta)$$

acomodando los términos

$$K = 2\underbrace{\sec\theta.\cos\theta}_{1}\underbrace{\csc\theta.\cos\theta}_{\cot\theta}$$

$K=2\ (1)\ (\cot\theta)$

finalmente obtenemos

$\therefore\ K=2\cot\theta$

Problema 7

Si la siguiente identidad

$$\frac{3}{1+\cos x}+\frac{3}{\sec x-1}=A+C(\tan x)^V$$

se cumple para todo $x\neq K\frac{\pi}{2}$; $K\in\mathbb{Z}$, calcule el producto ACV.

Resolución

Reduciendo en el primer miembro tenemos

$$\frac{3}{1+\cos x}+\frac{3}{\frac{1}{\cos x}-1}=A+C(\tan x)^V$$

$$\frac{3}{1+\cos x}+\frac{3}{\frac{1-\cos x}{\cos x}}=A+C(\tan x)^V$$

$$\frac{3}{1+\cos x}+\frac{3\cos x}{1-\cos x}=A+C(\tan x)^V$$

$$\frac{3-3\cos x+3\cos x+3\cos^2 x}{(1+\cos x).(1-\cos x)}=A+C(\tan x)^V$$

$$\frac{3+3\cos^2 x}{\operatorname{sen}^2 x}=A+C(\tan x)^V$$

$$\frac{3}{\operatorname{sen}^2 x}+\frac{3\cos^2 x}{\operatorname{sen}^2 x}=A+C(\tan x)^V$$

$$\underbrace{3\csc^2 x}\quad+3\cot^2 x=A+C(\tan x)^V$$

$$3(1+\cot^2 x)+3\cot^2 x=A+C(\tan x)^V$$

$$3+6\cot^2 x=A+C(\tan x)^V$$

$$3+6\left(\frac{1}{\tan x}\right)^2=A+C(\tan x)^V$$

$$3+6(\tan x)^{-2}=A+C(\tan x)^V$$

Identificando tenemos que

A = 3,

C = 6

V = –2

$\therefore$ ACV = –36

Problema 8

Si $\tan^2\alpha\tan^2\theta-1=0$, obtenga el valor de

$$K=\sec^2\alpha-\csc^2\theta$$

Resolución

De la condición

$$\tan^2\alpha\tan^2\theta=1$$

$$\tan^2\alpha=\frac{1}{\tan^2\theta}$$

$$\underbrace{\tan^2\alpha}=\underbrace{\cot^2\theta}$$

$$\sec^2\alpha-1=\csc^2\theta-1\ \ldots\left(\begin{matrix}\text{véase Identidades}\\ \text{Pitagóricas}\end{matrix}\right)$$

Reduciendo obtenemos

$\sec^2\alpha-\csc^2\theta=0$ ...(el primer miembro es la expresión pedida)

$\therefore$ K=0

Problema 9

Si

$$\operatorname{sen}^2\theta+\operatorname{sen}\theta=1$$

calcule

$$P=\sqrt{\sec^4\theta-\cot^2\theta}$$

Resolución

De la condición

$$\operatorname{sen}\theta=\underbrace{1-\operatorname{sen}^2\theta}$$

$\operatorname{sen}\theta=\cos^2\theta$ ... (véase identidad Pitagóricas)

Invirtiendo

$$\underbrace{\frac{1}{\operatorname{sen}\theta}}=\underbrace{\frac{1}{\cos^2\theta}}$$

$$\Rightarrow \csc\theta=\sec^2\theta$$

Reemplazando en P tenemos

$$P=\sqrt{(\sec^2\theta)^2-\cot^2\theta}$$

$P=\sqrt{(\csc\theta)^2-\cot^2\theta}$; pero $\csc^2\theta-\cot^2\theta=1$

$\Rightarrow P=\sqrt{1}=1$ $\qquad\therefore P=1$

Problema 10

Si $\tan^3x + \tan x = \sec x$

calcule $\sec^3x - \tan x - \cot x$

Resolución

De la condición, factorizando $\tan x$

$\tan x\,\underbrace{(\tan^2x+1)} = \sec x$

$\tan x\,.\,\sec^2x = \sec x$

$\operatorname{sen}x.\dfrac{1}{\underbrace{\cos x}}.\sec^2x= \sec x$

$\operatorname{sen}x.\sec x.\sec^2x=\sec x$

$\Rightarrow \sec^3x= \dfrac{\sec x}{\operatorname{sen}x}$

$\Rightarrow \sec^3x=\sec x\csc x$

$\Rightarrow \sec^3x=\tan x+\cot x$

$\therefore \sec^3x-\tan x- \cot x=0$

Problema 11

Halle los valores de E si $E = \dfrac{\sec x - \sec x\operatorname{sen}^2x}{\operatorname{sen}^2x(1+\cot^2x)}$

Resolución

Primeramente restringimos los valores de x

$\sec x$; $x \neq (2K+1)\dfrac{\pi}{2}$; $K\in \mathbb{Z}$

$\cot x$; $x \neq K\pi$; $K\in \mathbb{Z}$

$\operatorname{sen}x \neq 0 \Rightarrow x \neq K\pi$; $K\in \mathbb{Z}$

Si unimos estas restricciones obtenemos que

$x \neq \dfrac{K\pi}{2}$; $K\in \mathbb{Z}$ (arcos cuadrantales)

Reduciendo E, tenemos

$$E=\frac{\sec x(1-\operatorname{sen}^2x)}{\operatorname{sen}^2x(1+\cot^2x)}=\frac{\sec x(\cos^2x)}{\operatorname{sen}^2x(\csc^2x)}=\frac{\frac{1}{\cos x}(\cos^2x)}{\operatorname{sen}^2x\left(\frac{1}{\operatorname{sen}^2x}\right)}$$

La expresión E se reduce a

$E=\cos x$; sabemos $-1\leq \cos x \leq 1$; $\forall x\in \mathbb{R}$

como $x \neq K\dfrac{\pi}{2}$, entonces $\cos x \neq \pm 1$ y $\cos x \neq 0$

por lo tanto

$-1<\underbrace{\cos x}<1$ y $\underbrace{\cos x} \neq 0$

$-1 < \ E \ < 1$ y $E\neq 0$

$\therefore E=\langle -1\ ;\ 1\rangle-\{0\}$

Problema 12

Obtenga los valores de la expresión R, siendo

$$R=\frac{\tan x+\cot x-\left[\operatorname{sen}^2x(1-\operatorname{sen}x)+\cos^2x\right]\sec x\csc x}{\tan x+\cot x}$$

halle la extensión de R.

Resolución

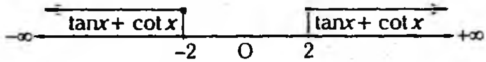
En la expresión R, $\tan x$, $\cot x$, $\sec x$, $\csc x$ están definidos $\forall x\in \mathbb{R}-\left\{\dfrac{K\pi}{2}\right\}$; $K\in \mathbb{Z}$.

Seguidamente buscaremos reducir la expresión de tal forma que obtengamos una expresión equivalente en la cual la variable se halle afectada de un solo operador trigonométrico, entonces en el numerador de R sustituimos $\sec x\csc x$ por $\tan x+\cot x$.

$$R=\frac{\tan x+\cot x-\left[\operatorname{sen}^2x(1-\operatorname{sen}x)+\cos^2x\right](\tan x+\cot x)}{\tan x+\cot x}$$

$$R=\frac{(\tan x+\cot x)\left[1-\left[\operatorname{sen}^2x(1-\operatorname{sen}x)+\cos^2x\right]\right]}{(\tan x+\cot x)}$$

Como se sabe



es decir $(\tan x+\cot x)$ no toma el valor de cero $\forall x \neq \dfrac{K\pi}{2}$, entonces R queda reducido a

$R = 1-\left[\operatorname{sen}^2x(1-\operatorname{sen}x)+\cos^2x\right]$

$R = 1-[\underbrace{\operatorname{sen}^2x} - \operatorname{sen}^3x + \underbrace{\cos^2x}] = 1-[1-\operatorname{sen}^3x]$

$R = 1-1+\operatorname{sen}^3x$

$R = \operatorname{sen}^3x$

Sabemos $-1\leq \operatorname{sen}x \leq 1$; $\forall x\in \mathbb{R}$

Como para R, $x \neq \dfrac{K\pi}{2}$,

Entonces $\operatorname{sen}x=\pm 1$ y $\operatorname{sen}x \neq 0$

Entonces $-1<\operatorname{sen}x<1$ y $\operatorname{sen}x \neq 0$

Elevando al cubo, tenemos

$-1<\underbrace{\operatorname{sen}^3x}<1$ y $\underbrace{\operatorname{sen}^3x} \neq 0$

$-1 < \ R \ < 1$ y $R\neq 0$

$\therefore R=\langle -1;1\rangle - \{0\}$

Problema 13

De la siguiente identidad

$$\frac{1+\operatorname{sen}\alpha}{1-\operatorname{sen}\alpha}=(2a-3)(\sec\alpha+\tan\alpha)^2$$

obtenga el valor de a.

Resolución

Primero transformaremos el primer miembro de tal manera que obtengamos la forma del segundo miembro.

$$\frac{1+\operatorname{sen}\alpha}{1-\operatorname{sen}\alpha}=\left(\frac{1+\operatorname{sen}\alpha}{1-\operatorname{sen}\alpha}\right)\times\left(\frac{1+\operatorname{sen}\alpha}{1+\operatorname{sen}\alpha}\right)$$

$$\frac{1+\operatorname{sen}\alpha}{1-\operatorname{sen}\alpha}=\frac{(1+\operatorname{sen}\alpha)^2}{1-\operatorname{sen}^2\alpha}=\frac{(1+\operatorname{sen}\alpha)^2}{\cos^2\alpha}$$

$$\frac{1+\operatorname{sen}\alpha}{1-\operatorname{sen}\alpha}=\left(\frac{1+\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}\right)^2=\left(\frac{1}{\cos\alpha}+\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}\right)^2$$

$$\frac{1+\operatorname{sen}\alpha}{1-\operatorname{sen}\alpha}=(\sec\alpha+\tan\alpha)^2$$

Luego igualamos

$$(\sec\alpha+\tan\alpha)^2=(2a-3)(\sec\alpha+\tan\alpha)^2$$

$$\underbrace{1}(\sec\alpha+\tan\alpha)^2=\underbrace{(2a-3)}(\sec\alpha+\tan\alpha)^2$$

de donde se cumple $2a-3=1$

$\therefore\ a=2$

Problema 14

Halle el valor de K para que el valor de la expresión P sea una constante o no dependa de α.

$$P=(\operatorname{sen}^4\alpha-\cos^4\alpha)^2-K\left(\frac{1+\tan^6\alpha}{\sec^6\alpha}\right)$$

Resolución

Se buscará transformar la expresión P de tal forma que todos los operadores trigonométricos que afectan a α se hallen multiplicados por K o una expresión que contenga a K.

$$P=[(\operatorname{sen}^2\alpha-\cos^2\alpha)\underbrace{(\operatorname{sen}^2\alpha+\cos^2\alpha)}_{1}]^2-K\left(\frac{1+\frac{\operatorname{sen}^6\alpha}{\cos^6\alpha}}{\frac{1}{\cos^6\alpha}}\right)$$

$$P=(\operatorname{sen}^2\alpha-\cos^2\alpha)^2-K\left(\frac{\frac{\cos^6\alpha+\operatorname{sen}^6\alpha}{\cancel{\cos^6\alpha}}}{\frac{1}{\cancel{\cos^6\alpha}}}\right)$$

$$P=\underbrace{\operatorname{sen}^4\alpha+\cos^4\alpha}_{1-2\operatorname{sen}^2\cos^2\alpha}-2\operatorname{sen}^2\alpha\cos^2\alpha-K(\underbrace{\cos^6\alpha+\operatorname{sen}^6\alpha}_{1-3\operatorname{sen}^2\cos^2\alpha})$$

Reduciendo

$$P=1-4\operatorname{sen}^2\alpha\cos^2\alpha-K(1-3\operatorname{sen}^2\alpha\cos^2\alpha)$$

$P=1-K+\operatorname{sen}^2\alpha\cos^2\alpha(3K-4)$ ... (esto es lo que se buscaba, el factor (3K–4) está afectando a todos los operadores trigonométricos que contienen a α)

para que se cumpla la condición del enunciado hacemos: $3K-4=0\Rightarrow K=4/3$

entonces la expresión P queda así $P=1-\underset{4/3}{K}$

$$\Rightarrow P=-\frac{1}{3}$$

(como usted puede apreciar ésta expresión tiene un valor constante o también se dice que P no depende o es independiente de α)

$$\therefore K=\frac{4}{3}$$

Problema 15

Si $\tan\theta+\cot\theta=m$, exprese E en términos de m. $E=\dfrac{\operatorname{sen}^3\theta}{\cos\theta}+\dfrac{\cos^3\theta}{\operatorname{sen}\theta}$

Resolución

Efectuando las fracciones

$$E=\frac{\operatorname{sen}^4\theta+\cos^4\theta}{\cos\theta\operatorname{sen}\theta}=\frac{1-2\operatorname{sen}^2\theta\cos^2\theta}{\cos\theta\operatorname{sen}\theta}$$

$$E=\frac{1}{\cos\theta\operatorname{sen}\theta}-\frac{2\operatorname{sen}^2\theta\cos^2\theta}{\cos\theta\operatorname{sen}\theta}$$

$$E=\sec\theta\csc\theta-2\operatorname{sen}\theta\cos\theta$$

$$E=\sec\theta\csc\theta-2\left(\frac{1}{\sec\theta.\csc\theta}\right)$$

pero recordemos que es válida también

$$\tan\theta+\cot\theta=\sec\theta\csc\theta\,,$$

en consecuencia

$$\sec\theta\csc\theta=m$$

Reemplazando en la expresión E obtenemos

$$E=m-2\left(\frac{1}{m}\right)$$

$$\Rightarrow\ E=m-\frac{2}{m}$$

$$\therefore\ E=\frac{m^2-2}{m}$$

Problema 16

Sabiendo que se cumple la siguiente condición

$$\sqrt{7}\cos\theta+1=\tan^2\theta$$

obtenga el valor de

$$K=\tan^6\theta-\tan^4\theta-\tan^2\theta$$

Resolución

De la condición $\sqrt{7}\cos\theta=\tan^2\theta-1$

Elevando al cuadrado

$$7\cos^2\theta\ =\ \tan^4\theta-2\tan^2\theta+1$$

Luego

$$7\ =\ \frac{1}{\cos^2\theta}(\tan^4\theta-2\tan^2\theta+1)$$

$$7\ =\ \underbrace{\sec^2\theta}(\tan^4\theta-2\tan^2\theta+1)$$

$$7\ =\ (1+\tan^2\theta)(\tan^4\theta-2\tan^2\theta+1)$$

Efectuando en el segundo miembro se obtiene

$$7=\tan^4\theta-2\tan^2\theta+1+\tan^6\theta-2\tan^4\theta+\tan^2\theta$$

Simplificando obtenemos

$$7\ =\ \underbrace{\tan^6\theta-\tan^4\theta-\tan^2\theta}_{K}+1$$

$$\therefore\ \ K=6$$

Problema 17

Dada la condición $\cot x-\cos x=1$

halle el valor de la expresión siguiente

$$W=\cos x+\sec x\csc x-\operatorname{sen}x$$

Resolución

De la condición ordenamos

$$\cot x=1+\cos x\ ;\ \frac{\cos x}{\operatorname{sen}x}=1+\cos x$$

$\left(\text{en el primer miembro se utilizó } \cot x=\dfrac{\cos x}{\operatorname{sen}x}\right)$

$$\Rightarrow\ \ \frac{1}{\operatorname{sen}x}=\frac{1+\cos x}{\cos x}\ ;$$

$\Rightarrow \cos x-\operatorname{sen}x=\operatorname{sen}x\cos x$ ... (β)

Descomponiendo el segundo miembro

$$\frac{1}{\operatorname{sen}x}=\frac{1}{\cos x}+\frac{\cos x}{\cos x}$$

luego

$\csc x=\sec x+1$

$\csc x-\sec x=1$ ... (α)

Para calcular $\sec x.\csc x$, elevamos al cuadrado a (α), obtenemos

$$\underbrace{\csc^2x+\sec^2x}-2\csc x\sec x=1$$

$$\csc^2x.\sec^2x$$

Completando cuadrados

$(\csc x.\sec x)^2-2\csc x\sec x+1=1+1$

$(\csc x\sec x-1)^2=2\Rightarrow\csc x.\sec x=\sqrt{2}+1$ ó $-\sqrt{2}+1$

recordamos que $\csc x\sec x=\tan x+\cot x=m$ y como se vio en el capítulo III, su intervalo de valores es $\langle-\infty;-2]\cup[2;+\infty\rangle$



y debido a que $\sqrt{2}+1\simeq2{,}41$ (verifica el intervalo)

$-\sqrt{2}+1\simeq0{,}41$ (no verifica el intervalo)

En consecuencia se elegirá $\csc x.\sec x=\sqrt{2}+1$

Reemplazando en la expresión W

$$W=\cos x+\sqrt{2}+1-\operatorname{sen}x$$

$$W=\underbrace{\cos x-\operatorname{sen}x}_{\operatorname{sen}x\cos x\ ...\ \text{de }(\beta)}+\sqrt{2}+1$$

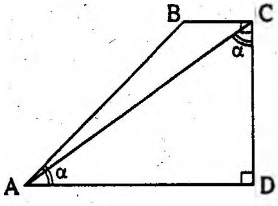
$$\Rightarrow\ W=\frac{1}{\csc x\sec x}+\sqrt{2}+1\ =\ \frac{1}{\sqrt{2}+1}+\sqrt{2}+1$$

$$\therefore\ \ W=2\sqrt{2}$$

Problema 18

En el gráfico mostrado, AB = AD

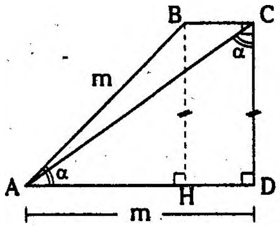
Halle $\sec\alpha - \cos\alpha$



(a)

Resolución

En la figura 5.2(b) trazamos $BH \perp AD$



(b)

Figura 5.2

Sea AB = AD = m

luego relacionemos los lados

En el $\triangle$ADC: CD = $m\cot\alpha$

En $\triangle$ABH: BH = $m\,\text{sen}\alpha$

pero CD = BH

$\Rightarrow \not{m}\cot\alpha = \not{m}\,\text{sen}\alpha$

$\dfrac{\cos\alpha}{\text{sen}\alpha} = \text{sen}\alpha \Rightarrow \cos\alpha = \text{sen}^2\alpha$

$\cos\alpha = 1 - \cos^2\alpha$

$1 = \dfrac{1}{\cos\alpha} - \dfrac{\cos^{\not 2}\alpha}{\not{\cos}\alpha} = \sec\alpha - \cos\alpha$

$\therefore \sec\alpha - \cos\alpha = 1$

Problema 19

Siendo $|\tan x + \cot x| = 3$

además $x \in \left\langle -\dfrac{3\pi}{4} ; -\dfrac{\pi}{2} \right\rangle$

calcule $E = \text{sen}^3 x - \cos^3 x$

Resolución

Apliquemos diferencia de cubos, en la expresión E; es decir $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2+ab+b^2)$

entonces

$E = (\text{sen}x - \cos x)(1+\text{sen}x\cos x) \quad ... (\lambda)$

De la condición $\tan x+\cot x = 3$, porque $x \in$ IIIC

como $\tan x+\cot x=\sec x\csc x$

también $\sec x\csc x = 3 \Rightarrow \text{sen}x\cos x= \dfrac{1}{3} ...(w)$

A partir de esta expresión formaremos

$\text{sen}x - \cos x$

así en w, multiplicando por (–2) y sumando 1

$1 - 2\text{sen}x\cos x = 1 - 2\left(\dfrac{1}{3}\right)$

$\underset{\text{sen}^2x+\cos^2x}{\underline{1}} - 2\text{sen}x\cos x = \dfrac{1}{3}$

$(\text{sen}x - \cos x)^2 = \dfrac{1}{3} \quad \left(\begin{array}{c}\text{se utilizó identidad algebraica} \\ a^2 + b^2 - 2ab = (a-b)^2\end{array}\right)$

Analizando en la C.T. según el dato

tomando la raíz cuadrada a ambos miembros

$\sqrt{(\text{sen}x - \cos x)^2} = \sqrt{\dfrac{1}{3}}$

Efectuando

$\Rightarrow |\text{sen}x - \cos x| = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \quad ...(\gamma)$

(se utilizó $\sqrt{A^2} = |A|$)

Analizando en la C.T según el dato: $-\dfrac{3\pi}{4} < x < -\dfrac{\pi}{2}$

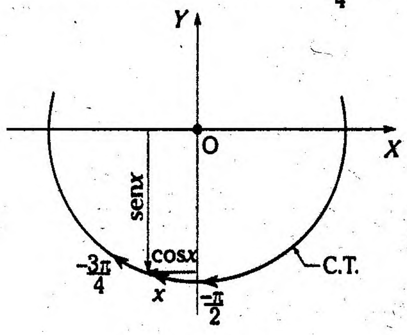


Figura 5.3

Tenemos sen$x$<cos$x$

$\Rightarrow$ sen$x$ − cos x < 0

$\Rightarrow$ |sen x − cos x| = −(sen x − cos x)

Luego en γ se tiene

$$\operatorname{sen}x-\cos x=-\frac{1}{\sqrt{3}}\quad \text{....}(\phi)$$

Reemplazando (w) ∧ (ϕ) en (λ)

$$E=\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)$$

$$\therefore\quad E=\frac{-4\sqrt{3}}{9}$$

Problema 20

Si $\sqrt[3]{\operatorname{sen}x}+\sqrt[3]{\cot x}=\sqrt[3]{\tan x}$

sen$x$+cot$x$−tan$x$=m

Halle sen$x$ en términos de m

Resolución

Si a+b − c=0

entonces $a^3+b^3-c^3=-3abc$

En el problema

$$\sqrt[3]{\operatorname{sen}x}+\sqrt[3]{\cot x}-\sqrt[3]{\tan x}=0$$

Entonces

$$(\sqrt[3]{\operatorname{sen}x})^3+(\sqrt[3]{\cot x})^3-(\sqrt[3]{\tan x})^3$$

$$=-3(\sqrt[3]{\operatorname{sen}x})\underbrace{(\sqrt[3]{\cot x})(\sqrt[3]{\tan x})}_{1}$$

Es decir

$$\underbrace{\operatorname{sen}x+\cot x-\tan x}_{m}=-3\sqrt[3]{\operatorname{sen}x}$$

$$\Rightarrow\ \sqrt[3]{\operatorname{sen}x}=-\frac{m}{3}$$

Elevando al cubo se tiene que $\operatorname{sen}x=-\dfrac{m^3}{27}$

Problema 21

Halle una relación independiente de x a partir de las siguientes condiciones

$\sec^4x+\tan^4x=m$ ... (*i*)

$\tan^2x+\tan^4x=n$ ... (*ii*)

Resolución

De (*ii*) se tiene $\tan^2x(\underbrace{1+\tan^2x}_{\sec^2x})=n$

$$\Rightarrow\ \tan^2x\sec^2x=n$$

De (i) $\sec^2x.\underbrace{\sec^2x}_{1+\tan^2x}+\tan^2x.\underbrace{\tan^2x}_{\sec^2x-1}=m$

Efectuando el primer miembro

$$\sec^2x+\sec^2x\tan^2x+\tan^2x\sec^2x-\tan^2x=m$$

Reduciendo

$$\Rightarrow 2\underbrace{\sec^2x.\tan^2x}_{n}+\underbrace{\sec^2x-\tan^2x}_{1}=m$$

Luego 2(n) + 1 = m

$\therefore$ m − 2n= 1 (esta relación es independiente de x o también se dice que la variable x se ha eliminado)

Problema 22

Elimine x a partir de las siguientes condiciones:

csc$x$ − sen$x$ = m ... (1)

sec$x$ − cos$x$ = n ... (2)

tan$x$− cot$x$ = p ... (3)

Resolución

La ecuación (1) lo expresamos en términos de senos y cosenos

$$\frac{1}{\operatorname{sen}x}-\operatorname{sen}x=m\ \Rightarrow\ \frac{1-\operatorname{sen}^2x}{\operatorname{sen}x}=m$$

luego $\dfrac{\cos^2x}{\operatorname{sen}x}=m$ ....(4)

asimismo de (2) todo en términos de senos y cosenos.

tenemos $\dfrac{\operatorname{sen}^2x}{\cos x}=n$ ....(5)

multiplicando miembro a miembro (4) y (5)

cos$x$.sen$x$=m.n ...(α)

La condición (3) elevamos al cuadrado

$$\tan^2x+\cot^2x-\underbrace{2\tan x\cot x}_{1}=p^2$$

$$\Rightarrow\ \tan^2x+\cot^2x=p^2+2$$

$$\Rightarrow \underbrace{\tan^2x+\cot^2x+2}_{(\tan x+\cot x)^2}=p^2+2+2$$

$$\Rightarrow \underbrace{(\tan x+\cot x)^2}_{\sec x.\csc x}=p^2+4$$

$$\left(\frac{1}{\text{sen}x.\cos x}\right)^2=p^2+4\ ...(\beta)$$

Sustituyendo (α) en (β)

$$\left(\frac{1}{mn}\right)^2=p^2+4$$

$$\therefore\ \frac{1}{m^2n^2}-p^2=4 \qquad \text{(se ha eliminado } x\text{)}$$

Problema 23

Elimine θ a partir de las siguientes condiciones

$a\tan^2\theta+\text{sen}^2\theta=1\ ...\ (i)$

$b\sec^2\theta-\csc^2\theta=0\ ...\ (ii)$

Resolución

De la expresión (ii) se tiene $b\sec^2\theta=\csc^2\theta$ pasando a senos y cosenos

$$b\frac{1}{\cos^2\theta}=\frac{1}{\text{sen}^2\theta} \Rightarrow b=\frac{\cos^2\theta}{\text{sen}^2\theta} \Rightarrow b=\cot^2\theta$$

De (i)

$$a.\tan^2\theta = 1-\text{sen}^2\theta \Rightarrow a.\frac{1}{\cot^2\theta}=1-\frac{1}{\csc^2\theta}$$

luego

$$\frac{a}{\cot^2\theta}=1-\frac{1}{1+\cot^2\theta}\ ...\left(\begin{array}{l}\text{se utilizó la identidad}\\ \csc^2\theta=1+\cot^2\theta\end{array}\right)$$

cambiamos a $\cot^2\theta$ por b

$$\frac{a}{b^2}=1-\frac{1}{1+b^2}$$

Ordenando

$a(1+b^2)=b^4$ ... (está relación no depende de θ, por lo que afirmamos que la variable se ha eliminado)

Problema 24

Dada la condición $a\text{sen}x+b\cos x=c$

además $a^2+b^2=c^2$

exprese P en términos de a,b y c, siendo

$P=a\cos x+b\text{sen}x$

Resolución

Buscaremos el valor de una de las razones trigonométricas, de la condición tenemos

$a\text{sen}x=c-b\cos x$ ....(1)

Elevando al cuadrado

$$a^2\underbrace{\text{sen}^2x}_{1-\cos^2x}=c^2+b^2\cos^2x-2bc\cos x$$

Ordenando la ecuación cuadrática queda

$$(a^2+b^2)\cos^2x-2bc\cos x+c^2-a^2=0\ ....(2)$$

Como

$a^2+b^2=c^2 \Rightarrow c^2-a^2=b^2$ ... (3)

Reemplazando (3) en (2)

$c^2\cos^2x-2bc\cos x+b^2=0$

Trinomio cuadrado perfecto

$(c\cos x-b)^2=0 \Rightarrow c\cos x-b=0$

Despejando $\cos x=\frac{b}{c}$

Sustituyendo en (1) obtenemos

$$a\text{sen}x=c-b\left(\frac{b}{c}\right)\Rightarrow a\text{sen}x=\frac{\overbrace{c^2-b^2}^{a^2}}{c}$$

Simplificando $\text{sen}x=\frac{a}{c}$

Reemplazando senx y cosx en la expresión P

$$P=a\left(\frac{b}{c}\right)+b\left(\frac{a}{c}\right)$$

$$\therefore\ P=\frac{2ab}{c}$$

Observación

si $a\text{sen}x+b\cos x=c$ y $a^2+b^2=c^2$

entonces se cumple: $\text{sen}x=\frac{a}{c}$, $\cos x=\frac{b}{c}$

Teniendo en cuenta esta última observación podemos entender los siguientes ejemplos

a) Si $3\operatorname{sen}\alpha+4\cos\alpha=5$

y como se verifica $3^2+4^2=5^2$

$$\Rightarrow \operatorname{sen}\alpha=\frac{3}{5} \text{ y } \cos\alpha=\frac{4}{5}$$

b) Si $-5\operatorname{sen}\alpha-12\cos\alpha=13$

y como se verifica $(-5)^2+(-12)^2=(13)^2$

$$\Rightarrow \operatorname{sen}\alpha=-\frac{5}{13} \text{ y } \Rightarrow \cos\alpha=-\frac{12}{13}$$

c) Si $\operatorname{sen}\alpha-2\cos\alpha=\sqrt{5}$

y como se verifica $(1)^2+(-2)^2=(\sqrt{5})^2$

$$\Rightarrow \operatorname{sen}\alpha=\frac{1}{\sqrt{5}} \quad \text{y} \quad \cos\alpha=\frac{-2}{\sqrt{5}}$$

Racionalizando

$$\operatorname{sen}\alpha=\frac{\sqrt{5}}{5} \wedge \cos\alpha=\frac{-2\sqrt{5}}{5}$$

Problema 25

Si $k\cos\theta+\frac{1}{k}\operatorname{sen}\theta=\sqrt{7}$

además $\left|k+\frac{1}{k}\right|=3$

calcule $A=\operatorname{sen}^4\theta+\cos^4\theta$

Resolución

El dato lo elevamos al cuadrado

$$k^2+\frac{1}{k^2}+2k\frac{1}{k}=9 \Rightarrow k^2+\frac{1}{k^2}=7$$

Cumple la observación anterior, entonces afirmamos que

$$\cos\theta=\frac{k}{\sqrt{7}} \quad , \quad \operatorname{sen}\theta=\frac{1}{k\sqrt{7}}$$

Nos piden $A=1-2\cos^2\theta\operatorname{sen}^2\theta$

Reemplazando valores

$$A=1-2\left(\frac{k}{\sqrt{7}}\right)^2\left(\frac{1}{k\sqrt{7}}\right)^2=1-2\left(\frac{1}{7}\right)^2$$

$$\therefore \ A=\frac{47}{49}$$

Problema 26

Dada la siguiente ecuación

$$\frac{\operatorname{sen}^4\alpha}{a}+\frac{\cos^4\alpha}{b}=\frac{1}{a+b}$$

Entonces el valor de $\frac{\operatorname{sen}^8\alpha}{a^3}+\frac{\cos^8\alpha}{b^3}$

Resolución

Efectuando en la condición dada

$$\left(\frac{a+b}{a}\right)\operatorname{sen}^4\alpha+\left(\frac{a+b}{b}\right)\cos^4\alpha=1$$

cambiando a la unidad por $(\operatorname{sen}^2\alpha+\cos^2\alpha)^2$

$$\operatorname{sen}^4\alpha+\frac{b}{a}\operatorname{sen}^4\alpha+\frac{a}{b}\cos^4\alpha+\cos^4\alpha=(\operatorname{sen}^2\alpha+\cos^2\alpha)^2$$

$$\Rightarrow \cancel{\operatorname{sen}^4\alpha}+\cancel{\cos^4\alpha}+\frac{b}{a}\operatorname{sen}^4\alpha+\frac{a}{b}\cos^4\alpha=$$

$$\cancel{\operatorname{sen}^4\alpha}+\cancel{\cos^4\alpha}+2\operatorname{sen}^2\alpha\cos^2\alpha$$

Ordenando en el primer miembro, identificamos un trinomio cuadrado

$$\frac{b}{a}\operatorname{sen}^4\alpha+\frac{a}{b}\cos^4\alpha-2\operatorname{sen}^2\alpha\cos^2\alpha=0$$

$$\left(\sqrt{\frac{b}{a}}\operatorname{sen}^2\alpha-\sqrt{\frac{a}{b}}\cos^2\alpha\right)^2=0$$

De donde $\sqrt{\frac{b}{a}}\operatorname{sen}^2\alpha=\sqrt{\frac{a}{b}}\cos^2\alpha$

$$\Rightarrow \frac{\operatorname{sen}^4\alpha}{a^2}=\frac{\cos^4\alpha}{b^2}=k$$

Reemplazando en ecuación original

$$a.\frac{\operatorname{sen}^4\alpha}{a^2}+b.\frac{\cos^4\alpha}{b^2}=\frac{1}{a+b}$$

$$a(k)+b(k)=\frac{1}{a+b} \qquad \Rightarrow k=\frac{1}{(a+b)^2}$$

En la incógnita

$$\frac{\operatorname{sen}^8\alpha}{a^3}+\frac{\cos^8\alpha}{b^3}=a\left(\frac{\operatorname{sen}^4\alpha}{a^2}\right)^2+b\left(\frac{\cos^4\alpha}{b^2}\right)^2$$

$$\frac{\operatorname{sen}^8\alpha}{a^3}+\frac{\cos^8\alpha}{b^3}=a(k)^2+b(k)^2$$

$$\frac{\operatorname{sen}^8\alpha}{a^3}+\frac{\cos^8\alpha}{b^3}=k^2(a+b)$$

$$\frac{\operatorname{sen}^8\alpha}{a^3}+\frac{\cos^8\alpha}{b^3}=\frac{1}{(a+b)^4}(a+b)$$

$$\therefore \frac{\operatorname{sen}^8\alpha}{a^3}+\frac{\cos^8\alpha}{b^3}=\frac{1}{(a+b)^3}$$

Ejercicios

I. Demuestre las siguientes identidades

1. $\operatorname{sen}\theta\tan\theta+\cos\theta=\sec\theta$
2. $(\tan^2\theta+1)\operatorname{sen}^2\theta=\tan^2\theta$
3. $\sec^4\theta-\tan^4\theta=1+2\tan^2\theta$
4. $\cos^4\theta-\operatorname{sen}^4\theta=1-2\operatorname{sen}^2\theta$
5. $\tan^2\theta-\operatorname{sen}^2\theta=\tan^2\theta\operatorname{sen}^2\theta$
6. $\dfrac{\cos\theta}{\sec\theta+\tan\theta}=1-\operatorname{sen}\theta$
7. $\dfrac{1}{\sec\theta-\tan\theta}=\sec\theta+\tan\theta$
8. $\dfrac{1+\cot^2\theta}{\cot^2\theta}=\sec^2\theta$
9. $\dfrac{\sec\theta}{\tan\theta+\cot\theta}=\operatorname{sen}\theta$
10. $\dfrac{2}{\operatorname{sen}^2\theta}=\dfrac{1}{1+\cos\theta}+\dfrac{1}{1-\cos\theta}$
11. $\dfrac{\cos\theta}{1-\sec\theta}+\dfrac{\sec\theta}{1-\cos\theta}=\sec\theta+\cos\theta+1$
12. $\dfrac{\tan\theta-\operatorname{sen}\theta}{\operatorname{sen}^3\theta}=\dfrac{\sec\theta}{1+\cos\theta}$
13. $\cot\theta+\cos\theta=\dfrac{1+\csc\theta}{\sec\theta}$
14. $\dfrac{\operatorname{sen}\theta}{1+\cos\theta}=\dfrac{1-\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}$
15. $\dfrac{1+\operatorname{sen}\theta}{1-\operatorname{sen}\theta}=(\sec\theta+\tan\theta)^2$
16. $\dfrac{\tan\theta-\cos\theta\cot\theta}{\csc\theta}=\dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\cot\theta}-\dfrac{\cos\theta}{\sec\theta}$
17. $\dfrac{\tan x-\cot y}{\cot x-\tan y}=\dfrac{-\cot y}{\cot x}$
18. $(1+\sec x-\tan x)^2=2(1+\sec x)(\sec x-\tan x)$

II. Halle un equivalente más simple para cada una de las siguientes expresiones trigonométricas.

19. $\operatorname{sen}x+\dfrac{\cos x}{\tan x}$
20. $\dfrac{\sec x\operatorname{sen}^2x+\csc x\cos^2x}{\operatorname{sen}x+\cos x}$
21. $\dfrac{\operatorname{sen}x}{\csc x}+\dfrac{\cos x}{\sec x}+\dfrac{\tan x}{\cot x}$
22. $(\cos x-\operatorname{sen}x\cos x)\sec x+\tan x)$
23. $\tan x+\dfrac{1-\cos x}{\tan x}+\dfrac{\cos x-1}{\operatorname{sen}x\cos x}$
24. $\dfrac{\sec x\csc x-\tan x}{\sec x\csc x-\cot x}$
25. $(1-\operatorname{sen}x-\cos x)(1+\operatorname{sen}x+\cos x)$
26. $\dfrac{1}{\dfrac{1}{\csc x-\cot x}-\dfrac{1}{\tan x}}$
27. $\tan x+\dfrac{\sec x}{\operatorname{sen}x}(2\cos^2x-1)$
28. $\dfrac{(1-\operatorname{sen}x+\cos x)^2}{(\operatorname{sen}x+\tan x)(\cot x-\cos x)}$

Respuestas

19. $\csc x$
20. $\sec x\csc x-1$
21. $\sec^2x$
22. $\cos^2x$
23. $\operatorname{sen}x$
24. $\cot^2x$
25. $-2\operatorname{sen}x\cos x$
26. $\operatorname{sen}x$
27. $\cot x$
28. 2

IDENTIDADES DE LA SUMA Y DIFERENCIA DE DOS ARCOS (DOS ÁNGULOS)

Básicamente la utilidad de estas identidades radica en que con ellas se puede calcular razones trigonométricas de arcos o ángulos desconocidos a partir de arcos o ángulos cuyas razones trigonométricas sean conocidas. Para entender un poco más al respecto preste atención a lo siguiente: Del Capítulo II sabemos que se conocen todas las razones trigonométricas de los ángulos 53° y 45°, pero con estos ángulos es posible generar nuevos ángulos como son: 98°, 8° y –8° mediante operaciones de adición y sustracción, esto es:

98° se genera como: 53° + 45°
8° se genera como: 53° – 45°
– 8° se genera como: 45° – 53°

Puesto que se conocen todas las razones trigonométricas de 45° y 53°, indicaremos que sí es posible calcular todas las razones trigonométricas de estos ángulos (98°, 8°, –8°), pero para ello es necesario conocer el siguiente grupo de identidades para la suma y diferencia de arcos, las cuales se pueden expresar de la siguiente manera:

seno de la suma y diferencia de dos arcos	$\operatorname{sen}(\alpha+\theta)=\operatorname{sen}\alpha\cos\theta+\cos\alpha\operatorname{sen}\theta$	...(1)
	$\operatorname{sen}(\alpha-\theta)=\operatorname{sen}\alpha\cos\theta-\cos\alpha\operatorname{sen}\theta$	...(2)
coseno de la suma y diferencia de dos arcos	$\cos(\alpha+\theta)=\cos\alpha\cos\theta-\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\theta$	...(3)
	$\cos(\alpha-\theta)=\cos\alpha\cos\theta+\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\theta$	...(4)
tangente de la suma y diferencia de dos arcos	$\tan(\alpha+\theta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\theta}{1-\tan\alpha\tan\theta}$	...(5)
	$\tan(\alpha-\theta)=\dfrac{\tan\alpha-\tan\theta}{1+\tan\alpha\tan\theta}$	...(6)

Las demostraciones de las identidades anteriores las realizaremos a partir de la demostración de la siguiente identidad: $\cos(\alpha-\theta)=\cos\alpha\cos\theta+\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\theta$

Para la identidad anterior, desarrollaremos la demostración de Cauchy, basado en el concepto de distancia entre dos puntos, consideremos dos arcos en posición normal α y θ en una circunferencia trigonométrica como se muestra en la figura 5.4 (a), donde $m\widehat{PQ}=\alpha-\theta$. En la figura 5.4 (b) se muestra un arco AM en posición normal cuya medida es $\alpha-\theta$

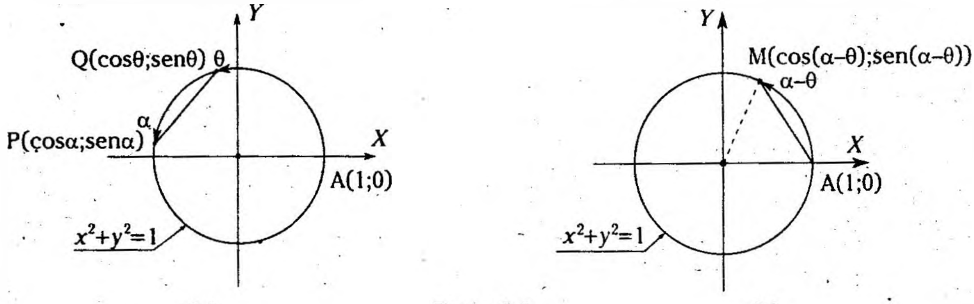


Figura 5.4

Notemos de las figuras anteriores que los segmentos $\overline{PQ}$ y $\overline{AM}$ tienen la misma longitud, es decir $PQ = AM$.

De la figura 5.4 (a) por distancia entre dos puntos tenemos

$$PQ=\sqrt{(\cos\alpha-\cos\theta)^2+(\operatorname{sen}\alpha-\operatorname{sen}\theta)^2}$$

efectuando

$$PQ=\sqrt{2-2(\cos\alpha\cos\theta+\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\theta} \quad ...(1)$$

asimismo

$$AM = \sqrt{(1-\cos(\alpha-\theta))^2+(0-\operatorname{sen}(\alpha-\theta))^2}$$

simplificando

$$AM = \sqrt{2-2\cos(\alpha-\theta)} \quad ...(2)$$

igualando (1) y (2) obtenemos

$$2-2\cos(\alpha-\theta)=2-2(\cos\alpha\cos\theta+\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\theta)$$

de donde

$$\boxed{\cos(\alpha-\theta)=\cos\alpha\cos\theta+\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\theta}$$

De esta manera queda demostrada la identidad para el coseno de la diferencia de dos arcos, donde es válida para cualquier α y θ real.

Utilizando la identidad demostrada arriba, tenemos

1. $\cos(\alpha+\theta)=\cos(\alpha-(-\theta))$

   $\cos(\alpha+\theta)=\cos\alpha\underbrace{\cos(-\theta)}+\operatorname{sen}\alpha\underbrace{\operatorname{sen}(-\theta)}$

   $\cos(\alpha+\theta)=\cos\alpha\cos\theta+\operatorname{sen}\alpha(-\operatorname{sen}\theta)$

   luego $\boxed{\cos(\alpha+\theta)=\cos\alpha\cos\theta-\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\theta}$

2. $\operatorname{sen}(\alpha+\theta)=\cos\left[\frac{\pi}{2}-(\alpha+\theta)\right]$

   $\operatorname{sen}(\alpha+\theta)=\cos\left[\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)-\theta\right]$

   $\operatorname{sen}(\alpha+\theta)=\underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}\cos\theta+\underbrace{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}\operatorname{sen}\theta$

   $\operatorname{sen}(\alpha+\theta)=\operatorname{sen}\alpha\cos\theta+\cos\alpha\operatorname{sen}\theta$

   luego $\boxed{\operatorname{sen}(\alpha+\theta)=\operatorname{sen}\alpha\cos\theta+\cos\alpha\operatorname{sen}\theta}$

3. $\operatorname{sen}(\alpha-\theta)=\operatorname{sen}[\alpha+(-\theta)]$

   $\operatorname{sen}(\alpha-\theta)=\operatorname{sen}\alpha\underbrace{\cos(-\theta)}+\cos\alpha\underbrace{\operatorname{sen}(-\theta)}$

   $\operatorname{sen}(\alpha-\theta)=\operatorname{sen}\alpha\cos\theta+\cos\alpha(-\operatorname{sen}\theta)$

   efectuando obtenemos

   $\operatorname{sen}(\alpha-\theta)=\operatorname{sen}\alpha\cos\theta-\cos\alpha\operatorname{sen}\theta$

4. $\tan(\alpha+\theta)=\dfrac{\operatorname{sen}(\alpha+\theta)}{\cos(\alpha+\theta)}$

   $\tan(\alpha+\theta)=\dfrac{\operatorname{sen}\alpha\cos\theta+\cos\alpha\operatorname{sen}\theta}{\cos\alpha\cos\theta-\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\theta}$

   dividiendo numerador y denominador por $\cos\alpha\cos\theta$

$$\tan(\alpha+\theta)=\frac{\dfrac{\operatorname{sen}\alpha\cos\theta+\cos\alpha\operatorname{sen}\theta}{\cos\alpha\cos\theta}}{\dfrac{\cos\alpha\cos\theta-\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\theta}{\cos\alpha\cos\theta}}=\frac{\dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}+\dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}}{1-\dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}\dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}}$$

entonces $\boxed{\tan(\alpha+\theta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\theta}{1-\tan\alpha\tan\theta}}$

Se deja para el lector la demostración de la siguiente identidad.

$$\boxed{\tan(\alpha-\theta)=\frac{\tan\alpha-\tan\theta}{1+\tan\alpha\tan\theta}}$$

Veamos algunos desarrollos

- $\operatorname{sen}(20^\circ+10^\circ)=\operatorname{sen}20^\circ\cos10^\circ+\cos20^\circ\operatorname{sen}10^\circ$
- $\operatorname{sen}(4x-x)=\operatorname{sen}4x\cos x-\cos4x\operatorname{sen}x$
- $\cos(45^\circ+37^\circ)=\cos45^\circ\cos37^\circ-\operatorname{sen}45^\circ\operatorname{sen}37^\circ$
- $\cos(53^\circ-30^\circ)=\cos53^\circ\cos30^\circ+\operatorname{sen}53^\circ\operatorname{sen}30^\circ$
- $\tan(16^\circ+15^\circ)=\dfrac{\tan16^\circ+\tan15^\circ}{1-\tan16^\circ\tan15^\circ}$
- $\tan(30^\circ-14^\circ)=\dfrac{\tan30^\circ-\tan14^\circ}{1+\tan30^\circ\tan14^\circ}$
- $\operatorname{sen}(\alpha+\beta+\theta)=\operatorname{sen}(\alpha+\beta)\cos\theta+\operatorname{sen}\theta\cos(\alpha+\beta)$
- $\cos(\alpha+\beta+\theta)=\cos(\alpha+\beta)\cos\theta-\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}(\alpha+\beta)$
- $\tan(\alpha+\beta+\theta)=\dfrac{\tan(\alpha+\beta)+\tan\theta}{1-\tan(\alpha+\beta).\tan\theta}$

De igual forma, el lector tiene que estar en la capacidad de distinguir los desarrollos de las identidades anteriormente indicadas; para ello sigamos con otros ejercicios

- $\text{sen}10°\cos5°+\cos10°\text{sen}5° = \textbf{sen(10°+5°)} = \text{sen}15°$
- $\cos3x\cos x - \text{sen}3x\,\text{sen}x = \textbf{cos(3x+x)} = \cos4x$
- $\text{sen}5\theta\cos2\theta - \cos5\theta\,\text{sen}2\theta = \textbf{sen(5θ-2θ)} = \textbf{sen3θ}$
- $\cos9°\cos4°+\text{sen}9°\text{sen}4° = \textbf{cos(9°-4°)} = \cos5°$
  pero también
  $\cos9°\cos4° + \text{sen}9°\text{sen}4° = \cos4°\cos9° + \text{sen}4°\text{sen}9° = \textbf{cos(4°-9°)} = \cos(-5°) = \cos5°$
- Las demostraciones de las identidades $\cos(-\theta) = \cos\theta \wedge \text{sen}(-\theta) = -\text{sen}\theta$ se desarrollarán más adelante.

Ejemplos de aplicación

1. Determine el valor exacto de sen75°

Resolución

La manera para resolver este ejemplo es buscar descomponer 75° como una suma o diferencia de ángulos notables. Según lo expuesto notamos que

75°=74°+1°
(no conviene porque 1° no es notable)
75°=81° – 6°
(no conviene porque ninguno es notable)
75°=45°+30°
(es conveniente porque ambos 45° y 30° son notables)

luego, consideremos a 75° como la suma de los ángulos 30° y 45°, entonces

sen75°= sen(45°+30°), de la identidad (1) tenemos

$$\text{sen}75° = \text{sen}45°\cos30° + \cos45°\text{sen}30°$$

$$\text{sen}75° = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\therefore\ \text{sen}75° = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

2. Determine el valor de cos105°

Resolución

De igual forma que en el ejemplo anterior, se buscará descomponer 105° como una suma o diferencia de dos ángulos notables y la opción elegida es 105° = 60°+45°, por lo que podemos plantear lo siguiente

$$\cos105° = \cos(60°+45°),$$

de la identidad (3) tenemos

$$\cos105° = \cos60°\cos45° - \text{sen}60°\text{sen}45°$$

$$\cos105° = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\therefore\ \cos105° = -\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

3. Calcule el valor aproximado de cos16°

Resolución

cos16° ≈ cos(53°– 37°); de la identidad (4)

$$\cos16° \approx \cos53°\cos37°+\text{sen}53°\text{sen}37°$$

$$\cos16° \approx \frac{3}{5}\cdot\frac{4}{5}+\frac{4}{5}\cdot\frac{3}{5}$$

$$\therefore\ \cos16° \approx 24/25$$

4. Determine el valor de $\text{sen}\frac{\pi}{12}$

Resolución

como $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$,

se tiene $\text{sen}\frac{\pi}{12} = \text{sen}\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right)$;

de la identidad (2) tenemos

$$\text{sen}\frac{\pi}{12} = \text{sen}\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4} - \cos\frac{\pi}{3}\text{sen}\frac{\pi}{4}$$

$$\text{sen}\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\therefore\ \text{sen}\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

5. Calcule el valor aproximado de tan8°

Resolución

El ángulo de 8° se puede escribir como 53° – 45°

tan8° = tan(53° – 45°) ; por la identidad (6)

$$\tan8° = \frac{\tan53° - \tan45°}{1+\tan53°\tan45°} = \frac{\frac{4}{3}-1}{1+\frac{4}{3}\times1}$$

Efectuando

$$\tan8° = \frac{1}{7}$$

6) Determine el valor de $\cot\dfrac{\pi}{12}$

Resolución

De la propiedad de arcos complementarios

tenemos $\dfrac{\pi}{12}=\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{5\pi}{12}$

entonces $\cot\dfrac{\pi}{12}=\tan\dfrac{5\pi}{12}=\tan\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi}{6}\right)$

Por la identidad (5)

$$\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\tan\frac{\pi}{4}+\tan\frac{\pi}{6}}{1-\tan\frac{\pi}{4}\tan\frac{\pi}{6}}=\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{3}}{1-\frac{\sqrt{3}}{3}}$$

Racionalizando el denominador

$$\cot\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{3+\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}}\times\frac{(3+\sqrt{3})}{(3+\sqrt{3})}=2+\sqrt{3}$$

Nota

Según los ejemplos desarrollados, es necesario recordar las razones trigonométricas de 15°, 16°, y 18°; entonces formemos los siguientes triángulos

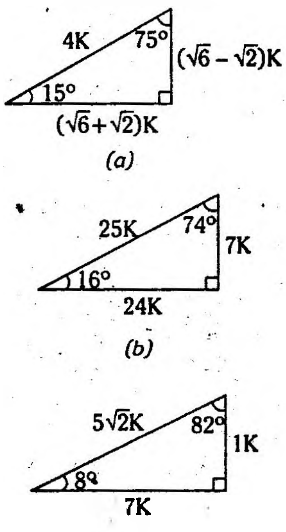


Figura 5.5

Teorema

Si a y b son constantes reales, con x, variable, se cumple

$$a\,\text{sen}x+b\cos x=\sqrt{a^2+b^2}\,\text{sen}(x+\theta)$$

tal que $\cos\theta=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\ \wedge\ \text{sen}\theta=\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$

Observación

Del teorema mencionado se concluye

$$\underbrace{-\sqrt{a^2+b^2}}_{f\ \text{mínimo}}\le\underbrace{a\,\text{sen}x+b\cos x}_{f}\le\underbrace{\sqrt{a^2+b^2}}_{f\ \text{máximo}}$$

Demostración

$a\,\text{sen}x+b\cos x=\sqrt{a^2+b^2}\,\text{sen}(x+\theta)$

$a\,\text{sen}x+b\cos x=\sqrt{a^2+b^2}(\text{sen}x\cos\theta+\cos x\,\text{sen}\theta)$

$a\,\text{sen}x+b\cos x=\sqrt{a^2+b^2}\left(\text{sen}x\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}+\cos x\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$

$a\,\text{sen}x+b\cos x=a\,\text{sen}x+b\cos x$

esto es lo que se buscaba demostrar

Ejemplos

1. $\text{sen}\,x+\sqrt{3}\cos x=\sqrt{1^2+\sqrt{3}^2}\,\text{sen}(x+\theta)=2\text{sen}(x+\theta)$

   $\cos\theta=\dfrac{1}{2}\ \wedge\ \text{sen}\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

   donde

   $\cos\theta=\dfrac{1}{2}\ \wedge\ \text{sen}\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

   $\Rightarrow\ \theta=\ldots,\,-300;\,60°;\,420°;\,\ldots\ldots$

   es conveniente escoger $\theta=60°$

   $\therefore\ \text{sen}x+\sqrt{3}\cos x=2\text{sen}(x+60°)$

2. $\text{sen}\,x-\cos x=\sqrt{1^2+(-1)^2}\,\text{sen}(x+\theta)$

   $\text{sen}\,x-\cos x=\sqrt{2}\,\text{sen}(x+\theta)$

   donde

   $\cos\theta=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\ \wedge\ \text{sen}\theta=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

   $\Rightarrow\ \theta=\ldots,\,-45°;\,315°;\,675°;\,\ldots\ldots$

   es conveniente escoger $\theta=-45°$

   $\therefore\ \text{sen}x-\cos x=\sqrt{2}\,\text{sen}(x-45°)$

Otra forma de llegar a este tipo de identidades $\text{sen}x+\sqrt{3}\cos x = 2\text{sen}(x+60°)$ es mediante los pasos siguientes:
Primero: el coeficiente del seno tiene que ser uno.
Segundo: el coeficiente del coseno tiene que ser reemplazado por una tangente de un ángulo notable.
Tercero: expresarlo en términos de senos y cosenos.

Ejemplo 1

$R = \sqrt{3}\,\text{sen}\,x+\cos x$

1ro: $R = \sqrt{3}\left(\text{sen}\,x+\frac{1}{\sqrt{3}}\cos x\right)$

2do: $R = \sqrt{3}(\text{sen}\,x+\tan 30°\cos x)$

3ro: $R = \sqrt{3}\left(\frac{\text{sen}\,x}{1}+\frac{\text{sen}\,30°}{\cos 30°}\cos x\right)$

$$R= \sqrt{3}\left(\frac{\overbrace{\text{sen}\,x\cos 30°+\text{sen}\,30°\cos x}^{\text{sen}(x+30°)}}{\cos 30°}\right)$$

reemplazando

$$\Rightarrow R = \sqrt{3}\frac{\text{sen}(x+30°)}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

reduciendo: $R = 2\text{sen}(x+30°)$

$\therefore\ \sqrt{3}\,\text{sen}\,x+\cos x = 2\text{sen}(x+30°)$

Ejemplo 2

$M = \sqrt{3}\,\text{sen}x-\cos x$

de igual manera que el ejemplo anterior

1ro.: $M=\sqrt{3}\left(\text{sen}\,x-\underbrace{\frac{1}{\sqrt{3}}}\cos x\right)$

2do.: $M=\sqrt{3}(\text{sen}\,x-\tan 30°\cos x)$

3ro.: $M=\sqrt{3}\left(\text{sen}\,x-\frac{\text{sen}\,30°}{\cos 30°}\cos x\right)$

efectuando

$$M=\sqrt{3}\left(\frac{\overbrace{\text{sen}\,x\cos 30°-\text{sen}\,30°\cos x}^{\text{sen}(x-30°)}}{\cos 30°}\right)$$

luego

$$M=\sqrt{3}\frac{\text{sen}(x-30°)}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

reduciendo

$M = 2\text{sen}(x-30°)$

$\therefore\ \sqrt{3}\text{sen}x-\cos x = 2\text{sen}(x-30°)$

Ejemplo 3

$R = \text{sen}x + \cos x$

1ro.: $R = \text{sen}x+\underbrace{1}\cos x$

2do.: $R = \text{sen}x+\tan 45°\cos x$

3ro.: $R = \frac{\text{sen}x}{1}+\frac{\text{sen}45°}{\cos 45°}\cos x$

efectuando

$$R = \frac{\overbrace{\text{sen}x\cos 45°+\text{sen}45°\cos x}^{\text{sen}(x+45°)}}{\cos 45°}$$

$$\Rightarrow R=\frac{\text{sen}(x+45°)}{\frac{1}{\sqrt{2}}}$$

$\Rightarrow R=\sqrt{2}\,\text{sen}(x+45°)$

$\therefore \text{sen}\,x+\cos x=\sqrt{2}\,\text{sen}(x+45°)$

Teniendo en cuenta estos últimos ejemplos, podemos plantear el siguiente grupo de Identidades Auxiliares:

i)
$$\text{sen}x+\cos x = \sqrt{2}\,\text{sen}(x+45°)$$
$$\sqrt{3}\,\text{sen}\,x+\cos x = 2\text{sen}(x+30°)$$
$$\text{sen}x+\sqrt{3}\cos x = 2\text{sen}(x+60°)$$

ii)
$$\text{sen}x-\cos x = \sqrt{2}\,\text{sen}(x-45°)$$
$$\sqrt{3}\,\text{sen}\,x-\cos x = 2\text{sen}(x-30°)$$
$$\text{sen}x-\sqrt{3}\cos x = 2\text{sen}(x-60°)$$

A continuación, mostramos ejercicios aplicativos sobre estas identidades

$\text{sen}20^\circ+\cos20^\circ = \sqrt{2}\ \text{sen}(20^\circ+45^\circ) = \sqrt{2}\ \text{sen}65^\circ$

$\text{sen}70^\circ-\cos70^\circ = \sqrt{2}\ \text{sen}(70^\circ-45^\circ) = \sqrt{2}\ \text{sen}25^\circ$

$\text{sen}15^\circ+\sqrt{3}\cos15^\circ = 2\text{sen}(15^\circ+60^\circ) = 2\text{sen}75^\circ$

$\text{sen}65^\circ-\sqrt{3}\cos65^\circ = 2\text{sen}(65^\circ-60^\circ) = 2\text{sen}5^\circ$

$\sqrt{3}\ \text{sen}10^\circ+\cos10^\circ=2\text{sen}(10^\circ+30^\circ) = 2\text{sen}40^\circ$

$\sqrt{3}\ \text{sen}40^\circ-\cos40^\circ = 2\text{sen}(40^\circ-30^\circ) = 2\text{sen}10^\circ$

pero también puede utilizar su equivalente en radianes

$$\text{sen}\left(\frac{\pi}{9}\right)+\sqrt{3}\cos\left(\frac{\pi}{9}\right)=2\text{sen}\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{9}\right)=2\text{sen}\left(\frac{4\pi}{9}\right)$$

$$\text{sen}\left(\frac{\pi}{5}\right)+\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)=\sqrt{2}\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{5}+\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\,\text{sen}\left(\frac{9\pi}{20}\right)$$

$$\sqrt{3}\text{sen}\left(\frac{\pi}{10}\right)-\cos\left(\frac{\pi}{10}\right)=2\text{sen}\left(\frac{\pi}{10}-\frac{\pi}{6}\right)=2\text{sen}\left(\frac{-\pi}{15}\right)=-2\text{sen}\left(\frac{\pi}{15}\right)$$

$$\sqrt{3}\text{sen}\left(\frac{\pi}{7}\right)+\cos\left(\frac{\pi}{7}\right)=2\text{sen}\left(\frac{\pi}{7}+\frac{\pi}{6}\right)=2\text{sen}\left(\frac{13\pi}{42}\right)$$

$$\text{sen}\left(\frac{8\pi}{9}\right)-\sqrt{3}\cos\left(\frac{8\pi}{9}\right)=2\text{sen}\left(\frac{8\pi}{9}-\frac{\pi}{3}\right)=2\text{sen}\left(\frac{5\pi}{9}\right)$$

$$\text{sen}\left(\frac{3\pi}{7}\right)-\cos\left(\frac{3\pi}{7}\right)=\sqrt{2}\,\text{sen}\left(\frac{3\pi}{7}-\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\,\text{sen}\left(\frac{5\pi}{28}\right)$$

Teorema

i) Si $A+B+C = n\pi$; $n\in \mathbb{Z}$
se cumple:
- $\tan A+\tan B+\tan C = \tan A\tan B\tan C$
- $\cot A\cot B+\cot A\cot C+\cot B\cot C = 1$

ii) Si $A+B+C = (2n+1)\frac{\pi}{2}$; $n\in \mathbb{Z}$
se cumple:
- $\cot A+\cot B+\cot C = \cot A\cot B\cot C$
- $\tan A\tan B+\tan A\tan C+\tan B\tan C = 1$

Demostración de (i)

De la condición tenemos

$$A+B = n\pi - C$$

entonces

$$\tan(A+B) = \tan(n\pi-C)$$

$$\frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A.\tan B} = \frac{\tan n\pi - \tan C}{1+\tan n\pi.\tan C}$$

se conoce

$\tan(n\pi) = 0$; $n\in \mathbb{Z}$

efectuando

$\tan A+\tan B+\tan C = \tan A.\tan B.\tan C$

como $\tan x = \dfrac{1}{\cot x}$

tenemos

$$\frac{1}{\cot A}+\frac{1}{\cot B}+\frac{1}{\cot C} = \frac{1}{\cot A}\cdot\frac{1}{\cot B}\cdot\frac{1}{\cot C}$$

efectuando

$\cot B\cot C + \cot A\cot C + \cot A\cot B = 1$

Se deja para el lector la demostración de ii.

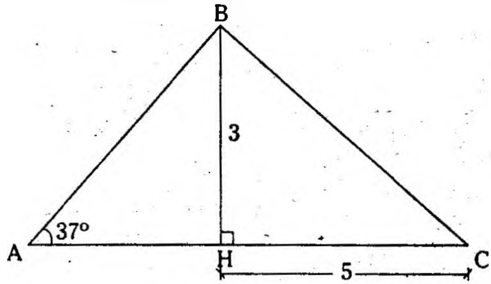
Nota

Si A, B y C son ángulos internos de un triángulo no rectángulo ABC, se cumple que la suma de sus tangentes es igual al producto de los mismos.

Para poder apreciar una aplicación acerca de esta observación preste atención al desarrollo del siguiente ejemplo.

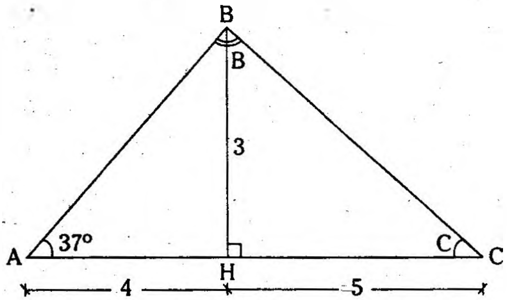
Ejemplo 1

Halle tanB a partir del siguiente gráfico



(a)

Resolución
De acuerdo a los datos del ejemplo, podemos completar la longitud del segmento AH, esto es



(b)

Figura 5.6

del $\triangle$ABH $\tan A = \tan 37° = \dfrac{3}{4}$

del $\triangle$BHC $\tan C = \dfrac{3}{5}$

pero como: $A+B+C = 180°$
Calcularemos tanB aplicando la observación porque se cumple que
$\tan A + \tan B + \tan C = \tan A . \tan B . \tan C$

$$\frac{3}{4} + \tan B + \frac{3}{5} = \frac{3}{4} . \tan B . \frac{3}{5}$$

reduciendo $\dfrac{27}{20} + \tan B = \dfrac{9}{20} . \tan B$

luego $\dfrac{27}{20} = \dfrac{9}{20} . \tan B - \tan B$

$\Rightarrow \tan B = \dfrac{-27}{11}$

Ejemplo 2
En un triángulo ABC, simplifique

$$E = \frac{\cos(A+B)}{\text{sen}A\,\text{sen}B} + \frac{\cos(A+C)}{\text{sen}A\,\text{sen}C} + \frac{\cos(B+C)}{\text{sen}B\,\text{sen}C}$$

Resolución
Como

$$\frac{\cos(x+y)}{\text{sen}x\,\text{sen}y} = \frac{\cos x \cos y - \text{sen}x\,\text{sen}y}{\text{sen}x\,\text{sen}y}$$

$$\frac{\cos(x+y)}{\text{sen}x\,\text{sen}y} = \frac{\cos x \cos y}{\text{sen}x\,\text{sen}y} - \frac{\text{sen}x\,\text{sen}y}{\text{sen}x\,\text{sen}y}$$

$$\frac{\cos(x+y)}{\text{sen}x\,\text{sen}y} = \cot x \cot y - 1$$

en la expresión E
$E = \cot A \cot B - 1 + \cot A \cot C - 1 + \cot B \cot C - 1$
$E = \cot A \cot B + \cot A \cot C + \cot B \cot C - 3$ ...(I)
si se trata de un triángulo ABC se tiene
$A+B+C = 180°$,
luego se cumple
$\cot A \cot B + \cot A \cot C + \cot B \cot C = 1$ .... (II)
reemplazando (II) en (I) se tiene: $E = -2$
A partir del ejercicio, concluimos

a) $\dfrac{\cos(x+y)}{\text{sen}x\,\text{sen}y} = \cot x \cot y - 1$

b) $\dfrac{\cos(x-y)}{\text{sen}x\,\text{sen}y} = \cot x \cot y + 1$

Ejemplo 3
Si $A+B+C = \dfrac{13\pi}{2}$ y $\cot A + \cot B = 3\cot C$,
calcule $\tan A \tan B$

Resolución
Como $A+B+C = \dfrac{13\pi}{2}$
Se puede escribir como

$$A+B+C = \frac{13\pi}{2} = (2(6)+1)\frac{\pi}{2}\ ;\ 6 \in \mathbb{Z}$$

Aplicando el teorema de la página **303**

$\cot A \cot B \cot C = \underline{\cot A + \cot B} + \cot C$

$\cot A \cot B \cot C = 3\cot C + \cot C$

$\cot A \cot B \cot C = 4\cot C$

Reduciendo se obtiene

$\cot A \cot B = 4$

$\Rightarrow \dfrac{1}{\tan A} . \dfrac{1}{\tan B} = 4$

$\therefore \tan A \tan B = \dfrac{1}{4}$

Problemas Resueltos

Problema 1

Calcule el valor de $\cos(\alpha+\theta)$;

si $\operatorname{sen}\alpha=\frac{3}{4}, 0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ y $\cos\theta=-\frac{2}{3}$, $\pi<\theta<\frac{3\pi}{2}$

Resolución

Aplicando las identidades

- $\cos^2\alpha = 1-\operatorname{sen}^2\alpha \Rightarrow \cos^2\alpha=1-\left(\frac{3}{4}\right)^2$

  $\therefore \cos\alpha=\frac{\sqrt{7}}{4}$

- $\operatorname{sen}^2\theta=1-\cos^2\theta \Rightarrow \operatorname{sen}^2\theta=1-\left(-\frac{2}{3}\right)^2$

  $\therefore \operatorname{sen}\theta=\frac{-\sqrt{5}}{3}$

sabemos que $\cos(\alpha+\theta)=\cos\alpha\cos\theta-\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\theta$

entonces $\cos(\alpha+\theta)=\frac{\sqrt{7}}{4}\left(\frac{-2}{3}\right)-\frac{3}{4}\left(\frac{-\sqrt{5}}{3}\right)$

$\therefore \cos(\alpha-\theta)=\frac{3\sqrt{5}-2\sqrt{7}}{12}$

Problema 2

Determine el valor de

$K = 2\operatorname{sen}50^\circ - 4\cos40^\circ\operatorname{sen}10^\circ$

Resolución

Cambiemos a 50° por (40° + 10°)

$K=2[\operatorname{sen}(40^\circ+10^\circ)-2\cos40^\circ\operatorname{sen}10^\circ]$

$K=2[\operatorname{sen}40^\circ\cos10^\circ+\cos40^\circ\operatorname{sen}10^\circ-2\cos40^\circ\operatorname{sen}10^\circ]$

$K=2[\operatorname{sen}40^\circ\cos10^\circ-\cos40^\circ\operatorname{sen}10^\circ]$

$K=2\operatorname{sen}(40^\circ-10^\circ)=2\operatorname{sen}30^\circ=1$

Problema 3

Calcule el valor aproximado de

$$E=\frac{\operatorname{sen}1^\circ}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}+\frac{\cos1^\circ}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}$$

Resolución

$$E=\frac{\operatorname{sen}1^\circ.(\sqrt{6}+\sqrt{2})+\cos1^\circ(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{(\sqrt{6}-\sqrt{2})(\sqrt{6}+\sqrt{2})}$$

$$E=\operatorname{sen}1^\circ\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right)+\cos1^\circ\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right)$$

$E=\operatorname{sen}1^\circ\cos15^\circ+\cos1^\circ\operatorname{sen}15^\circ$

$E=\operatorname{sen}(1^\circ+15^\circ)=\operatorname{sen}16^\circ=\frac{7}{25}$

Problema 4

Si $\tan(x+y)=5$; $\tan(x-y)=4$ calcule $\cot2y$

Resolución

Sea $x+y=\alpha \ \wedge \ x-y=\beta$

luego $2y=\alpha-\beta$

entonces

$\tan2y=\tan(\alpha-\beta)$

$$\tan2y=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}=\frac{5-4}{1+5\times4}$$

$\Rightarrow \tan2y=-1/21$ $\qquad \therefore \cot2y=-21$

Problema 5

Determine el valor de k a partir de la igualdad siguiente $\frac{\operatorname{sen}38^\circ}{\sqrt{3}+1}-\frac{\operatorname{sen}52^\circ}{\sqrt{3}-1}=\frac{3\sqrt{2}}{k}$

Resolución

Se sabe sen52°

En el problema $\frac{\operatorname{sen}38^\circ}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}-\frac{\cos38^\circ}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}=\frac{3}{k}$

racionalizando

$$\operatorname{sen}38^\circ\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}-\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right)\cos38^\circ=\frac{3}{k}$$

$$\underbrace{\operatorname{sen}38^\circ\cos75^\circ-\operatorname{sen}75^\circ\cos38^\circ}_{\operatorname{sen}(38^\circ-75^\circ)}=\frac{3}{k}$$

$\Rightarrow \operatorname{sen}(-37^\circ)=\frac{3}{k} \Rightarrow -\operatorname{sen}37^\circ=\frac{3}{k}$

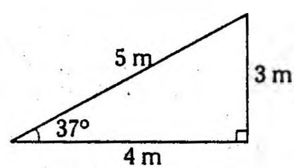


Figura 5.7

$\therefore k=-5$

Problema 5

Demuestre que

i) $\operatorname{sen}(x+y)\operatorname{sen}(x-y) = \operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen}^2 y$
ii) $\cos(x+y)\cos(x-y) = \cos^2 x + \cos^2 y - 1$

Resolución

Desarrollemos los primeros miembros de cada caso:

i)

$$\operatorname{sen}(x+y)\operatorname{sen}(x-y) = \operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen}^2 y$$

$$(\operatorname{sen}x\cos y+\cos x\operatorname{sen}y)(\operatorname{sen}x\cos y-\cos x\operatorname{sen}y) = \operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen}^2 y$$

$$\operatorname{sen}^2 x\underbrace{\cos^2 y}_{1-\operatorname{sen}^2 y} - \underbrace{\cos^2 x}_{1-\operatorname{sen}^2 x}\operatorname{sen}^2 y = \operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen}^2 y$$

$$\operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen}^2 x\cancel{\operatorname{sen}^2 y} - \operatorname{sen}^2 y + \cancel{\operatorname{sen}^2 x}\operatorname{sen} y = \operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen}^2 y$$

$$\therefore \operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen}^2 y = \operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen}^2 y$$

ii)

$$\cos(x+y)\cos(x-y) = \cos^2 x + \cos^2 y - 1$$

$$(\cos x\cos y-\operatorname{sen}x\operatorname{sen}y)(\cos x\cos y+\operatorname{sen}x\operatorname{sen}y) = \cos^2 x + \cos^2 y - 1$$

$$\cos^2 x\cos^2 y - \underbrace{\operatorname{sen}^2 x}_{1-\cos^2 x}\ \underbrace{\operatorname{sen}^2 y}_{1-\cos^2 y} = \cos^2 x + \cos^2 y - 1$$

$$\cos^2 x\cancel{\cos^2 y} - 1 + \cos^2 x + \cos^2 y - \cancel{\cos^2 x}\cos^2 y = \cos^2 x + \cos^2 y - 1$$

$$\therefore \cos^2 x + \cos^2 y - 1 = \cos^2 x + \cos^2 y - 1$$

Problema 6

Simplifique la expresión

$$M = \frac{3\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x}{\operatorname{sen}(60^\circ + x)\operatorname{sen}(60^\circ - x)}$$

Resolución

Cambiando al denominador por la identidad (i) del problema (5)

$$M = \frac{3(1-\operatorname{sen}^2 x) - \operatorname{sen}^2 x}{\operatorname{sen}^2 60^\circ - \operatorname{sen}^2 x}$$

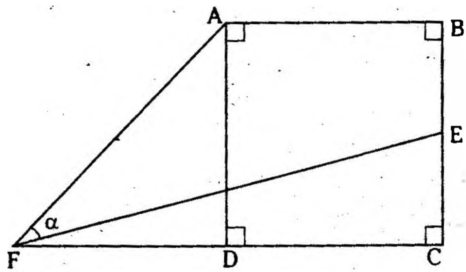
$$M = \frac{3 - 4\operatorname{sen}^2 x}{\frac{3}{4} - \operatorname{sen}^2 x}$$

$$M = \frac{\cancel{3-4\operatorname{sen}^2 x}}{\frac{\cancel{3-4\operatorname{sen}^2 x}}{4}} = 4$$

$\therefore\ M = 4$

Problema 7

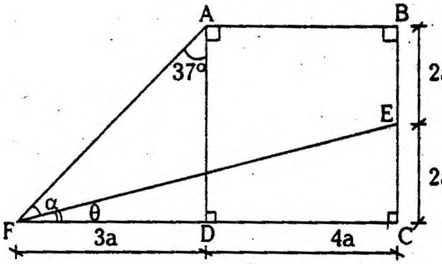
Del gráfico ABCD es un cuadrado, calcule $\tan\alpha$, si se sabe además que E es el punto medio del segmento BC y que la medida del ángulo DAF es 37°.



(a)

Resolución

Considerando el lado del cuadrado igual a 4a entonces FD = 3a



(b)

Figura 5.8

Del gráfico 5.8 (b) se tiene

$$\alpha = 53^\circ - \theta$$

$$\tan\alpha = \tan(53^\circ - \theta)$$

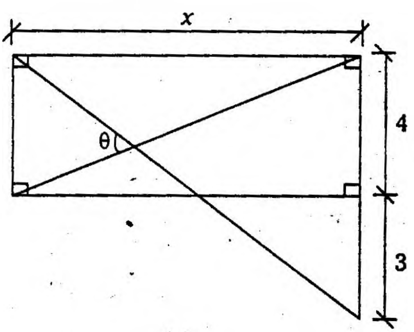
$$\tan\alpha = \frac{\tan 53^\circ - \tan\theta}{1 + \tan 53^\circ . \tan\theta}$$

$$\tan\alpha = \frac{\frac{4}{3} - \frac{2}{7}}{1 + \frac{4}{3}\cdot\frac{2}{7}} = \frac{22}{29} \quad ; \quad \therefore \tan\alpha = \frac{22}{29}$$

(valor aproximado, por usar a 37° y 53°)

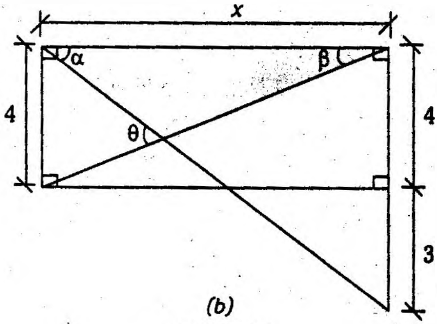
Problema 8

Del gráfico, calcule x si $\cot\theta = 9/22$



(a)

Resolución



(b)

Figura 5.9

Del gráfico 5.9 (b) se tiene que:

$$\tan\alpha = \frac{7}{x}, \ \tan\beta = \frac{4}{x} \quad y \quad x>0$$

Además $\theta = \alpha + \beta$

$$\tan\theta = \tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha . \tan\beta}$$

$$\tan\theta = \frac{\frac{7}{x} + \frac{4}{x}}{1 - \frac{7}{x}\left(\frac{4}{x}\right)} = \frac{11x}{x^2 - 28}$$

$$\frac{22}{9} = \frac{11x}{x^2 - 28}$$

$$\Rightarrow 2x^2 - 9x - 56 = 0$$

$$(x-8)(2x+7) = 0$$

$$\Rightarrow x = 8 \ \vee \ x = -\frac{7}{2}$$

de donde obtenemos: $x = 8$

Problema 9

Calcule el valor de la siguiente expresión

$$M = \frac{\cos 25^\circ + \sqrt{3}\operatorname{sen} 25^\circ}{\operatorname{sen} 10^\circ + \cos 10^\circ}$$

Resolución

Para dar forma al numerador y denominador y aplicar las identidades fundamentales hacemos lo siguiente

$$M = \frac{2\left[\frac{1}{2}\cos 25^\circ + \frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{sen} 25^\circ\right]}{\sqrt{2}\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{sen} 10^\circ + \frac{1}{\sqrt{2}}\cos 10^\circ\right]}$$

$$M=\frac{2[\cos 60°\cos 25°+\text{sen}60°\text{sen}25°]}{\sqrt{2}[\cos 45°\text{sen}10°+\text{sen}45°\cos 10°]}$$

$$M=\frac{\sqrt{2}.\cos(60°-25°)}{\text{sen}(45°+10°)}=\frac{\sqrt{2}\cos 35°}{\text{sen}55°}$$

$\therefore\ M=\sqrt{2}$

Problema 10

Calcule el máximo valor de

$$f=4\cos x-2\text{sen}\left(\frac{\pi}{6}+x\right)\ ;\ \forall x\in\mathbb{R}$$

Resolución

$$f=4\cos x-2\left[\text{sen}\frac{\pi}{6}\cos x+\cos\frac{\pi}{6}\text{sen}x\right]$$

$$f=4\cos x-[\cos x+\sqrt{3}\text{sen}x]$$

$$f=3\cos x-\sqrt{3}\text{sen}x$$

$$f=(-\sqrt{3})\text{sen}x+3\cos x$$

pero

$$-\sqrt{(-\sqrt{3})^2+3^2}\leq(-\sqrt{3})\text{sen}x+3\cos x\leq\sqrt{(-\sqrt{3})^2+3^2}$$

de donde

$$f_{\text{máximo}}=\sqrt{(-\sqrt{3})^2+(3)^2}$$

$$\therefore\ f_{\text{máximo}}=2\sqrt{3}$$

Problema 11

Si: $A\leq \text{vers}x+\text{cov}x\leq B$

Determine la suma del mayor valor de A y el menor valor de B.

Resolución

Sea: $P=\text{vers}x+\text{cov}x$

$P=1-\cos x+1-\text{sen}x$

$P=2-(\text{sen}x+\cos x)$

considerando: $x\in\mathbb{R}$, tenemos

$$-\sqrt{2}\leq\text{sen}x+\cos x\leq\sqrt{2}$$

multiplicando por (–1)

$$-\sqrt{2}\leq-(\text{sen}x+\cos x)\leq\sqrt{2}$$

sumando (2)

$$2-\sqrt{2}\leq\underbrace{2-(\text{sen}x+\cos x)}_{P}\leq 2+\sqrt{2}$$

veamos en la recta numérica

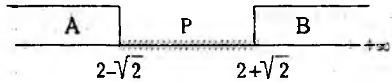


Figura 5.10

entonces

$$A\leq 2-\sqrt{2}\Rightarrow A_{\text{máx}}=2-\sqrt{2}$$

$$B\geq 2+\sqrt{2}\Rightarrow B_{\text{mín}}=2+\sqrt{2}$$

$$\therefore A_{\text{máx}}+B_{\text{mín}}=4$$

Problema 12

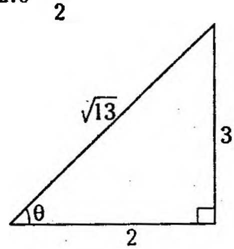
Calcule la variación de

$$H=2\text{sen}x+3\cos x\ ;\ x\in\left\langle 0;\frac{\pi}{2}\right\rangle$$

Resolución

Con los coeficientes de sen$x$ y cos$x$

tenemos: $\tan\theta=\dfrac{3}{2}$



(a)

Luego

$$\frac{H}{\sqrt{13}}=\frac{2}{\sqrt{13}}\text{sen}x+\frac{3}{\sqrt{13}}\cos x$$

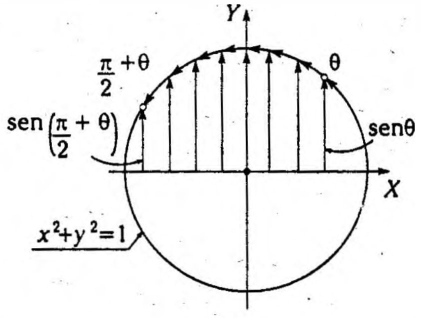
$$\frac{H}{\sqrt{13}}=\cos\theta\text{sen}x+\text{sen}\theta\cos x$$

$$\frac{H}{\sqrt{13}}=\text{sen}(x+\theta)\ \Rightarrow\ H=\sqrt{13}\text{sen}(x+\theta)$$

del dato:

$$0<x<\frac{\pi}{2}\ ;\ \theta<x+\theta<\frac{\pi}{2}+\theta$$

analizando en la C.T. (dibujando los arcos $x+\theta$)



(b)
Figura 5.11

se obtiene

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)<\operatorname{sen}(x+\theta)\leq 1$$

$$\cos\theta<\operatorname{sen}(x+\theta)\leq 1$$

$$\frac{2}{\sqrt{13}}<\operatorname{sen}(x+\theta)\leq 1$$

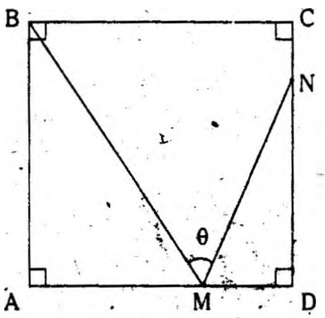
multiplicando por $(\sqrt{13})$:

$$2<\underbrace{\sqrt{13}\operatorname{sen}(x+\theta)}_{H}\leq\sqrt{13}$$

$$\therefore\ H=\langle 2;\sqrt{13}]$$

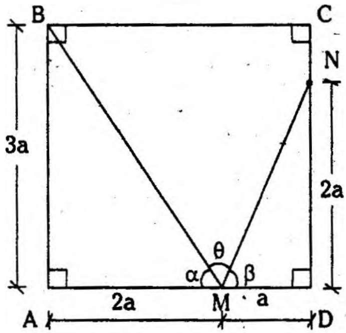
Problema 13

Del gráfico adjunto, ABCD es un cuadrado. Sabiendo que AM = 2MD = ND, calcule sec θ



(a)

Resolución



(b)
Figura 5.12

Hacemos que MD = a, entonces AM = ND = 2a

pero del gráfico tenemos: $\theta+\alpha+\beta=180°$

Por lo que podemos utilizar la siguiente identidad

$$\tan\theta+\tan\alpha+\tan\beta=\tan\theta.\tan\alpha.\tan\beta$$

$$\tan\theta+\frac{3}{2}+2=\tan\theta.\frac{3}{2}.2$$

$$\tan\theta+\frac{7}{2}=3\tan\theta\Rightarrow\tan\theta=7/4$$

pero $\sec\theta=\sqrt{1+\tan^2\theta}$ $\quad\therefore\ \sec\theta=\frac{\sqrt{65}}{4}$

Problema 14

En un triángulo ABC se cumple

$$\frac{\tan A}{2}=\frac{\tan B}{3}=\frac{\tan C}{4}$$

halle el valor de $\sec^2A+\sec^2B+\sec^2C$

Resolución

De la condición del problema

$$\frac{\tan A}{2}=\frac{\tan B}{3}=\frac{\tan C}{4}=K\ \Rightarrow\ \begin{aligned}\tan A&=2K\\ \tan B&=3K\\ \tan C&=4K\end{aligned}$$

como $A+B+C=180°$

sabemos que: $\tan A+\tan B+\tan C=\tan A\tan B\tan C$

sustituyendo: $2K+3K+4K=2K.3K.4K$

$$9\cancel{K}=24K^{\cancel{3}}\ \Rightarrow\ K^2=\frac{3}{8}$$

nos piden

$$M = \underbrace{\sec^2 A}_{1+\tan^2 A} + \underbrace{\sec^2 B}_{1+\tan^2 B} + \underbrace{\sec^2 C}_{1+\tan^2 C}$$

$M=3+\tan^2A+\tan^2B+\tan^2C$

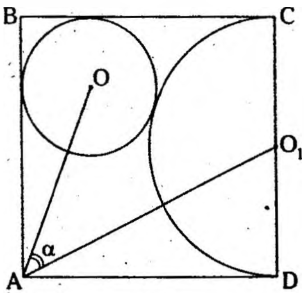
$M=3+(2K)^2+(3K)^2+(4K)^2$

$$M = 3 + 29K^2 = 3 + 29\left(\frac{3}{8}\right)$$

$\therefore M = 111/8$

Problema 15

Del gráfico, calcule $\tan\alpha$, siendo ABCD un cuadrado. Además O y O_1 son centros



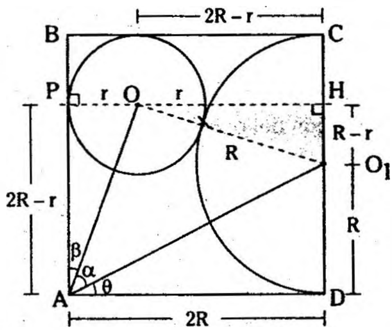
(a)

Resolución

Sea

r : radio de la circunferencia menor

R : radio de la circunferencia mayor



(b)

Figura 5.13

Notamos que $\alpha+\beta+\theta=90°$

$\Rightarrow \alpha+\beta=90°-\theta \Rightarrow \tan(\alpha+\beta)=\tan(90°-\theta)$

$$\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\cot\theta=\frac{1}{\tan\theta}$$

ordenando se tiene

$\tan\alpha\tan\beta+\tan\alpha\tan\theta+\tan\beta\tan\theta=1$ ...(I)

del ◺ sombreado

$(R+r)^2=(R-r)^2+(OH)^2$

$\Rightarrow OH=2\sqrt{Rr}$

Observamos $2R = r + 2\sqrt{Rr}$ ...(II)

dado que las razones trigonométricas no dependen de los lados, hacemos: $r = 1$

sustituyendo y resolviendo en (II): $R = \dfrac{2+\sqrt{3}}{2}$

definiendo

en ◺ ADO_1 : $\tan\theta = \dfrac{R}{2R} = \dfrac{1}{2}$

en ◺ APO : $\tan\beta=\dfrac{r}{2R-r}=\dfrac{1}{2\left(\dfrac{2+\sqrt{3}}{2}\right)-1}=\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$

luego reemplazamos en (I):

$$\tan\alpha\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)+\tan\alpha\left(\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)=1$$

$$\frac{\sqrt{3}\tan\alpha}{2}=\frac{5-\sqrt{3}}{4}$$

$$\therefore \tan\alpha=\frac{5\sqrt{3}-3}{6}$$

Problema 16

Demuestre que $\tan x + \tan y = \dfrac{\operatorname{sen}(x+y)}{\cos x\cos y}$

Resolución

Llamemos: $E=\tan x+\tan y$

transformando a senos y cosenos:

$$E=\frac{\operatorname{sen}x}{\cos x}+\frac{\operatorname{sen}y}{\cos y}$$

$$E=\frac{\operatorname{sen}x\cos y+\cos x\operatorname{sen}y}{\cos x\cos y}$$

Recordar: $\operatorname{sen}(x+y)=\operatorname{sen}x\cos y+\cos x\operatorname{sen}y$

$$E=\frac{\operatorname{sen}(x+y)}{\cos x\cos y}$$

por consiguiente se establece

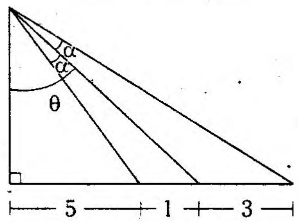
i) $\tan x + \tan y = \dfrac{\operatorname{sen}(x+y)}{\cos x \cos y}$

en forma análoga obtenemos

ii) $\tan x - \tan y = \dfrac{\operatorname{sen}(x-y)}{\cos x \cos y}$

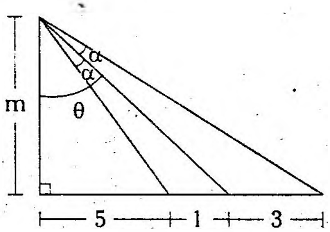
Problema 17

Del gráfico, halle $\dfrac{\operatorname{sen}2\theta}{\operatorname{sen}2\alpha}$



(a)

Resolución



(b)

Figura 5.14

Definimos

$\tan(\theta+\alpha) = \dfrac{9}{m}$, $\tan(\theta-\alpha) = \dfrac{5}{m}$

luego

$\tan(\theta+\alpha) + \tan(\theta-\alpha) = \dfrac{9}{m} + \dfrac{5}{m}$

aplicando la identidad del problema anterior

$$\frac{\operatorname{sen}2\theta}{\cos(\theta+\alpha)\cos(\theta-\alpha)} = \frac{13}{m} \quad ...(i)$$

también

$$\tan(\theta+\alpha) - \tan(\theta-\alpha) = \frac{9}{m} - \frac{5}{m}$$

$$\Rightarrow \frac{\operatorname{sen}2\alpha}{\cos(\theta+\alpha)\cos(\theta-\alpha)} = \frac{4}{m} \quad ...(ii)$$

dividiendo (*i*) y (*ii*)

$$\therefore \frac{\operatorname{sen}2\theta}{\operatorname{sen}2\alpha} = \frac{13}{4}$$

Problema 18

Sabiendo que

$\tan x \tan 2x + \tan 2x \tan 3x + ... + \tan 5x \tan 6x = 14$

calcule $\dfrac{\tan 6x}{\tan x}$

Resolución

Recordando la identidad

$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x . \tan y}$$

luego

$\tan(x+y) - \tan(x+y)\tan x \tan y = \tan x + \tan y$

ordenando

$\tan(x+y)\tan x \tan y = \tan(x+y) - \tan x - \tan y \quad ... (\alpha)$

en la condición del problema, multiplicamos por $\tan x$ en ambos miembros

$\tan 2x . \tan x . \tan x + \tan 3x \tan 2x \tan x + ...$
$+ \tan 6x \tan 5x \tan x = 14 \tan x$

escribiendo a cada producto de forma vertical y cambiando por la identidad (α)

$$\left.\begin{aligned} \tan 2x.\tan x.\tan x &= \tan 2x - \tan x - \tan x \\ \tan 3x.\tan 2x.\tan x &= \tan 3x - \tan 2x - \tan x \\ &\vdots \\ \tan 6x.\tan 5x.\tan x &= \tan 6x - \tan 5x - \tan x \end{aligned}\right|\ \text{sumando}$$

$\Rightarrow 14 \tan x = \tan 6x - 6 \tan x$

$20 \tan x = \tan 6x$

$$\therefore \frac{\tan 6x}{\tan x} = 20$$

Problema 19

Halle la variación de f^2 si

$$f=\frac{1+\sqrt{3}\tan\alpha}{\sqrt{3}-\tan\alpha}\ ;\ \forall\alpha\in\left\langle 0;\frac{\pi}{4}\right]$$

Resolución

Dividiendo al numerador y denominador entre $\sqrt{3}$

$$f=\frac{\dfrac{1+\sqrt{3}\tan\alpha}{\sqrt{3}}}{\dfrac{\sqrt{3}-\tan\alpha}{\sqrt{3}}}=\frac{\dfrac{1}{\sqrt{3}}+\tan\alpha}{1-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\tan\alpha}$$

$$f=\frac{\tan\frac{\pi}{6}+\tan\alpha}{1-\tan\frac{\pi}{6}.\tan\alpha}=\tan\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)$$

del dato

$$0<\alpha\leq\frac{\pi}{4}\ \Rightarrow\ \frac{\pi}{6}<\frac{\pi}{6}+\alpha\leq\frac{5\pi}{12}$$

dibujamos en conjunto de $\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)$ en la circunferencia trigonométrica

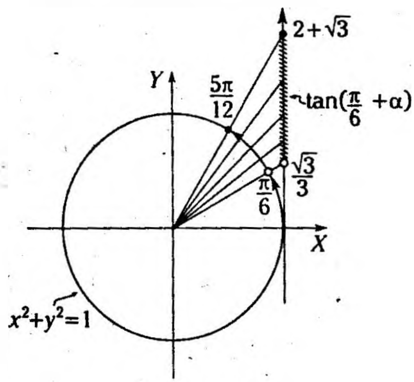


Figura 5.15

luego tenemos

$$\frac{\sqrt{3}}{3}<\underbrace{\tan\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)}_{f}\leq 2+\sqrt{3}$$

elevando al cuadrado

$$\frac{1}{3}<f^2\leq 7+4\sqrt{3}\quad o\quad f^2=\left\langle\frac{1}{3};7+4\sqrt{3}\right]$$

Problema 20

En un triángulo ABC se cumple

$\cot(A+B)+\cot(B+C)+\cot(C+A)=-\sqrt{3}$

halle el valor de la expresión

$K=\tan A\cot B+\tan B\cot C+\tan C\cot A$

Resolución

A partir de la condición tenemos

$$\underbrace{\cot(180°-C)}_{-\cot C}+\underbrace{\cot(180°-A)}_{-\cot A}+\underbrace{\cot(180°-B)}_{-\cot B}=-\sqrt{3}$$

$-(\cot A+\cot B+\cot C)=-\sqrt{3}$

Obteniéndose

$\cot A+\cot B+\cot C=\sqrt{3}$ ... (*i*)

elevando al cuadrado

$\cot^2A+\cot^2B+\cot^2C+2\cot A\cot B+$

$2\cot B\cot C+2\cot C\cot A=\sqrt{3}^2$ ...(*ii*)

Tener presente si $A+B+C=180°$

se cumple

$\cot A\cot B+\cot B\cot C+\cot C\cot A=1$ ...(*iii*)

Reemplazando (*iii*) en la condición (*ii*)

$\cot^2A+\cot^2B+\cot^2C=1$ ... (*iv*)

De las condiciones (*iii*) y (*iv*) podemos calcular el valor de la expresión

$E=(\cot A-\cot B)^2+(\cot B-\cot C)^2+(\cot C-\cot A)^2$

Obteniendo por valor cero, es decir

$(\cot A-\cot B)^2+(\cot B-\cot C)^2+(\cot C-\cot A)^2=0$

De donde se concluye

$\cot A=\cot B=\cot C$

$\Rightarrow A=B=C$

Reemplazando en K

$K=\tan A\cot A+\tan B\cot B+\tan C+\cot C$

$\therefore K=3$

Problema 21

Determine el valor de: $W = \cot A \cot B + \cot B \cot C + \cot A \cot C$
a partir de la condición: $\operatorname{sen}(A+B+C) = \operatorname{sen}A\operatorname{sen}B\operatorname{sen}C$

Resolución

Desarrollemos el seno de la suma de tres ángulos

$$\operatorname{sen}(A+B+C) = \operatorname{sen}[(A+B)+C] = \operatorname{sen}(A+B)\cos C+\cos(A+B)\operatorname{sen}C$$

$$\operatorname{sen}(A+B+C) = (\operatorname{sen}A\cos B + \cos A\operatorname{sen}B)\cos C + (\cos A\cos B - \operatorname{sen}A\operatorname{sen}B)\operatorname{sen}C$$

$$\underbrace{\operatorname{sen}(A+B+C)}_{\operatorname{sen}A.\operatorname{sen}B.\operatorname{sen}C} = \operatorname{sen}A\cos B\cos C + \cos A\operatorname{sen}B\cos C + \cos A\cos B\operatorname{sen}C - \operatorname{sen}A\operatorname{sen}B\operatorname{sen}C$$

entonces:

$$2\operatorname{sen}A\operatorname{sen}B\operatorname{sen}C = \operatorname{sen}A\cos B\cos C + \cos A\operatorname{sen}B\cos C + \cos A\cos B\operatorname{sen}C$$

$$2 = \frac{\cancel{\operatorname{sen}A}\cos B\cos C}{\cancel{\operatorname{sen}A}\operatorname{sen}B\operatorname{sen}C} + \frac{\cos A\cancel{\operatorname{sen}B}\cos C}{\operatorname{sen}A\cancel{\operatorname{sen}B}\operatorname{sen}C} + \frac{\cos A\cos B\cancel{\operatorname{sen}C}}{\operatorname{sen}A\operatorname{sen}B\cancel{\operatorname{sen}C}}$$

$$2 = \cot B\cot C + \cot A\cot C + \cot A\cot B$$

$$\therefore W = 2$$

De lo anterior podemos establecer la relación

$$\boxed{\operatorname{sen}(\alpha+\beta+\theta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta\cos\theta + \operatorname{sen}\beta\cos\alpha\cos\theta + \operatorname{sen}\theta\cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta\operatorname{sen}\theta}$$

Cumpliéndose además las siguientes relaciones

$$\boxed{\cos(\alpha+\beta+\theta) = \cos\alpha\cos\beta\cos\theta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta\cos\theta - \operatorname{sen}\beta\operatorname{sen}\theta\cos\alpha - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta\cos\theta}$$

$$\boxed{\tan(\alpha+\beta+\theta) = \frac{\tan\alpha+\tan\beta+\tan\theta-\tan\alpha\tan\beta\tan\theta}{1-(\tan\alpha\tan\beta+\tan\beta\tan\theta+\tan\theta\tan\alpha)}}$$

A continuación pasamos a deducir la equivalencia para $\tan(\alpha+\beta+\theta)$ quedando para el lector la relación para $\cos(\alpha+\beta+\theta)$

$$\tan(\alpha+\beta+\theta) = \tan[(\alpha+\beta)+\theta] = \frac{\tan(\alpha+\beta)+\tan\theta}{1-\tan(\alpha+\beta)\tan\theta}$$

$$\Rightarrow \tan(\alpha+\beta+\theta) = \frac{\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}+\tan\theta}{1-\left(\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}\right)\tan\theta}$$

$$\Rightarrow \tan(\alpha+\beta+\theta) = \frac{\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta+\tan\theta-\tan\alpha\tan\beta\tan\theta}{\cancel{1-\tan\alpha\tan\beta}}}{\dfrac{1-\tan\alpha\tan\beta-\tan\alpha\tan\theta-\tan\beta\tan\theta}{\cancel{1-\tan\alpha\tan\beta}}}$$

Por lo tanto $\tan(\alpha+\beta+\theta) = \dfrac{\tan\alpha+\tan\beta+\tan\theta-\tan\alpha\tan\beta\tan\theta}{1-(\tan\alpha\tan\beta+\tan\alpha\tan\theta+\tan\beta\tan\theta)}$

EJERCICIOS

Si α y β son ángulos agudos, tales que

$\text{sen}\alpha = \frac{3}{5}$ y $\text{sen}\beta = \frac{5}{13}$

calcule el valor de:

1. $\text{sen}(\alpha+\beta)$

2. $\cos(\alpha-\beta)$

3. $\tan(\alpha+\beta)$

Si $\alpha \in \text{IIC}$ y $\theta \in \text{IIIC}$, además se sabe que $\cos\alpha = -\frac{1}{2}$ y $\tan\theta = 4\sqrt{3}$, calcule el valor de

4. $\text{sen}(\alpha+\theta)$

5. $\cos(\alpha+\theta)$

6. $\tan(\alpha-\theta)$

Exprese en términos de sen$x$ y cos$x$ las siguientes expresiones

7. $\sqrt{8}\text{sen}(x-45°)$

8. $2\cos(x+60°)$

9. $\tan(x+135°)$

Determine el valor de la siguiente expresión

$E = (\text{sen}\alpha + \cos\beta)^2 + (\cos\alpha + \text{sen}\beta)^2$

para los casos:

10. si $\alpha+\beta = 60°$

11. si $\alpha+\beta = 150°$

12. si $\alpha+\beta = 225°$

Obtenga el valor de la expresión $\frac{\text{sen}(x-y)}{\cos x \cos y}$ para los casos

13. $x=45°$; $y=30°$

14. $x=60°$; $y=45°$

15. $x=53°$; $y=37°$

Calcule el valor de la expresión

$\frac{1}{2}[\tan(x+45°)+\tan(x-45°)]$

para los casos siguientes

16. $\tan^2 x = 1/3$

17. $\tan^2 x = 1/5$

18. $\tan^2 x = 1/7$

Reducir la expresión $\frac{\sqrt{3}\cos x + \text{sen}x}{\cos x - \sqrt{3}\text{sen}x}$ en función de tangente, luego evaluarlo para los siguientes casos

19. $x=10°$

20. $x=20°$

21. $x=8°$

Encuentre el equivalente de sen$x$ – cos$x$ en término de la razón trigonométrica seno, luego evalúe para los casos.

22. $x=55°$

23. $x=65°$

24. $x=70°$

RESPUESTAS

1. 56/65

2. 63/65

3. 56/33

4. $3\sqrt{3}/14$

5. 13/14

6. $5\sqrt{3}/11$

7. 2(sen – cos$x$)

8. $\cos x - \sqrt{3}\text{sen}x$

9. $\frac{\tan x - 1}{1+\tan x}$

10. $2+\sqrt{3}$

11. 3

12. $2-\sqrt{2}$

13. $12-4\sqrt{3}$

14. $12\sqrt{3}-12$

15. 16 – 9

16. 2

17. 3/2

18. 4/2

19. tan70°

20. tan80°

21. tan68°

22. $\sqrt{2}\,\text{sen}10°$

23. $\sqrt{2}\,\text{sen}20°$

24. $\sqrt{2}\,\text{sen}25°$

IDENTIDADES DE REDUCCIÓN AL PRIMER CUADRANTE

A la comparación entre los valores de las razones trigonométricas de un ángulo de cualquier medida con respecto a otra cuyo ángulo es agudo, se denomina reducción al primer cuadrante. Así por ejemplo

$$\operatorname{sen}\frac{5\pi}{6}=\operatorname{sen}\frac{\pi}{6}$$

$$\cos\frac{5\pi}{4}=-\cos\frac{\pi}{4}$$

$$\tan\frac{4\pi}{3}=\tan\frac{\pi}{3}$$

Además estas identidades se expresan como una razón trigonométrica de $\left(\frac{1}{2}k\pi \pm x\right)$, donde k es un número entero cualquiera, en términos de una razón de x y se llaman **identidades de reducción**. Un caso particular son las identidades de co–razones (razones trigonométricas de ángulos complementarios). A continuación se mencionan algunas de estas identidades de reducción al primer cuadrante.

- $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=\cos x$
- $\operatorname{sen}(\pi-x)=\operatorname{sen}x$
- $\operatorname{sen}(\pi+x)=-\operatorname{sen}x$
- $\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)=-\cos x$
- $\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)=-\cos x$
- $\operatorname{sen}(2\pi-x) = -\operatorname{sen}x$
- $\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right) = -\operatorname{sen}x$
- $\cos(\pi-x) = -\cos x$
- $\cos(\pi+x) = -\cos x$
- $\cos\left(\frac{3\pi}{2}-x\right) = -\operatorname{sen}x$
- $\cos\left(\frac{3\pi}{2}+x\right) = \operatorname{sen}x$
- $\cos(2\pi-x) = \cos x$
- $\tan\left(\frac{\pi}{2}+x\right) = -\cot x$
- $\tan(\pi-x) = -\tan x$
- $\tan(\pi+x) = \tan x$
- $\tan\left(\frac{3\pi}{2}-x\right) = \cot x$
- $\tan\left(\frac{3\pi}{2}+x\right) = -\cot x$
- $\tan(2\pi-x) = -\tan x$

Este capítulo lo podemos entender en toda su magnitud, a partir de las identidades de arcos compuestos, esto es

$$\operatorname{sen}(\alpha+\beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta+\cos\alpha\operatorname{sen}\beta$$

$$\operatorname{sen}(\alpha-\beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta-\cos\alpha\operatorname{sen}\beta$$

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta-\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta$$

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta+\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta$$

ya que, si en las identidades anteriores hacemos que α o β sea un ángulo cuadrantal, se obtienen identidades más reducidas como:

- $\operatorname{sen}(90^\circ+\beta) = \underbrace{\operatorname{sen}90^\circ}_{1}\cos\beta+\underbrace{\cos 90^\circ}_{0}\operatorname{sen}\beta$

$$\Rightarrow \operatorname{sen}(90^\circ+\beta)=\cos\beta$$

- $\cos(\alpha+180^\circ) = \cos\alpha\underbrace{\cos 180^\circ}_{-1}-\operatorname{sen}\alpha\underbrace{\operatorname{sen}180^\circ}_{0}$

$$\Rightarrow \cos(\alpha+180^\circ)=-\cos\alpha$$

- $\tan(270^\circ-\beta)=\dfrac{\operatorname{sen}(270^\circ-\beta)}{\cos(270^\circ-\beta)}$

$$\tan(270^\circ-\beta)=\frac{\overbrace{\operatorname{sen}270^\circ}^{-1}\cos\beta-\overbrace{\cos 270^\circ}^{0}\operatorname{sen}\beta}{\underbrace{\cos 270^\circ}_{0}\cos\beta+\underbrace{\operatorname{sen}270^\circ}_{-1}\operatorname{sen}\beta}$$

$$\Rightarrow \tan(270^\circ-\beta) = \frac{-\cos\beta}{-\operatorname{sen}\beta}=\cot\beta$$

$$\Rightarrow \tan(270^\circ-\beta)=\cot\beta$$

Para evitar hacer los desarrollos anteriores y obtener las identidades de una forma más directa, se plantean a continuación reglas prácticas que vienen a ser los casos de reducción al primer cuadrante, las cuales mostramos a continuación:

Primer Caso

$$RT(90°+\theta) = \underbrace{\quad}_{\text{signo}} coRT(\theta)$$

$$RT(180° \pm \theta) = \underbrace{\quad}_{\text{signo}} RT(\theta)$$

$$RT(270° \pm \theta) = \underbrace{\quad}_{\text{signo}} coRT(\theta)$$

$$RT(360° - \theta) = \underbrace{\quad}_{\text{signo}} RT(\theta)$$

Para el uso de estas reglas prácticas debe tener en cuenta los dos aspectos siguientes

- 1ro. respecto a θ: la medida del ángulo θ se debe considerar como un ángulo agudo, aunque no lo sea.

- 2do. respecto al signo: el signo + ó − que debe elegirse para el segundo miembro depende del cuadrante asumido para el ángulo a reducir y del operador trigonométrico, para ello no olvidar que θ se debe considerar ángulo agudo (ver figura 5.16)
  Considerando θ un ángulo agudo:

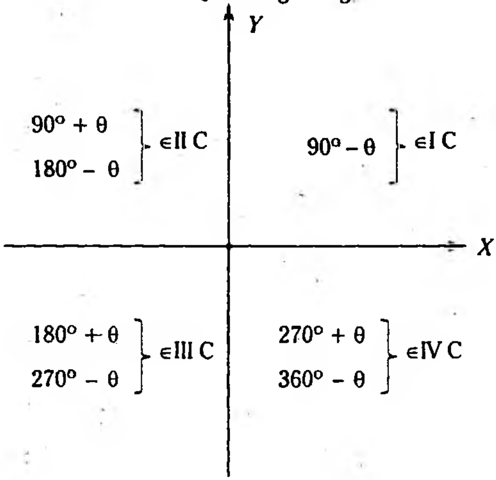


Figura 5.16

Para su mejor entendimiento, seguidamente citamos algunos ejemplos

- $\underbrace{\text{sen}(90° + \theta)}_{\in \text{ II C}} = +\cos\theta$ — Positivo, porque el seno de un ∠ del II C es positivo

- $\underbrace{\cos(180° + \theta)}_{\in \text{ III C}} = -\cos\theta$ — Negativo, porque el coseno de un ∠ de II C es negativo

- $\underbrace{\tan(270° + \theta)}_{\in \text{ IV C}} = -\cot\theta$ — Negativo, porque la tangente de un ∠ del IV C es negativo

- $\underbrace{\sec(90° - \theta)}_{\in \text{ I C}} = +\csc\theta$ — Positivo, porque la secante de un ∠ del I C es positivo
  co – razón de la secante.

- $\underbrace{\cot(180° - \theta)}_{\in \text{ II C}} = -\cot\theta$ — Negativo, porque la cotangente de un ∠ del II C es negativo

- $\underbrace{\csc(270° - \theta)}_{\in \text{ III C}} = -\sec\theta$ — Negativo, porque la cosecante de un ∠ del III C es negativo
  co – razón de la cosecante.

- $\underbrace{\text{sen}(360° - \theta)}_{\in \text{ IV C}} = -\text{sen}\theta$ — Negativo, porque el seno de un ∠ del IV C es negativo

- $\underbrace{\cos(180° - \theta)}_{\in \text{ II C}} = -\cos\theta$ — Negativo, porque el coseno de un ∠ del II C es negativo

Nota

¿En realidad $(90°+\theta) \in IIC$?
La respuesta es no, ya que no se sabe qué valor toma θ, por ejemplo si θ es 100° entonces $(90°+100°) \in IIIC$. En el ejemplo anterior, que se halla asumido que $(90°+\theta) \in IIC$ es sólo para determinar de una manera práctica el signo + y evitar desarrollar:

$$\text{sen}(90°+\theta) = \underbrace{\text{sen}90°}_{1}\cos\theta + \underbrace{\cos 90°}_{0}\text{sen}\theta = \cos\theta$$

Para que pueda comprender un poco más el tema sigamos con el desarrollo de los siguientes ejercicios:

Ejemplo 1

Calcule los valores numéricos de

i) sen150°

ii) cos240°

iii) cot330°

Resolución

i) $\text{sen } 150° = \text{sen}(180° - 30°) = \text{sen}30° = \frac{1}{2}$

ii) $\cos 240° = \cos(180°+60°) = -\cos 60° = -\frac{1}{2}$

iii) $\cot 330° = \cot(270°+60°) = -\tan 60° = -\sqrt{3}$

Ejemplo 2

Calcule

$$y = \text{sen}(\pi+x)\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right) + \text{sen}\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)\cos(\pi-x)$$

Resolución

Sabemos que $\frac{\pi}{2}$ equivale a 90° y π equivale a 180°, entonces de acuerdo a la regla práctica del primer caso, tenemos

- $\text{sen}(\pi+x) = -\text{sen}x$
- $\text{sen}\left(\frac{3\pi}{2}+x\right) = -\cos x$
- $\cos(\frac{\pi}{2}+x) = -\text{sen}x$
- $\cos(\pi - x) = -\cos x$

reemplazando lo anterior en y

$$y = \underbrace{(-\text{sen}x)(-\text{sen}x)} + \underbrace{(-\cos x)(-\cos x)}$$

$$y = \text{sen}^2 x + \cos^2 x$$

$\therefore y = 1$

Segundo Caso

Las razones trigonométricas de un ángulo no se alteran porque se le sume o reste al ángulo cualquier múltiplo de 360° ó 2π

$$\boxed{\text{R.T.}(360°\text{K}+\theta)=\text{R.T.}(\theta)\,;\,\forall\text{K}\in\mathbb{Z}}$$

Ejemplos

- $\text{sen}750° = \text{sen}(2\times360°+30°) = \text{sen}30° = \frac{1}{2}$
- $\cos 390° = \cos(360°+30°) = \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$
- $\tan 1125° = \tan(3\times360°+45°) = \tan 45° = 1$
- $\sec 1500° = \sec(4\times360°+60°) = \sec 60° = 2$

En caso se presentasen razones trigonométricas afectando a múltiplos de π, como son

$$\text{sen}\left(\frac{11\pi}{3}\right), \cos\left(\frac{77\pi}{6}\right), \tan\left(\frac{117\pi}{4}\right), \text{etc. ...}$$

le sugerimos que proceda de la forma siguiente: quitarle todos los múltiplos de 2π que tiene dicho múltiplo; para ello divida el numerador entre el doble del denominador, esto es:

para

$$\text{sen}\left(\frac{11\pi}{3}\right) \text{ se divide } \frac{11}{6} \;;$$

para

$$\cos\left(\frac{77\pi}{6}\right) \text{ se divide } \frac{77}{12}$$

luego el residuo reemplazará al numerador.

Para entender un poco más al respecto sigamos con unos ejemplos

- $\text{sen}\left(\frac{77\pi}{6}\right)$; se divide $\frac{77}{12}$

  77 ⌊12
  5 6
  residuo (reemplaza al 77)

$$\Rightarrow \text{sen}\left(\frac{77\pi}{6}\right) = \text{sen}\left(\frac{5\pi}{6}\right)$$

luego reducimos

$$\text{sen}\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \text{sen}\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right) = +\text{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \text{sen}\left(\frac{77\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$$

- $\text{sen}\left(\frac{11\pi}{3}\right)$; se divide $\frac{11}{6}$;

$$\begin{array}{r|l} 11 & 6 \\ \hline \underline{5} & 1 \end{array}$$

residuo (reemplaza al 11)

$$\Rightarrow \text{sen}\left(\frac{11\pi}{3}\right) = \text{sen}\left(\frac{5\pi}{3}\right)$$

$$\Rightarrow \text{sen}\left(2\pi - \frac{\pi}{3}\right) = -\text{sen}\frac{\pi}{3} = \frac{-\sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore \text{sen}\left(\frac{11\pi}{3}\right) = \frac{-\sqrt{3}}{2}$$

- $\text{sen}\left(\frac{41\pi}{6}\right)$; se divide

$$\begin{array}{r|l} 41 & 12 \\ \hline \underline{5} & 3 \end{array}$$

residuo (reemplaza al 41)

$$\Rightarrow \text{sen}\left(\frac{41\pi}{6}\right) = \text{sen}\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \text{sen}\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = \text{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \text{sen}\left(\frac{41\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$$

Otra manera de resolver es:

-

$$\cot\left(\frac{81\pi}{4}\right) = \cot\left(\frac{80\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\right) = \cot\left(20\pi + \frac{\pi}{4}\right) =$$

$$\cot\left(\frac{81\pi}{4}\right) = \cot\left(10 \times \underbrace{2\pi}_{360^\circ} + \frac{\pi}{4}\right) = \cot\frac{\pi}{4} = 1$$

$$\therefore \cot\left(\frac{81\pi}{4}\right) = 1$$

Sugerencia

Cuando se reduce al primer cuadrante la razón trigonométrica de un ángulo mayor a una vuelta, se divide dicho ángulo entre 360°; donde la razón trigonométrica de dicho ángulo será igual a la misma razón trigonométrica del residuo obtenido en la división planteada.

Ejemplo

Reduzca al primer cuadrante sec20000°

$$\begin{array}{r|l} 20000^\circ & 360^\circ \\ \hline \underline{1800^\circ} & 55 \\ 2000^\circ & \\ \underline{1800^\circ} & \\ 200^\circ & \end{array}$$

De lo expuesto en la sugerencia, tenemos:

$$\sec 20000^\circ = \sec 200^\circ$$

$$\sec 20000^\circ = \sec(180^\circ + 20^\circ)$$

$$\therefore \sec 20000^\circ = -\sec 20^\circ$$

Ejemplo

Halle los valores de $Y = \cos\left(\frac{2701\pi}{3} + x\right)$,

si $x \in \langle 0\,;\pi/2\rangle$

Resolución

$$Y = \cos\left(\frac{2700\pi}{3} + \frac{\pi}{3} + x\right)$$

$$Y = \cos\left(900\pi + \frac{\pi}{3} + x\right)$$

$$Y = \cos\left(450 \times \underset{\substack{\uparrow \\ 360^\circ}}{2\pi} + \frac{\pi}{3} + x\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3} + x\right)$$

$$Y = \cos\left(\frac{\pi}{3} + x\right)$$

otra manera de llegar a esta última expresión es:

$$Y = \cos\left(\frac{2701\pi}{3} + x\right)$$

se divide $\frac{2701}{6}$;

$$\begin{array}{r|l} 2701 & 6 \\ \hline \underbrace{1} & 450 \end{array}$$

residuo (reemplaza al 2701)

$$\Rightarrow Y = \cos\left(\frac{2701\pi}{3} + x\right)$$

$$Y = \cos\left(\frac{\pi}{3} + x\right)$$

como usted puede comprobar es la misma expresión.

como $0 < x < \frac{\pi}{2}$ $\quad \Rightarrow \frac{\pi}{3} < x + \frac{\pi}{3} < \frac{5\pi}{6}$

Seguidamente representaremos los arcos $x + \frac{\pi}{3}$ en la C.T.

De la figura 5.17, se obtiene

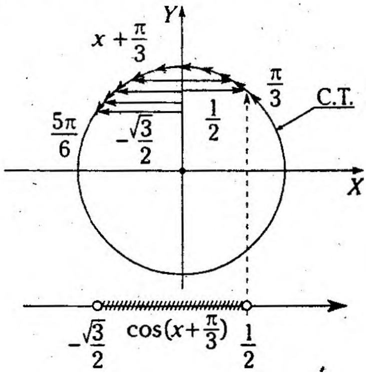


Figura 5.17

$$-\frac{\sqrt{3}}{2}<\cos\left(\frac{\pi}{3}+x\right)<\frac{1}{2}$$

$$-\frac{\sqrt{3}}{2} < Y < \frac{1}{2} \qquad \therefore Y=\left\langle-\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{1}{2}\right\rangle$$

Propiedades

I) Si $\alpha+\beta=180°$ (∢s suplementarios) se verifica

$\text{sen}\alpha=\text{sen}\beta$	$\cot\alpha=-\cot\beta$
$\cos\alpha=-\cos\beta$	$\sec\alpha=-\sec\beta$
$\tan\alpha=-\tan\beta$	$\csc\alpha=\csc\beta$

Demostración

- $\text{sen}\alpha=\text{sen}(180°-\beta)=\text{sen}\beta$
- $\cos\alpha=\cos(180°-\beta)=-\cos\beta$

Ejemplos

- $\text{sen}150°=\text{sen}30°=1/2$
- $\cos135°=-\cos45°=-\sqrt{2}/2$
- $\tan120°=-\tan60°=-\sqrt{3}$

la propiedad indicada se cumple en general si

$\alpha+\beta=(2n+1)180°/n\in\mathbb{Z}$

II) Si $\alpha+\beta=360°$, se verifica:

$\text{sen}\alpha=-\text{sen}\beta$	$\cot\alpha=-\cot\beta$
$\cos\alpha=\cos\beta$	$\sec\alpha=\sec\beta$
$\tan\alpha=-\tan\beta$	$\csc\alpha=-\csc\beta$

Ejemplos

- $\text{sen}300°=-\text{sen}60°$
- $\cos350°=\cos10°$
- $\cot320°=-\cot40°$

la propiedad indicada se cumple en general si $\alpha+\beta=360°n/n\in\mathbb{Z}$

Tercer Caso

Identidades para el arco $(-\theta)$

Demostración

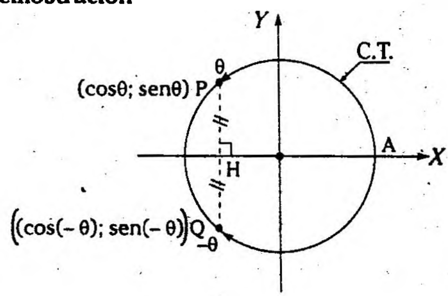


Figura 5.18

De la figura (5.18), los puntos P y Q son simétricos con respecto al eje, por lo tanto las abscisas de estos puntos cumplen

$\cos\theta=\cos(-\theta)$ ...(1)

Asimismo las ordenadas de los puntos P y Q son respectivamente $\text{sen}\theta$ y $\text{sen}(-\theta)$ y se observa:

$\text{sen}(-\theta)=-\text{sen}\theta$ ...(2)

De (1) y (2) se pueden demostrar las demás identidades del arco $(-\theta)$, como por ejemplo:

- $\tan(-\theta)=\dfrac{\text{sen}(-\theta)}{\cos(-\theta)}=\dfrac{-\text{sen}\theta}{\cos\theta}=-\tan\theta$

  $\Rightarrow \tan(-\theta)=-\tan\theta$

- $\sec(-\theta)=\dfrac{1}{\cos(-\theta)}=\dfrac{1}{\cos\theta}=\sec\theta$

  $\Rightarrow \sec(-\theta)=\sec\theta$

Ejemplos

- $\text{sen}(-30°)=-\text{sen}30°=-\frac{1}{2}$
- $\cot(-20°)=-\cot20°$
- $\cos(-135°)=\cos135°=-\cos45°=-\frac{\sqrt{2}}{2}$
- $\sec(-100°)=\sec100°$

Observación

- $\operatorname{sen}(\alpha-\beta)=\operatorname{sen}[-(\beta-\alpha)]$
  $\operatorname{sen}(\alpha-\beta)=-\operatorname{sen}(\beta-\alpha)$
- $\cos(\alpha-\beta)=\cos[-(\beta-\alpha)]$
  $\cos(\alpha-\beta)=\cos(\beta-\alpha)$

en forma análoga se demuestra

$\tan(\alpha-\beta)=-\tan(\beta-\alpha)$	$\sec(\alpha-\beta)=\sec(\beta-\alpha)$
$\cot(\alpha-\beta)=-\cot(\beta-\alpha)$	$\csc(\alpha-\beta)=-\csc(\beta-\alpha)$

Ejemplos

- $\operatorname{sen}(\theta-\pi)=-\operatorname{sen}(\pi-\theta)=-\operatorname{sen}\theta$
- $\cos(\theta-4\pi)=\cos(4\pi-\theta)=\cos(2\times\overbrace{2\pi}^{360^\circ}+(-\theta))=\cos(-\theta)=\cos\theta$
- $\tan\left(\theta-\dfrac{41\pi}{2}\right)=-\tan\left(\dfrac{41\pi}{2}-\theta\right)=-\tan\left(20\pi+\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)=-\tan\left(10\times\underbrace{2\pi}_{360^\circ}+\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)=-\tan\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)=-\cot\theta$
- $\csc(-7\pi-\theta)=-\csc(7\pi+\theta)=-\csc(3\times\underbrace{2\pi}_{360^\circ}+\pi+\theta)=-\csc(\pi+\theta)=-(-\csc\theta)=\csc\theta$

Observación

Utilizando la siguiente figura, se puede reducir al primer cuadrante de una manera más directa $k\in\mathbb{Z}$

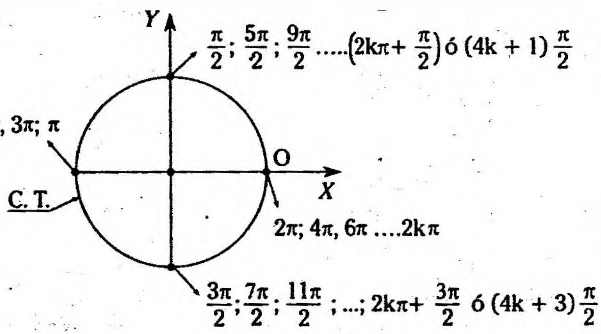


Figura 5.19

Ejemplos

- $\operatorname{sen}(\overbrace{41\underbrace{\tfrac{\pi}{2}}_{90^\circ}+\theta}^{\in\ \text{IIC}})=+\underbrace{\cos\theta}$

  Positivo porque el seno de un arco del IIC es positivo

  co – razón del seno

  múltiplo de cuatro más uno de $\frac{\pi}{2}$

Nota

$\frac{41\pi}{2}$ es de la forma $(4K+1)\frac{\pi}{2}$, por lo tanto se asume que $\left(\frac{41\pi}{2}+\theta\right)\in$ IIC sólo para determinar el signo +

$$\overbrace{\cot(83\underbrace{\pi}_{180^\circ}-\theta)}^{\in\text{ II C}} = -\cot\theta$$

Negativo, porque la cotangente de un arco del II C es negativo

Nota

83π es de la forma $(2K+1)\pi$ cuando K=41, por lo tanto se asume que $(83\pi-\theta)\in$ IIC sólo para determinar el signo –

Ejemplos

- $\tan\overbrace{\left(91\frac{\pi}{2}-\theta\right)}^{\in\text{IIIC}} = +\cot\theta$

- $\text{sen}\overbrace{(80\pi+\theta)}^{\in\text{IC}} = +\text{sen}\theta$

- $\tan\left(45\frac{\pi}{4}\right)=\tan\overbrace{\left(11\pi+\frac{\pi}{4}\right)}^{\in\text{IIIC}}=\tan\frac{\pi}{4}=1$

- $\sec\overbrace{\left(53\frac{\pi}{2}+\theta\right)}^{\in\text{IIC}} = -\csc\theta$

- $\csc\overbrace{(45\pi+\theta)}^{\in\text{IIIC}} = \csc\theta$

- $\text{sen}\left(56\frac{\pi}{3}\right)=\text{sen}\left(57\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{3}\right)$

  $\text{sen}\overbrace{\left(19\pi-\frac{\pi}{3}\right)}^{\in\text{IIC}}=\text{sen}\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

Pero debe entender que estos mismos ejemplos se pueden resolver utilizando un criterio dado en la página **317**.

- $\tan\left(91\frac{\pi}{2}-\theta\right)$; se divide $\frac{91}{4}$

  91 |4
  3 (residuo) 22

  $\Rightarrow \tan\left(91\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\tan\left(\frac{3\pi}{2}-\theta\right)=-\cot\theta$

  $\therefore \tan\left(91\frac{\pi}{2}-\theta\right)=-\cot\theta$

- $\text{sen}(80\pi+\theta)=\text{sen}\left(80\frac{\pi}{1}+\theta\right)$; se divide $\frac{80}{2}$

  80 |2
  0 (residuo) 40

  $\Rightarrow \text{sen}(80\pi+\theta)=\text{sen}(0\pi+\theta)=\text{sen}\theta$

  $\therefore \text{sen}(80\pi+\theta)=\text{sen}\theta$

- $\tan\left(45\frac{\pi}{4}\right)$; se divide $\frac{45}{8}$

  45 |8
  5 (residuo) 5

  $\Rightarrow \tan\left(45\frac{\pi}{4}\right)=\tan\frac{5\pi}{4}=\tan\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right)=\tan\frac{\pi}{4}=1$

  $\therefore \tan\left(\frac{45\pi}{4}\right)=1$

Propiedades $(K\in\mathbb{Z})$

$$\text{RT}(K\pi\pm\theta)=\underbrace{\ \ }_{\text{signo}}\text{RT}(\theta)$$

$$\text{RT}\left[(2K+1)\frac{\pi}{2}\pm\theta\right]=\underbrace{\ \ }_{\text{signo}}\text{Co–RT}(\theta)$$

Para aplicar estas propiedades recuerde que el signo en el segundo miembro depende de la R.T. inicial y del cuadrante al cual pertenece el ángulo a reducir.

LECTURA

VIETE Y LA TRIGONOMETRÍA

La comparación de los algebristas y trigonometristas, señalada en la resolución de la ecuación cúbica no fue para Viete un hallazgo casual, ni un episodio. Viete, como se ha dicho, despertó el interés hacia el álgebra precisamente en virtud de su utilidad e incluso necesidad para los problemas de la Trigonometría y la Astronomía. En lo sucesivo, los trabajos y resultados trigonométricos y algebraicos se sucedían simultáneamente, frecuentemente entrelazándose. Viete no se limitó a la determinación de todos los elementos de un triángulo plano o esférico dados tres de sus elementos. A él pertenecen los desarrollos de las funciones trigonométricas de arcos múltiples mediante la aplicación sucesiva de las fórmulas para el seno y coseno de la suma de dos ángulos.

$$\cos m\alpha = \cos^m \alpha - \frac{m(m-1)}{1.2}\cos^{m-2}\alpha\,\mathrm{sen}^2\alpha + \ldots\ldots$$

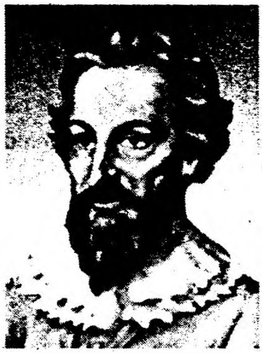
$$\mathrm{sen}\,m\alpha = m\cos^{m-1}\alpha\,\mathrm{sen}\,\alpha - \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}\cos^{m-3}\alpha\,\mathrm{sen}^3\alpha + \ldots.$$

Después de la muerte de Viete se conocieron muchas de sus fórmulas recurrentes:

$\cos m\alpha = 2\cos\alpha.\cos(m-1)\alpha - \cos(m-2)\alpha$ $\quad$ $\mathrm{sen}\,m\alpha = 2\cos\alpha.\mathrm{sen}(m-1)\alpha - \mathrm{sen}(m-2)\alpha$

$\mathrm{sen}\,m\alpha = 2\,\mathrm{sen}\,\alpha.\cos(m-1)\alpha + \mathrm{sen}(m-2)\alpha$ $\quad$ $\cos m\alpha = -2\,\mathrm{sen}\,\alpha.\mathrm{sen}(m-1)\alpha + \cos(m-2)\alpha$

Una sensación extraña produce el hecho de que semejantes resultados importantes de la Trigonometría fueron logrados con una definición no lo suficientemente general de las funciones trigonométricas, como relaciones entre los lados de un triángulo rectángulo, sin alusión a la introducción de la circunferencia generatriz. Sin embargo, así sucede frecuentemente en la historia, los resultados primero surgen y después se asimilan y reciben un tratamiento lo suficientemente general.



Los estudios y aportes teóricos de Viete fueron fundamentales para la Trigonometría y para la matemática en general

IDENTIDADES PARA EL ARCO DOBLE MITAD Y TRIPLE

Identidades para el Arco Doble

En las identidades de arcos compuestos, se estudió las identidades de la suma y diferencia de dos arcos (o ángulos); así por ejemplo si en la identidad

$\operatorname{sen}(\alpha+\theta)=\operatorname{sen}\alpha\cos\theta+\cos\alpha\operatorname{sen}\theta$

hacemos que $\alpha=\theta$, obtenemos

$\operatorname{sen}(\theta+\theta)=\operatorname{sen}\theta\cos\theta+\cos\theta\operatorname{sen}\theta$

$\operatorname{sen}(2\theta)=\operatorname{sen}\theta\cos\theta+\operatorname{sen}\theta\cos\theta$

reduciendo el segundo miembro se obtiene la identidad

$$\boxed{\operatorname{sen}2\theta=2\operatorname{sen}\theta\cos\theta}\quad....(i)$$

De la identidad (i) entiéndase que el seno de un ángulo es igual al doble producto del seno y coseno de la mitad de dicho ángulo o, el doble producto del seno y coseno de un mismo ángulo es igual al seno de su respectivo doble.

Ejemplos

- $\operatorname{sen}50^\circ = 2\operatorname{sen}25^\circ\cos25^\circ$
- $2\operatorname{sen}\frac{\theta}{4}\cos\frac{\theta}{4}=\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}$
- $2\operatorname{sen}\frac{\pi}{16}\cos\frac{\pi}{16}=\operatorname{sen}\frac{\pi}{8}$
- $\operatorname{sen}x = 2\operatorname{sen}\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$
- $\operatorname{sen}4x = 2\operatorname{sen}2x\cos2x$
- $2\operatorname{sen}(\cos x)\cos(\cos x) = \operatorname{sen}(2\cos x)$

Análogamente como se dedujo la fórmula (*i*), de las identidades

$\cos(\alpha+\theta)=\cos\alpha\cos\theta-\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\theta$

$\tan(\alpha+\theta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\theta}{1-\tan\alpha\tan\theta}$

si hacemos $\alpha=\theta$, obtendremos las siguientes identidades

$$\boxed{\cos2\theta=\cos^2\theta-\operatorname{sen}^2\theta}\quad....(ii)$$

$$\boxed{\tan2\theta=\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}}\quad....(iii)$$

Por identidades fundamentales se sabe $\operatorname{sen}^2\theta+\cos^2\theta=1$, entonces si reemplazamos en la identidad (*ii*) $1-\operatorname{sen}^2\theta$ por $\cos^2\theta$, obtendremos

$$\boxed{\cos2\theta=1-2\operatorname{sen}^2\theta}\quad....(iv)$$

Análogamente si reemplazamos $1-\cos^2\theta$ por $\operatorname{sen}^2\theta$ en la identidad (*ii*) obtendremos

$$\boxed{\cos2\theta=2\cos^2\theta-1}\quad....(v)$$

Las identidades que siguen (*vi* y *vii*) se les denomina *fórmulas de degradación* y se obtienen despejando $2\operatorname{sen}^2\theta$ y $2\cos^2\theta$ de las identidades (*iv*) y (*v*)

Fórmulas de Degradación

$$\boxed{2\operatorname{sen}^2\theta=1-\cos2\theta}\quad....(vi)$$

$$\boxed{2\cos^2\theta=1+\cos2\theta}\quad....(vii)$$

Ejemplo

Demuestre la siguiente identidad

$$\operatorname{sen}2\theta=\frac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta}$$

Desarrollando en el segundo miembro tenemos

$$\operatorname{sen}2\theta=\frac{\frac{2\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}}{\sec^2\theta}\quad...\left(\text{utilizando } \tan\theta=\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} \text{ y } 1+\tan^2\theta=\sec^2\theta\right)$$

$$\operatorname{sen}2\theta=\frac{\frac{2\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}}{\frac{1}{\cos^2\theta}}\quad...\left(\text{utilizando identidad recíproca en el denominador.}\right)$$

$$\operatorname{sen}2\theta=\frac{2\operatorname{sen}\theta\cos^2\theta}{\cos\theta}\quad...\left(\text{por producto de extremos y medios.}\right)$$

$$\operatorname{sen}2\theta=2\operatorname{sen}\theta\cos\theta\quad...\left(\text{simplificando}\right)$$

$$\operatorname{sen}2\theta=\operatorname{sen}2\theta\quad...\left(\text{utilizando identidad } (i)\text{; encontramos lo que se buscaba demostrar.}\right)$$

En forma análoga se demuestra la identidad:

$$\cos2\theta=\frac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}$$

Nota

Una forma práctica de recordar las identidades (*iii*), (*viii*) y (*ix*) es utilizando la siguiente figura:

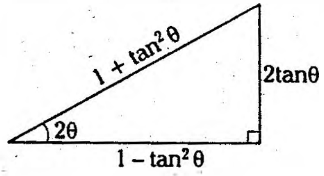


Figura 5.20

Así por ejemplo

$$\operatorname{sen}2\theta=\frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}}$$

$$\Rightarrow \operatorname{sen}2\theta=\frac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta}\quad .....(viii)\quad \text{y}$$

$$\cos 2\theta=\frac{\text{cateto adyacente}}{\text{cateto opuesto}}$$

$$\Rightarrow \cos 2\theta=\frac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}\quad .....(ix)$$

Ejemplo 1

A partir de las relaciones (*viii*) y (*ix*), calcule

$\operatorname{sen}2\theta$ y $\cos 2\theta$, si $\tan\theta=\frac{1}{\sqrt{2}}$

Veamos

$$\operatorname{sen}2\theta=\frac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta}$$

$$\Rightarrow \operatorname{sen}2\theta=\frac{2(1/\sqrt{2})}{1+(1/\sqrt{2})^2}$$

$$\Rightarrow \operatorname{sen}2\theta=\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

También

$$\cos 2\theta=\frac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}$$

$$\Rightarrow \cos 2\theta=\frac{1-(1/\sqrt{2})^2}{1+(1/\sqrt{2})^2}$$

$$\Rightarrow \cos 2\theta=1/3$$

Asimismo, con ayuda del triángulo rectángulo (figura 5.20) se establece las siguientes relaciones.

$$\boxed{\sec 2\theta-1=\tan 2\theta\tan\theta}$$

$$\boxed{\sec 2\theta+1=\frac{\tan 2\theta}{\tan\theta}}$$

Comprobemos las equivalencias.

De la figura 5.20 se obtiene

$$\sec 2\theta=\frac{1+\tan^2\theta}{1-\tan^2\theta}$$

Luego

- $$\sec 2\theta-1=\frac{1+\tan^2\theta}{1-\tan^2\theta}-1=\frac{2\tan^2\theta}{1-\tan^2\theta}$$

  Ordenando

  $$\sec 2\theta-1=\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}\times\tan\theta$$

  $$\therefore\ \sec 2\theta-1=\tan 2\theta\times\tan\theta$$

- $$\sec 2\theta+1=\frac{1+\tan^2\theta}{1-\tan^2\theta}+1$$

  $$\Rightarrow \sec 2\theta+1=\frac{2}{1-\tan^2\theta}$$

  $$\Rightarrow \sec 2\theta+1=\frac{2\tan\theta}{(1-\tan^2\theta)\tan\theta}$$

  $$\therefore\ \sec 2\theta+1=\frac{\tan 2\theta}{\tan\theta}$$

Ejemplo 2

Reduzca la expresión

$$k=(\sec 4^\circ+1)(\sec 8^\circ+1)(\sec 16^\circ+1)$$

Resolución

De la igualdad $\sec 2\theta+1=\frac{\tan 2\theta}{\tan\theta}$

La expresión k será

$$k=\left(\frac{\cancel{\tan 4^\circ}}{\tan 2^\circ}\right)\left(\frac{\cancel{\tan 8^\circ}}{\cancel{\tan 4^\circ}}\right)\left(\frac{\tan 16^\circ}{\cancel{\tan 8^\circ}}\right)$$

Reduciendo la expresión

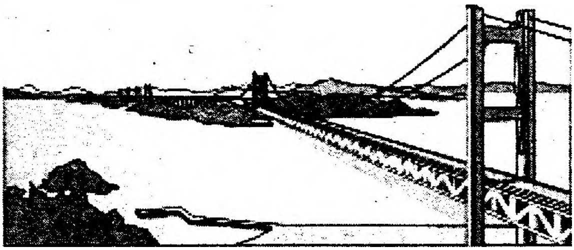
$$k=\frac{\tan 16^\circ}{\tan 2^\circ}\text{; empleando }\tan 16^\circ=\frac{7}{24}$$

$$\Rightarrow k=\frac{7/24}{\tan 2^\circ}\qquad \therefore\ k=\frac{7}{24}\cot 2^\circ$$

L E C T U R A

APLICACIÓN DE LAS IDENTIDADES EN EL DISEÑO DE COLUMNAS

En el análisis de la estabilidad y diseño de elementos prismáticos verticales de las columnas, principalmente de las que soportan carga axial excéntrica, se desarrolla la **Fórmula de la Secante** que relaciona los esfuerzos medio y máximo en una columna; es decir si la carga no se aplica pasando por el centro de gravedad, la columna soporta un esfuerzo combinado axial y de flexión.



Las aplicaciones matemáticas son fundamentales en el diseño de columnas, como las utilizadas en la construcción de puentes.

En la figura se considera una columna articulada sometida a una carga P aplicada con excentricidad e. Para el cálculo de la expresión para la máxima deflexión, se define la ecuación del movimiento armónico simple:

$$y = A\operatorname{sen}px + B\cos px - e \quad \ldots (1)$$

Las constantes A y B se obtienen de las condiciones de frontera.

Haciendo

i) $x = 0$, $y = 0$ en la ecuación (1) se tiene $B = e$

ii) $x = 1$, $y = 0$ en la ecuación (1) se tiene $A\operatorname{sen}pL = e(1 - \cos pL)$

Aplicando las identidades de arco doble

$$A\left(2\operatorname{sen}\frac{pL}{2}\cos\frac{pL}{2}\right) = e\left(2\operatorname{sen}^2\frac{pL}{2}\right)$$

Simplificando queda $A = e\tan\frac{pL}{2}$

Sustituyendo A y B en (1) se obtiene

$$y = e\left[\tan\frac{pL}{2}\operatorname{sen}px + \cos px - 1\right] \quad \ldots (2)$$

El valor de la deflexión máxima se halla haciendo $x = \frac{1}{2}$ en la ecuación (2)

$$y_{máx} = e\left[\tan\frac{pL}{2}\operatorname{sen}\frac{pL}{2} + \cos\frac{pL}{2} - 1\right]$$

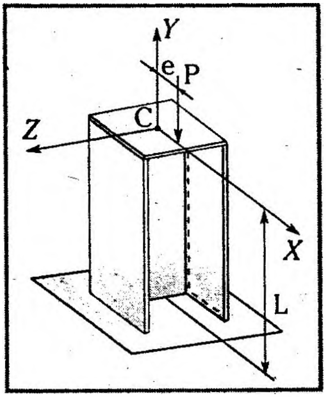
$$y_{máx} = e\left[\frac{\operatorname{sen}^2\frac{pL}{2}}{\cos\frac{pL}{2}} + \cos\frac{pL}{2} - 1\right]$$

$$y_{máx} = e\left[\sec\frac{pL}{2} - 1\right]$$

Si sustituimos $P = \sqrt{\frac{P}{EI}}$ en la última ecuación

$$y_{máx} = e\left[\sec\left(\sqrt{\frac{P}{EI}}.\frac{L}{2}\right) - 1\right]$$

donde **EI** es una constante que se determina según el tipo de material de la columna.



Finalmente se determina el esfuerzo máximo en la columna y, conocida como la **fórmula de la secante**, que resuelva para la fuerza por unidad de área, P/A la cual causa un esfuerzo máximo especificado $\sigma máx$ y esbeltez efectiva Le/r

$$\frac{P}{A} = \frac{\sigma máx}{1 + \frac{ec}{r^2}\sec\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{P}{EA}}\frac{Le}{r}\right)}$$

En el diseño de estructuras (edificios, puentes; etc) es necesario conocer la máxima carga que va a soportar la estructura, adicionalmente se requiere otros datos referidos al material (flexibilidad, coeficiente de dilatación, etc) que nos permiten conocer de antemano el comportamiento de las estructuras frente a cualquier variación, llámese de carga, temperatura, humedad, etc.

Dicho análisis en las estructuras permite hoy en día diseñar grandes edificios que, frente a una catástrofe natural o artificial, se mantienen en pie o en su defecto si colapsan no afectan los alrededores dado que están construidos tal que al caer lo hagan verticalmente. El estudio de estructuras ha permitido construir lo que hoy en día se llama **"Edificio Inteligente"**, capaz de reaccionar frente a un cambio externo.

EJERCICIOS

Utilizando cualquiera de las identidades anteriores (desde (i) hasta (ix)), reduzca u obtenga el valor de las siguientes expresiones:(compare sus resultados con las respuestas indicadas).

a) $2\text{sen}15^\circ\cos15^\circ =$ ______________

b) $\cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right)-\text{sen}^2\left(\frac{\pi}{8}\right) =$ ______________

c) $1-2\text{sen}^2 2x =$ ______________

d) $2\cos^2\frac{\alpha}{2}-1 =$ ______________

e) $1-\cos4x =$ ______________

f) $1-\cos x =$ ______________

g) $1+\cos\left(\frac{3\alpha}{2}\right) =$ ______________

h) $1+\cos70^\circ =$ ______________

i) $\frac{2\tan5^\circ}{1-\tan^2 5^\circ} =$ ______________

j) $\frac{1-\tan^2 6x}{1+\tan^2 6x} =$ ______________

RESPUESTAS

a) $\text{sen}30^\circ$ ó $\frac{1}{2}$ (se usó la identidad *i*)

b) $\cos\frac{\pi}{4}$ ó $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (se usó la identidad *ii*)

c) $\cos 4x$ (se usó la identidad *iv*)

d) $\cos\alpha$ (se usó la identidad *v*)

e) $2\text{sen}^2 2x$ (se usó la identidad *vi*)

f) $2\text{sen}^2\frac{x}{2}$ (se usó la identidad *vi*)

g) $2\cos^2\left(\frac{3\alpha}{4}\right)$ (se usó la identidad *vii*)

h) $2\cos^2 35^\circ$ (se usó la identidad *vii*)

i) $\tan10^\circ$ (se usó la identidad *iii*)

j) $\cos12x$ (se usó la identidad *ix*)

Observación

$$\text{sen}\theta = \underbrace{2\text{sen}\frac{\theta}{2}}\cos\frac{\theta}{2} \quad \ldots\ldots\ldots\ 1^{er}\text{ paso}$$

$$\text{sen}\theta = 2\times\underline{2\text{sen}\frac{\theta}{4}\cos\frac{\theta}{4}}\cos\frac{\theta}{2} \quad \ldots\ldots\ldots\ 2^{do}\text{ paso}$$

$$\text{sen}\theta = 2\times2\times\underline{2\text{sen}\frac{\theta}{8}\cos\frac{\theta}{8}}\cos\frac{\theta}{4}\cos\frac{\theta}{2} \quad \ldots\ldots\ldots\ 3^{er}\text{ paso}$$

$$\text{sen}\theta = 2\times2\times2\times2\text{sen}\frac{\theta}{16}\cos\frac{\theta}{16}\cos\frac{\theta}{8}\cos\frac{\theta}{4}\cos\frac{\theta}{2} \quad \ldots\ldots\ldots\ 4^{to}\text{ paso}$$

$$\text{sen}\theta = \underbrace{2\times2\times2\times\ldots\ldots}_{n\text{ veces}}2\text{sen}\frac{\theta}{2^n}\cos\frac{\theta}{2^n}\ldots\ldots\cos\frac{\theta}{8}\cos\frac{\theta}{4}\cos\frac{\theta}{2} \quad \ldots\ldots\ldots\ n^{vo}\text{ paso}$$

$$\text{sen}\theta = 2^n\,\text{sen}\frac{\theta}{2^n}\cos\frac{\theta}{2^n}\ldots\ldots\cos\frac{\theta}{8}\cos\frac{\theta}{4}\cos\frac{\theta}{2}$$

Luego $$\cos\frac{\theta}{2^n}\ldots\ldots\cos\frac{\theta}{8}\cos\frac{\theta}{4}\cos\frac{\theta}{2} = \frac{\text{sen}\theta}{2^n\text{sen}\frac{\theta}{2^n}}\ ;\ n\in\mathbb{Z}^+$$

Si hacemos $\theta=2^n x$ con $n\in\mathbb{Z}^+$, y lo reemplazamos en (α), obtendremos

$$\cos x\cos 2x\cos 4x\ldots\cos 2^{n-1}x=\frac{\operatorname{sen}2^n x}{2^n\operatorname{sen}x}$$

Ejemplos

- $\cos x\cos 2x=\frac{\operatorname{sen}2^2 x}{2^2\operatorname{sen}x}=\frac{\operatorname{sen}4x}{4\operatorname{sen}x}$
- $\cos x\cos 2x\cos 4x=\frac{\operatorname{sen}2^3 x}{2^3\operatorname{sen}x}=\frac{\operatorname{sen}8x}{8\operatorname{sen}x}$
- $\cos x\cos 2x\cos 4x\ldots\cos 128x=\frac{\operatorname{sen}2^8 x}{2^8\operatorname{sen}x}=\frac{\operatorname{sen}256x}{256\operatorname{sen}x}$

Identidades para el Ángulo Mitad (x/2)

De las fórmulas de degradación

$2\operatorname{sen}^2\theta=1-\cos 2\theta$; $2\cos^2\theta=1+\cos 2\theta$

hacemos que $\theta=\frac{x}{2}$, obteniendo

$2\operatorname{sen}^2\frac{x}{2}=1-\cos x$; $2\cos^2\frac{x}{2}=1+\cos x$

de donde despejando $\operatorname{sen}\frac{x}{2}$ y $\cos\frac{x}{2}$ respectivamente, obtendremos las siguientes identidades:

x) $\operatorname{sen}\frac{x}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}$ *xi)* $\cos\frac{x}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}$

como

$$\tan^2\frac{x}{2}=\frac{2\operatorname{sen}^2\frac{x}{2}}{2\cos^2\frac{x}{2}}=\frac{1-\cos x}{1+\cos x}$$

despejando $\tan\frac{x}{2}$, obtenemos la identidad:

$$\tan\frac{x}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}\quad\ldots xii)$$

Nota

De las identidades *x*, *xi* y *xii* el signo positivo o negativo dependerá del cuadrante al que pertenezca: *x*/2 y del operador sen, cos, tan, respectivamente.

Así por ejemplo

- $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{8}\right)=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\frac{\pi}{4}}{2}}=\sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$

  el signo es positivo porque $\frac{\pi}{8}\in\text{IC}$

$\Rightarrow \operatorname{sen}\frac{\pi}{8}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$

- $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)=-\sqrt{\frac{1+\cos\frac{7\pi}{6}}{2}}=-\sqrt{\frac{1+\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{2}}=-\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$

  el signo es negativo porque $\frac{7\pi}{12}\in\text{IIC}$

$\Rightarrow \operatorname{sen}\frac{7\pi}{12}=\frac{-\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$

Otra forma de expresar o utilizar las identidades *x,xi, xii* es

$$\left|\operatorname{sen}\frac{x}{2}\right|=\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}\qquad\left|\cos\frac{x}{2}\right|=\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}$$

$$\left|\tan\frac{x}{2}\right|=\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}$$

Observación

Si $A\in[0;\pi]$, se cumplen las siguientes fórmulas:

$$2\cos\left(\frac{A}{2^n}\right)=\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2+2\cos A}}}}}_{n\text{ radicales}}$$

$$2\operatorname{sen}\left(\frac{A}{2^n}\right)=\underbrace{\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2+2\cos A}}}}}_{n\text{ radicales}}$$

Demostración

- $\sqrt{2+2\cos A}=\sqrt{2(1+\cos A)}=\sqrt{2\times 2\cos^2\frac{A}{2}}$

$\sqrt{2+2\cos A}=2\left|\cos\frac{A}{2}\right|=2\cos\frac{A}{2};\ \frac{A}{2}=\frac{A}{2^1}$

Dado que $0\le\frac{A}{2}\le\frac{\pi}{2}\Rightarrow\cos\frac{A}{2}\ge 0$

- $\sqrt{2+\sqrt{2+2\cos A}}=\sqrt{2+2\cos\frac{A}{2}}=2\cos\frac{A}{4};\ \frac{A}{4}=\frac{A}{2^2}$

Remplazando lo anterior

- $\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+2\cos A}}}=\sqrt{2+2\cos\frac{A}{4}}=2\cos\frac{A}{8};\frac{A}{8}=\frac{A}{2^3}$

Análogamente

$\vdots \qquad \qquad \cdots$

- $\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2+2\cos A}}}}}_{\text{"n radicales"}}=2\cos\frac{A}{2^n}$

Ejemplos

- $2\cos\frac{\pi/6}{2^8}=\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2+2\cos\pi/6}}}}}_{8\text{ radicales}}$

$\therefore 2\cos\left(\frac{\pi}{1536}\right)=\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}}$

- $2\text{sen}\left(\frac{\frac{\pi}{4}}{2^6}\right)=\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2+2\cos\pi/4}}}}$ (6 radicales)

$\therefore 2\text{sen}\left(\frac{\pi}{256}\right)=\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}$

Si hacemos $A=\pi$, y lo reemplazamos en las identidades de la observación anterior, se obtiene las siguientes identidades:

$$2\cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right)=\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}}}_{(n-1)\text{ radicales}}$$

$$2\text{sen}\left(\frac{\pi}{2^n}\right)=\underbrace{\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}}}_{(n-1)\text{ radicales}}$$

Ejemplos

- $2\cos\frac{\pi}{16}=2\cos\frac{\pi}{2^4}=\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}$ (3 radicales)

$\therefore \cos\frac{\pi}{16}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2}$

- $2\text{sen}\frac{\pi}{64}=2\text{sen}\frac{\pi}{2^6}=\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}$ (5 radicales)

$\therefore \text{sen}\frac{\pi}{64}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}}{2}$

Otras identidades para el arco mitad

Demostrar

$$\tan\left(\frac{x}{2}\right)=\csc x-\cot x \quad \ldots\ xiii$$

Desarrollando en el segundo miembro

$$\tan\left(\frac{x}{2}\right)=\frac{1}{\text{sen}x}-\frac{\cos x}{\text{sen}x}$$

Por identidades de arco doble

$$\tan\left(\frac{x}{2}\right)=\frac{2\text{sen}^2\frac{x}{2}}{2\text{sen}\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}$$

Simplificando

$$\tan\frac{x}{2}=\frac{\text{sen}\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}$$

$$\tan\frac{x}{2}=\tan\frac{x}{2}\quad\left(\begin{array}{l}\text{Esto es lo que se}\\ \text{buscaba demostrar}\end{array}\right)$$

En forma análoga a la demostración anterior, se deja para el lector la demostración de la identidad

$$\cot\left(\frac{x}{2}\right)=\csc x+\cot x \quad \ldots\ xiv$$

En los siguientes ejemplos se han aplicado las identidades (*xiii*) y (*xiv*)

- $\tan\left(\frac{37^\circ}{2}\right)=\csc 37^\circ-\cot 37^\circ=\frac{5}{3}-\frac{4}{3}=\frac{1}{3}$
- $\cot(15^\circ)=\csc 30^\circ+\cot 30^\circ=2+\sqrt{3}$
- $\tan\left(\frac{\pi}{8}\right)=\csc\left(\frac{\pi}{4}\right)-\cot\left(\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}-1$
- $\tan\theta=\csc 2\theta-\cot 2\theta$
- $\cot\left(\frac{\theta}{4}\right)=\csc\frac{\theta}{2}+\cot\frac{\theta}{2}$
- $\tan 3\alpha=\csc 6\alpha-\cot 6\alpha$
- $\cot 2x=\csc 4x+\cot 4x$

Observación

1) $\tan\left(\dfrac{x}{2}\right)=\csc x-\underbrace{\cot x}$ .... 1$^{er.}$ paso

$\tan\left(\dfrac{x}{2}\right)=\csc x-(\csc 2x+\underbrace{\cot 2x})$ .... 2do paso

$\tan\left(\dfrac{x}{2}\right)=\csc x-\csc 2x-(\csc 4x+\underbrace{\cot 4x})$ .... 3er. paso

$\tan\left(\dfrac{x}{2}\right)=\csc x-\csc 2x-\csc 4x-(\csc 8x+\cot 8x)$ .... 4to. paso

Análogamente

$\tan\dfrac{x}{2}=\csc x-\csc 2x-\csc 4x-\csc 8x-....-(\csc 2^n x+\cot 2^n x)$ .... n^{vo}. paso

Ordenando la igualdad se tiene

$$\csc x-\csc 2x-\csc 4x-\csc 8x-....-\csc 2^n x=\tan\frac{x}{2}+\cot 2^n x$$

2) $\cot\left(\dfrac{x}{2}\right)=\csc x+\underbrace{\cot x}$ .... 1er. paso

$\cot\left(\dfrac{x}{2}\right)=\csc x+(\csc 2x+\underbrace{\cot 2x})$ .... 2do. paso

$\cot\left(\dfrac{x}{2}\right)=\csc x+\csc 2x+(\csc 4x+\underbrace{\cot 4x})$ .... 3er. paso

$\cot\left(\dfrac{x}{2}\right)=\csc x+\csc 2x+\csc 4x+(\csc 8x+\cot 8x)$ .... 4to. paso

Análogamente

$\cot\dfrac{x}{2}=\csc x+\csc 2x+\csc 4x+\csc 8x+...+\csc 2^n x+\cot 2^n x$ .... n^{vo} paso

Ordenando la igualdad se tiene

$$\csc x+\csc 2x+\csc 4x+\csc 8x+...+\csc 2^n x=\cot\frac{x}{2}-\cot 2^n x$$

sumando las identidades dadas en la observación se obtiene

$$\tan\frac{x}{2}+\cot\frac{x}{2}=2\csc x \quad .... \ xv$$

y, restando las mismas identidades se obtiene

$$\cot\frac{x}{2}-\tan\frac{x}{2}=2\cot x \quad .... \ xvi$$

En los ejemplos siguientes se han utilizado las identidades *xv* o *xvi*

- $\tan 10° + \cot 10° = 2\csc 20°$
- $\cot\theta-\tan\theta=2\cot 2\theta$
- $\tan\left(\dfrac{\pi}{12}\right)+\cot\left(\dfrac{\pi}{12}\right) = 2\csc\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = 2\times 2 = 4$
- $\cot\left(\dfrac{\pi}{8}\right)-\tan\left(\dfrac{\pi}{8}\right) = 2\cot\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 2\times 1 = 2$

Identidades para el ángulo triple (3x)

$$\boxed{\text{sen}3x = 3\text{sen}x - 4\text{sen}^3x} \quad \dots.\ xvii$$

Demostración

$$\text{sen}3x = \text{sen}(2x+x)$$
$$\text{sen}3x = \text{sen}2x\cos x + \cos2x\,\text{sen}x$$
$$\text{sen}3x = 2\text{sen}x\cos x\cos x + (1-2\text{sen}^2x)\text{sen}x$$
$$\text{sen}3x = 2\text{sen}x\cos^2x + (1-2\text{sen}^2x)\text{sen}x$$
$$\text{sen}3x = 2\text{sen}x(1-\text{sen}^2x) + (1-2\text{sen}^2x)\text{sen}x$$
$$\text{sen}3x = 2\text{sen}x - 2\text{sen}^3x + \text{sen}x - 2\text{sen}^3x$$
$$\text{sen}3x = 3\text{sen}x - 4\text{sen}^3x$$

En forma análoga se demuestra la identidad

$$\boxed{\cos3x = 4\cos^3x - 3\cos x} \quad \dots\ xviii$$

Por Identidades de Arcos Compuestos se tiene

$$\tan(A+B+C) = \frac{\tan A + \tan B + \tan C - \tan A\tan B\tan C}{1 - \tan A\tan B - \tan A\tan C - \tan B\tan C}$$

haciendo A=x, B=x, C=x, obtendremos

$$\tan(x+x+x) = \frac{\tan x + \tan x + \tan x - \tan x\tan x\tan x}{1 - \tan x\tan x - \tan x\tan x - \tan x\tan x}$$

reduciendo obtenemos la fórmula para el ángulo triple

$$\boxed{\tan3x = \frac{3\tan x - \tan^3x}{1-3\tan^2x}} \quad \dots\ xix$$

despejando 4sén^3x y $4\cos^3x$ de las identidades *xviii* y *xix* se obtienen las siguientes identidades (de Degradación) respectivamente:

$$\boxed{4\text{sen}^3x = 3\text{sen}x - \text{sen}3x} \quad \dots.\ xx$$

$$\boxed{4\cos^3x = 3\cos x + \cos3x} \quad \dots.\ xxi$$

Demostrar

$$\boxed{\text{sen}3x = \text{sen}x(2\cos2x+1)} \quad \dots.\ xxii$$

De la identidad *xvi*, tenemos

$$\text{sen}3x = 3\text{sen}x - 4\text{sen}^3x$$
$$\text{sen}3x = \text{sen}x(3 - 4\text{sen}^2x)$$
$$\text{sen}3x = \text{sen}x(3 - 2(2\text{sen}^2x))$$
$$\text{sen}3x = \text{sen}x(3 - 2(1-\cos2x))$$
$$\text{sen}3x = \text{sen}x(2\cos2x+1)$$

(esto es lo que se buscaba demostrar)

En forma análoga a la identidad anterior, se demuestra

$$\boxed{\cos3x = \cos x(2\cos2x-1)} \quad \dots.\ xxiii$$

EJERCICIOS

Utilizando la identidad del ángulo triple, reduzca o calcule las siguientes expresiones y luego compare sus resultados obtenidos con las respuestas que se muestran.

a) $3\text{sen}20° - 4\text{sen}^3 20° =$ ___________

b) $4\cos^3 2x - 3\cos2x =$ ___________

c) $\dfrac{3\tan10° - \tan^3 10°}{1-3\tan^2 10°} =$ ___________

d) $3\cos\left(\dfrac{\theta}{2}\right) + \cos3\left(\dfrac{\theta}{2}\right) =$ ___________

e) $\dfrac{2\cos2x+1}{2\cos2x-1} =$ ___________

f) $\dfrac{\text{sen}3x}{\text{sen}x} - \dfrac{\cos3x}{\cos x} =$ ___________

RESPUESTAS

a) $\text{sen}60°$ ó $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

b) $\cos6x$

c) $\tan30°$ ó $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

d) $4\cos^3\dfrac{\theta}{2}$

e) $\dfrac{\tan3x}{\tan x}$

f) 2

Ejemplo 2

Calcule sen18° y cos36° (sin calculadora)

Resolución

Sabemos que se cumple: sen36° = cos54°

(Esto por Razones Trigonométricas de Ángulos Complementarios).

$\underline{\text{sen}(2(18°))} = \cos(3(18°))$

Utilizando identidades de arco doble y triple

$2\text{sen}18°\cos18° = 4\cos^3 18° - 3\cos18°$

$2\text{sen}18°\cancel{\cos18°} = \cancel{\cos18°}[4\cos^2 18° - 3]$

$2\text{sen}18° = 4\underbrace{\cos^2 18°} - 3$

$2\text{sen}18° = 4(1-\text{sen}^2 18°) - 3$

$4\text{sen}^2 18° + 2\text{sen}18° - 1 = 0$

$x = \text{sen}18°$

$4x^2 + 2x - 1 = 0$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4(4)(-1)}}{2(4)} = \frac{-2 \pm \sqrt{20}}{8}$$

$$x = \frac{-2 \pm 2\sqrt{5}}{8} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{4}$$

luego

$$x = \frac{-1+\sqrt{5}}{4} \quad \text{ó} \quad x = \frac{-1-\sqrt{5}}{4}$$

como sen18° es positivo y menor a uno, entonces

$$x = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}$$

Luego

$$\text{sen}18° = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$$

de la identidad (*iv*) tenemos

$\cos36° = 1 - 2\text{sen}^2 18°$

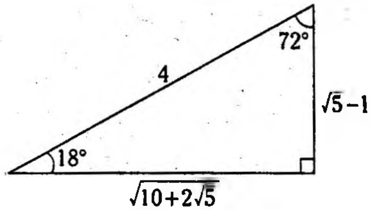
$$\cos36° = 1 - 2\left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)^2$$

$$\cos36° = 1 - 2\left(\frac{6-2\sqrt{5}}{16}\right)$$

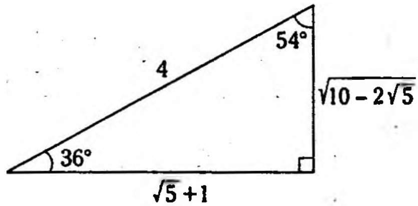
Efectuando

$$\cos36° = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$$

Luego podemos plantear los siguientes triángulos



(a)



(b)

Figura 5.21

Ejemplo 3

Determine el valor de la expresión

$$M = \cos84°\cos24°$$

Resolución

$$M = \underline{\cos84°}\,\underline{\cos24°}$$

$$M = \text{sen}6°\ \text{sen}66°$$

$$4\text{sen}54°M = 4\text{sen}6°\text{sen}66°\text{sen}54°$$

$$(4\cos36°)M = \underbrace{4\text{sen}6°\text{sen}(60°+6°)\text{sen}(60°-6°)}_{\text{sen}18°}$$

$$\Rightarrow (4\cos36°)M = \text{sen}18°$$

$$\Rightarrow M = \frac{\text{sen}18°}{4\cos36°};\ \text{sen}18° = \frac{\sqrt{5}-1}{4};\ \cos36° = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$$

Reemplazando los valores

$$M = \frac{\frac{\sqrt{5}-1}{4}}{\cancel{4}\left(\frac{\sqrt{5}+1}{\cancel{4}}\right)}$$

$$\therefore M = \frac{3-\sqrt{5}}{8}$$

Problemas Resueltos

Problema 1

Del gráfico, calcule $M = \cos 2x \cos 4x$ si $DC = 1$ y $BC = 4/3$

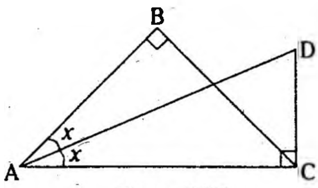


Figura 5.22

Resolución

- En el $\triangle ACD$

$AC = \underbrace{DC}\cot x$

$AC = 1(\cot x)$

$\Rightarrow AC = \cot x$ ...(1)

- En el $\triangle ABC$

$AC = \underbrace{BC}\csc 2x$

$\Rightarrow AC = \frac{4}{3}\csc 2x$ ... (2)

De (1) y (2) obtenemos

$$\underbrace{\cot x} = \frac{4}{3}\ \underbrace{\csc 2x}$$

$$\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} = \frac{4}{3} \times \frac{1}{\operatorname{sen} 2x}$$

$$\frac{\cos x}{\cancel{\operatorname{sen} x}} = \frac{4}{3} \times \frac{1}{2\cancel{\operatorname{sen} x}\cos x}$$

$$\cos x = \frac{2}{3\cos x}$$

$$\cos^2 x = \frac{2}{3}$$

como $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$

$$\Rightarrow \cos 2x = 2 \times \frac{2}{3} - 1 = \frac{1}{3}$$

Sabemos que $\cos 4x = 2\cos^2 2x - 1$

$$\Rightarrow \cos 4x = 2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 - 1 = \frac{-7}{9}$$

Finalmente reemplazamos

$\cos 2x = 1/3$ y $\cos 4x = -7/9$ en M

obtendremos $M = (1/3)(-7/9) = -7/27$

Problema 2

Si se cumple

$$\tan^2 a - \tan^2 b = \tan a.\tan b$$

calcule $M = \dfrac{\operatorname{sen} 2a.\operatorname{sen} 2b}{\operatorname{sen}(a+b).\operatorname{sen}(a-b)}$ ....(1)

Resolución

Como $\underline{\tan^2 \alpha - \tan^2 b} = \tan a.\tan b$

$$\underline{(\tan a + \tan b)(\tan a - \tan b)} = \tan a.\tan b$$

$$\frac{\operatorname{sen}(a+b)}{\cos a \cos b}\,\frac{\operatorname{sen}(a-b)}{\cos a.\cos b} = \tan a.\tan b$$

(revise el problema 16, página 318)

pasando a senos y cosenos el segundo miembro

$$\Rightarrow \frac{\operatorname{sen}(a+b)}{\cos a \cos b}.\frac{\operatorname{sen}(a-b)}{\cancel{\cos a}\,\cancel{\cos b}} = \frac{\operatorname{sen} a}{\cancel{\cos b}}.\frac{\operatorname{sen} b}{\cancel{\cos b}}$$

$$\Rightarrow \operatorname{sen}(a+b).\operatorname{sen}(a-b) = \underline{\operatorname{sen} a \cos a}.\underline{\operatorname{sen} b \cos b}$$

Por arco doble $\quad \dfrac{\operatorname{sen} 2a}{2} \cdot \dfrac{\operatorname{sen} 2b}{2}$

de donde obtenemos

$4\operatorname{sen}(a+b).\operatorname{sen}(a-b) = \operatorname{sen} 2a.\operatorname{sen} 2b$ o también

$\operatorname{sen} 2a.\operatorname{sen} 2b = 4\operatorname{sen}(a+b).\operatorname{sen}(a-b)$ ... (2)

Reemplazando (2) en (1)

$$M = \frac{4\operatorname{sen}(a+b).\operatorname{sen}(a-b)}{\operatorname{sen}(a+b).\operatorname{sen}(a-b)}$$

$\therefore M = 4$

Propiedades

$$4\text{sen}x\,\text{sen}(60°-x)\text{sen}(60°+x)=\text{sen}3x$$
$$4\cos x\cos(60°-x)\cos(60°+x)=\cos 3x$$
$$\tan x\tan(60°-x)\tan(60°+x)=\tan 3x$$

De las propiedades anteriores, demostraremos la primera de ellas.

$$4\,\text{sen}\,x\,\text{sen}(60°-x)\text{sen}(60°+x)=\text{sen}\,3x$$

Para el producto $\text{sen}(60°-x)\text{sen}(60°+x)$ aplicamos la identidad siguiente

$$\text{sen}(\alpha+\beta)\text{sen}(\alpha-\beta)=\text{sen}^2\alpha-\text{sen}^2\beta$$

obteniendo

$$4\text{sen}x(\text{sen}^2 60°-\text{sen}^2 x)=\text{sen}3x$$

$$4\,\text{sen}\,x\left(\frac{3}{4}-\text{sen}^2 x\right)=\text{sen}\,3x$$

$$3\text{sen}x-4\text{sen}^3 x=\text{sen}3x$$

$\text{sen}3x=\text{sen}3x$ (esto es lo que se buscaba demostrar)

Ejemplo 1

- $4\text{sen}20°\text{sen}(60°-20°)\text{sen}(60°+20°)=\text{sen}(3(20°))=\text{sen}60°$

  $$\therefore \text{sen}\,20°\,\text{sen}\,40°\,\text{sen}\,80°=\frac{\text{sen}\,60°}{4}=\frac{\sqrt{3}/2}{4}=\frac{\sqrt{3}}{8}$$

- $$\cos 6°\cos 54°\cos 66°=\frac{4\cos 6°\cos(60°-6°)\cos(60°+6°)}{4}=\frac{\cos(3(6°))}{4}=\frac{\cos 18°}{4}$$

- $$\tan\theta\tan\left(\frac{\pi}{3}+\theta\right)\tan\left(\frac{2\pi}{3}+\theta\right)=\tan\theta\tan\left(\frac{\pi}{3}+\theta\right)\left[-\tan\left(\frac{\pi}{3}-\theta\right)\right]$$

  $$\tan\theta\tan\left(\frac{\pi}{3}+\theta\right)\tan\left(\frac{2\pi}{3}+\theta\right)=\underbrace{-\tan\theta\tan\left(\frac{\pi}{3}-\theta\right)\tan\left(\frac{\pi}{3}+\theta\right)}_{\tan 3\theta}$$

  $$\therefore \tan\theta\tan\left(\frac{\pi}{3}+\theta\right)\tan\left(\frac{2\pi}{3}+\theta\right)=-\tan 3\theta$$

- $$\tan\frac{\pi}{7}\cdot\tan\frac{10\pi}{21}\cdot\tan\frac{4\pi}{21}=\underbrace{\tan\frac{\pi}{7}\cdot\tan\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{7}\right)\tan\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{7}\right)}_{\tan 3\pi/7}$$

  $$\therefore \tan\frac{\pi}{7}\tan\frac{10\pi}{21}\tan\frac{4\pi}{21}=\tan\frac{3\pi}{7}$$

- $$4\text{sen}\frac{8\pi}{15}\cdot\text{sen}\frac{2\pi}{15}\cdot\cos\frac{3\pi}{10}=\underbrace{4\text{sen}\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{5}\right)\text{sen}\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{5}\right)\text{sen}\frac{\pi}{5}}_{\text{sen}3\pi/5}$$

  $$\therefore 4\,\text{sen}\frac{8\pi}{15}\cdot\text{sen}\frac{2\pi}{15}\cdot\cos\frac{3\pi}{10}=\text{sen}\frac{3\pi}{5}$$

Problema 3

Si $\frac{\cos B}{3}=\frac{\text{sen}B}{7}$, calcule $E=\frac{\tan 2B+\cot 2B}{\sec 2B+\csc 2B}$

Resolución

Reduciendo E

Expresando a senos y cosenos

$$E=\frac{\frac{\text{sen}2B}{\cos 2B}+\frac{\cos 2B}{\text{sen}2B}}{\frac{1}{\cos 2B}+\frac{1}{\text{sen}2B}}$$

operando $E=\dfrac{\frac{\text{sen}^2 2B+\cos^2 2B}{\cos 2B\,\text{sen}2B}}{\frac{\text{sen}2B+\cos 2B}{\cos 2B\,\text{sen}2B}}$

$$E=\frac{\frac{1}{\cancel{\cos 2B}\,\cancel{\text{sen}2B}}}{\frac{\text{sen}2B+\cos 2B}{\cancel{\cos 2B}\,\cancel{\text{sen}2B}}}$$

$$E=\frac{1}{\text{sen}2B+\cos 2B}$$

Utilizando el triángulo del arco doble

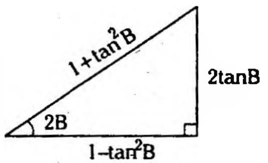


Figura 5.23

$$E=\frac{1}{\frac{2\tan B}{1+\tan^2 B}+\frac{1-\tan^2 B}{1+\tan^2 B}}=\frac{1+\tan^2 B}{2\tan B+1-\tan^2 B}\quad ...(*)$$

del dato sabemos que

$$\frac{\cos B}{3}=\frac{\text{sen}B}{7}\Rightarrow\frac{\text{sen}B}{\cos B}=\frac{7}{3}$$

$$\Rightarrow\ \tan B=\frac{7}{3}$$

Reemplazando $\tan B=\frac{7}{3}$ en E, se obtiene

$\therefore E=29$

Problema 4

Demuestre la identidad

$$\boxed{\text{sen}^4 x+\cos^4 x=\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\cos 4x}$$

Demostración

Para esta demostración debemos recordar que

$\text{sen}^4 x+\cos^4 x=1-2\text{sen}^2 x\cos^2 x$

$2\text{sen}^2 x=1-\cos 2x$

$\text{sen}2x=2\text{sen}x\cos x$

Partimos de

$$\text{sen}^4 x+\cos^4 x=1-2\text{sen}^2 x\cos^2 x$$

$$\Rightarrow \text{sen}^4 x+\cos^4 x=1-2(\text{sen}x\cos x)^2$$

... por las leyes de exponentes

$$\text{sen}^4 x+\cos^4 x=1-2\left(\frac{2\text{sen}x\cos x}{2}\right)^2$$

$$\text{sen}^4 x+\cos^4 x=1-2\times\frac{1}{4}(\text{sen}2x)^2$$

$$\text{sen}^4 x+\cos^4 x=1-\frac{1}{2}\text{sen}^2 2x$$

$$\text{sen}^4 x+\cos^4 x=1-\frac{1}{2}\frac{\overbrace{2\text{sen}^2 2x}}{2}=1-\frac{1}{4}\overbrace{(1-\cos 4x)}$$

$$\text{sen}^4 x+\cos^4 x=1-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\cos 4x$$

$\therefore\ \text{sen}^4 x+\cos^4 x$

$=\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\cos 4x$ (esto es lo que se buscaba demostrar)

Observación

También sabemos que

$\text{sen}^6 x+\cos^6 x=1-3\text{sen}^2 x\cos^2 x$

entonces, en forma análoga al problema anterior, se demuestra que

$$\text{sen}^6 x+\cos^6 x=\frac{5}{8}+\frac{3}{8}\cos 4x$$

Problema 5

Determine el intervalo de valores de

$\text{sen}^8x+\cos^8x$

Resolución

$\text{sen}^8x+\cos^8x=(\underline{\text{sen}^4x+\cos^4x})^2-2\text{sen}^4x\cos^4x$

Aplicando la identidad

$a^8+b^8=(a^4+b^4)^2-2a^4b^4$

$\text{sen}^8x+\cos^8x=(1-2\text{sen}^2x\cos^2x)^2-2\text{sen}^4x\cos^4x$

$\text{sen}^8x+\cos^8x=1-4\text{sen}^2x\cos^2x+4\text{sen}^4x\cos^4x$
$-2\text{sen}^4x\cos^4x$

$\text{sen}^8x+\cos^8x=1-4\text{sen}^2x\cos^2x+2\text{sen}^4x\cos^4x$

Agrupando y completando cuadrados

$\text{sen}^8x+\cos^8x=2\left[\underline{\text{sen}^4x\cos^4x-2\text{sen}^2x\cos^2x+1}\right]-2+1$

$\text{sen}^8x+\cos^8x=1+2\ (\text{sen}^2x\cos^2x-1)^2-2$

De $\text{sen}2x=2\text{sen}x\cos x$

Elevando al cuadrado obtenemos que

$$\text{sen}^2x\cos^2x=\frac{\text{sen}^22x}{4}$$

Entonces tenemos

$$\text{sen}^8x+\cos^8x=2\left(\frac{\text{sen}^22x}{4}-1\right)^2-1$$

para $\text{sen}^8x+\cos^8x$, $x\in\mathbb{R}$, entonces $2x\in\mathbb{R}$

por lo tanto

$-1\leq\text{sen}2x\leq1\ \Rightarrow0\leq\text{sen}^22x\leq1$

multiplicando por 1/4

$$0\leq\frac{\text{sen}^22x}{4}\leq\frac{1}{4}$$

sumando –1

$$-1\leq\frac{\text{sen}^22x}{4}-1\leq\frac{-3}{4}$$

elevando al cuadrado

$$\frac{9}{16}\leq\left(\frac{\text{sen}^22x}{4}-1\right)^2\leq1$$

multiplicando por 2 $\frac{9}{8}\leq2\left(\frac{\text{sen}^22x}{4}-1\right)^2\leq2$

sumando –1 $\frac{1}{8}\leq\underline{2\left(\frac{\text{sen}^22x}{4}-1\right)^2-1}\leq1$

$$\therefore\ \frac{1}{8}\leq\text{sen}^8x+\cos^8x\leq1$$

Nota

En el capítulo X se demostrará que en general se cumple

$$\frac{1}{2^{n-1}}\leq\text{sen}^{2n}x+\cos^{2n}x\leq1\quad;\forall x\in\mathbb{R}\ \wedge\ n\in\mathbb{Z}^+$$

Ejemplo 1

- $\frac{1}{4}\leq\text{sen}^6x+\cos^6x\leq1$
- $\frac{1}{8}\leq\text{sen}^8x+\cos^8x\leq1$
- $\frac{1}{16}\leq\text{sen}^{10}x+\cos^{10}x\leq1$

Ejemplo 2

Determine el mínimo valor de la expresión.

$k=\text{sen}^8\theta+\cos^8\theta+\text{sen}^2\theta\cos^2\theta(\text{sen}^4\theta+\cos^4\theta)$

Resolución

$k=\underline{\text{sen}^8\theta}+\underline{\cos^8\theta}+\underline{\text{sen}^6\theta\cos^2\theta}+\underline{\text{sen}^2\theta\cos^6\theta}$

Agrupando

$k=\text{sen}^6\theta(\text{sen}^2\theta+\cos^2\theta)+\cos^6\theta(\cos^2\theta+\text{sen}^2\theta)$

$k=\text{sen}^6\theta+\cos^6\theta$

$\therefore$ El valor mínimo de k es 1/4

Problema 6

Si se cumple la siguiente identidad
$\cos^6x-\cos^2x\,\text{sen}^4x+\text{sen}^2x\cos^4x-\text{sen}^6x=m\cos(nx)$,
calcule m+n.

Resolución

Para dar la forma del 2do. miembro al 1er. miembro, en este factorizamos $\cos^2x$ para los dos primeros términos, análogamente factorizamos sen^2x para los dos últimos términos, obteniendo

$$\cos^2x(\cos^4x-\text{sen}^4x)+\text{sen}^2x(\cos^4x-\text{sen}^4x)=m\cos(nx)\ldots(1)$$

pero

$$\cos^4x-\text{sen}^4x=\underbrace{(\cos^2x+\text{sen}^2x)}_{1}\underbrace{(\cos^2x-\text{sen}^2x)}_{\cos 2x}$$

$\cos^4x-\text{sen}^4x=\cos 2x$ ... (2)

Reemplazando (2) en (1)

$$\cos^2x\cos 2x+\text{sen}^2x\cos 2x=m\cos(nx)$$

$$\cos 2x\underbrace{(\cos^2x+\text{sen}^2x)}_{1}=m\cos(nx)$$

$$\cos 2x=m\cos(nx)\Rightarrow m=1\wedge n=2$$

$$\cos(-2x)=m\cos(nx)\Rightarrow m=1\wedge n=-2$$

se observa que (m+n) puede ser igual a 3 ó –1

Problema 7

Reduzca

$$Y=\sqrt{1+\text{sen}\theta}+\cos\frac{\pi}{4}(\sqrt{1+\cos\theta}+\sqrt{1-\cos\theta})$$

si $\theta\in\left\langle\frac{3\pi}{2};2\pi\right\rangle$

Resolución

Observación

$$1+\text{sen}\theta=\text{sen}^2\frac{\theta}{2}+\cos^2\frac{\theta}{2}+2\text{sen}\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}=\left(\text{sen}\frac{\theta}{2}+\cos\frac{\theta}{2}\right)^2$$

De donde $(1+\text{sen}\theta)^2=\left(\text{sen}\frac{\theta}{2}+\cos\frac{\theta}{2}\right)^2$

En Y reemplazamos la identidad anterior en el primer radical y utilizamos las identidades de degradación en los otros dos radicales

$$Y=\sqrt{\left(\text{sen}\frac{\theta}{2}+\cos\frac{\theta}{2}\right)^2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\sqrt{2\cos^2\frac{\theta}{2}}+\sqrt{2\text{sen}^2\frac{\theta}{2}}\right)$$

$$Y=\left|\text{sen}\frac{\theta}{2}+\cos\frac{\theta}{2}\right|+\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\sqrt{2}\left|\cos\frac{\theta}{2}\right|+\sqrt{2}\left|\text{sen}\frac{\theta}{2}\right|\right)$$

$$Y=\left|\text{sen}\frac{\theta}{2}+\cos\frac{\theta}{2}\right|+\left|\cos\frac{\theta}{2}\right|+\left|\text{sen}\frac{\theta}{2}\right|$$

como,

$$\frac{3\pi}{2}<\theta<2\pi\Rightarrow\frac{3\pi}{4}<\frac{\theta}{2}<\pi$$

En la figura se tiene una C.T. con una ubicación de $\frac{\theta}{2}$ según el dato, donde se observa que para todo $\frac{\theta}{2}\in\left\langle\frac{3\pi}{4};\pi\right\rangle$, se cumple

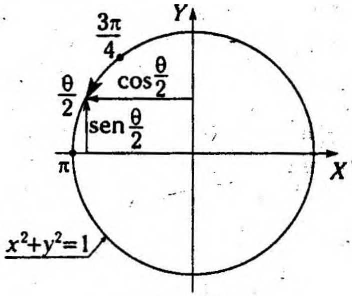


Figura 5.24

- $\text{sen}\frac{\theta}{2}>0\Rightarrow\left|\text{sen}\frac{\theta}{2}\right|=\text{sen}\frac{\theta}{2}$
- $\cos\frac{\theta}{2}<0\Rightarrow\left|\cos\frac{\theta}{2}\right|=-\cos\frac{\theta}{2}$

- $\left|\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\right|<\left|\cos\frac{\theta}{2}\right| \Rightarrow \operatorname{sen}\frac{\theta}{2}<-\cos\frac{\theta}{2}$

$$\Rightarrow \operatorname{sen}\frac{\theta}{2}+\cos\frac{\theta}{2}<0$$

$$\Rightarrow \left|\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}+\cos\frac{\theta}{2}\right|=-\left(\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}+\cos\frac{\theta}{2}\right)$$

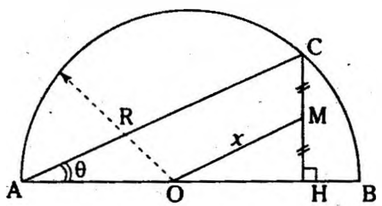
Todo lo deducido de la figura anterior, lo reemplazamos en (1)

$$Y=-\left(\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}+\cos\frac{\theta}{2}\right)-\cos\frac{\theta}{2}+\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}$$

$$\therefore\ Y=-2\cos\frac{\theta}{2}$$

Problema 8

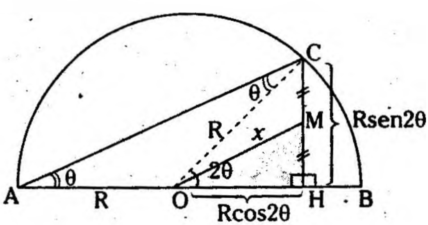
Siendo O centro de la semicircunferencia, donde $x^2=f(4\theta)$. Calcule $f(\pi/4)$ si $R=(\sqrt{10-3\sqrt{2}})$u



(a)

Resolución

En la figura se ha trazado $\overline{OC}$, donde ΔAOC es isósceles.



(b)

Figura 5.25

En el ⊿OHC por resolución de triángulos rectángulos, tenemos

$$CH=R\operatorname{sen}2\theta \quad \wedge \quad OH=R\cos 2\theta$$

Como M es punto medio, tenemos

$$MH=\frac{CH}{2}=\frac{R}{2}\operatorname{sen}2\theta$$

En el ⊿OHM, aplicamos el Teorema de Pitágoras

$$OM^2=OH^2+MH^2$$

$$\Rightarrow x^2=(R\cos 2\theta)^2+\left(\frac{R}{2}\operatorname{sen}2\theta\right)^2$$

$$x^2=R^2\cos^2 2\theta+\frac{R^2}{4}\operatorname{sen}^2 2\theta$$

$$x^2=\frac{R^2}{8}(8\cos^2 2\theta+2\operatorname{sen}^2 2\theta)$$

$$x^2=\frac{R^2}{8}(4\times\underbrace{2\cos^2 2\theta}+\underbrace{2\operatorname{sen}^2 2\theta})$$

$$x^2=\frac{R^2}{8}(4(1+\cos 4\theta)+1-\cos 4\theta)$$

$$x^2=\frac{R^2}{8}(5+3\cos 4\theta)$$

como $x^2=f(4\theta)$ por condición, reemplazando tenemos

$$f(4\theta)=\frac{R^2}{8}(5+3\cos 4\theta)$$

para $4\theta=\frac{\pi}{4}$

$$\Rightarrow f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{R^2}{8}\left(5+3\cos\frac{\pi}{4}\right)$$

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\left(\sqrt{10-3\sqrt{2}}\right)^2}{8}\left(5+\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\left(\frac{10-3\sqrt{2}}{8}\right)\left(\frac{10+3\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$\therefore\ f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{41}{8}$$

Problema 9

$\cos 2x = n$, escriba la expresión M en términos de n, si $M = \left(\dfrac{\tan x}{\text{sen}2x} - 2\text{sen}^2 x\right)\cos^2 x$

Resolución

$$M = \left(\frac{\frac{\text{sen}x}{\cos x}}{2\text{sen}x\cos x} - 2\text{sen}^2 x\right)\cos^2 x$$

$$M = \left(\frac{1}{2\cos^2 x} - 2\text{sen}^2 x\right)\cos^2 x$$

$$M = \left(\frac{1 - 2^2\text{sen}^2 x\cos^2 x}{2\cos^2 x}\right)\cos^2 x$$

$$M = \frac{1 - \text{sen}^2 2x}{2}$$

$$\Rightarrow M = \frac{1}{2}\cos^2 2x, \quad \cos 2x = n \quad \text{por dato}$$

$$\therefore \quad M = \frac{1}{2}n^2$$

Problema 10

Sabiendo que $x = \dfrac{\pi}{24}$ determine el valor de

$$P = \text{sen}x\cos^3 x - \text{sen}^3 x\cos x$$

Resolución

$$P = \text{sen}x\cos x(\underbrace{\cos^2 x - \text{sen}^2 x}_{\cos 2x})$$

$$2P = \underbrace{2\text{sen}x\cos x}_{\text{sen}2x}\cos 2x$$

$$4P = 2\text{sen}2x\cos 2x = \text{sen}4x$$

$$P = \frac{\text{sen}4x}{4}$$

sustituyendo el valor de x $\left(x = \dfrac{\pi}{24}\right)$

$$\Rightarrow P = \frac{\text{sen}\frac{\pi}{6}}{4} = \frac{\frac{1}{2}}{4}$$

$$\therefore P = \frac{1}{8}$$

Problema 11

Simplifique la siguiente expresión

$$F = \frac{\text{sen}x + \cos x - 1}{\sqrt{1 - \text{sen}x}}\ ; \forall x \in \left\langle \frac{\pi}{4} ; \frac{\pi}{2} \right\rangle$$

Resolución

$$F = \frac{\text{sen}x - (1 - \cos x)}{\sqrt{1 - \text{sen}x}} = \frac{2\text{sen}\frac{x}{2}.\cos\frac{x}{2} - 2\text{sen}^2\frac{x}{2}}{\sqrt{\text{sen}^2\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2} - 2\text{sen}\frac{x}{2}.\cos\frac{x}{2}}}$$

$$F = \frac{2\text{sen}\frac{x}{2}\left(\cos\frac{x}{2} - \text{sen}\frac{x}{2}\right)}{\sqrt{\left(\cos\frac{x}{2} - \text{sen}\frac{x}{2}\right)^2}} = \frac{2\text{sen}\frac{x}{2}\left(\cos\frac{x}{2} - \text{sen}\frac{x}{2}\right)}{\left|\cos\frac{x}{2} - \text{sen}\frac{x}{2}\right|} \quad ...(I)$$

de la condición $0 < x < \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow 0 < \dfrac{x}{2} < \dfrac{\pi}{4}$

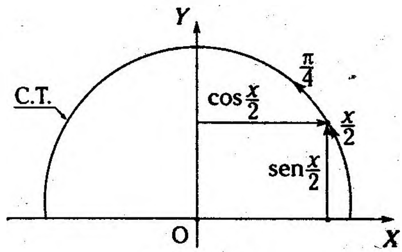


Figura 5.26

Analizando en la circunferencia trigonométrica se cumple $\cos\dfrac{x}{2} > \text{sen}\dfrac{x}{2}$

es decir $\cos\dfrac{x}{2} - \text{sen}\dfrac{x}{2} > 0$

luego el equivalente será

$$\left|\cos\frac{x}{2} - \text{sen}\frac{x}{2}\right| = \cos\frac{x}{2} - \text{sen}\frac{x}{2}$$

Reemplazando en (I) y simplificando, se tiene

$$\therefore F = 2\text{sen}\frac{x}{2}$$

Problema 12

Siendo $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{12}-\frac{x}{2}\right)=\frac{\sqrt{2}}{4}$

calcule $H=\sqrt{3}\cos x+\operatorname{sen}x$

Resolución

Recordando la identidad $\cos 2\theta=1-2\operatorname{sen}^2\theta$, tenemos

$$\cos 2\left(\frac{\pi}{12}-\frac{x}{2}\right)=1-2\operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{12}-\frac{x}{2}\right)$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{6}-x\right)=1-2\operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{12}-\frac{x}{2}\right)$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{6}-x\right)=1-2\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2=\frac{3}{4}$$

Desarrollando el primer miembro

$$\cos\frac{\pi}{6}\cos x+\operatorname{sen}\frac{\pi}{6}\operatorname{sen}x=\frac{3}{4}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x+\frac{1}{2}\operatorname{sen}x=\frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow\ \sqrt{3}\cos x+\operatorname{sen}x=\frac{3}{2}\qquad \therefore\ H=\frac{3}{2}$$

Problema 13

Calcule la suma del valor máximo y mínimo de

$W=\cos^2x+\operatorname{sen}x\cos x$

Resolución

Degradamos, para el efecto multiplicamos por 2 a W, obteniendo

$2W=2\cos^2x+2\operatorname{sen}x\cos x$

$2W=1+\cos 2x+\operatorname{sen}2x$

se sabe de la propiedad de arco compuesto

$-\sqrt{2}\le\cos 2x+\operatorname{sen}2x\le\sqrt{2}$

sumando 1

$1-\sqrt{2}\le 1+\cos 2x+\operatorname{sen}2x\le 1+\sqrt{2}$

$1-\sqrt{2}\le 2W\le 1+\sqrt{2}$

$$\frac{1-\sqrt{2}}{2}\le W\le\frac{1+\sqrt{2}}{2}$$

de donde

$$W_{máx}=\frac{1+\sqrt{2}}{2}\quad y\quad W_{mín}=\frac{1-\sqrt{2}}{2}$$

$\therefore\ W_{máx}+W_{mín}=1$

Problema 14

Halle el valor numérico de la expresión siguiente

$$B=\frac{\left[(1+\tan x)^2-2\right]\left[2-(1-\tan x)^2\right]}{\sec^4x}$$

cuando x toma el valor de 7°30'

Resolución

Efectuando el numerador

$$B=\frac{[\tan^2x+2\tan x-1][1-\tan^2x+2\tan x]}{(1+\tan^2x)^2}$$

$$B=\frac{\left[2\tan x-(1-\tan^2x)\right]}{1+\tan^2x}\,\frac{\left[2\tan x+(1-\tan^2x)\right]}{1+\tan^2x}$$

$$B=\left[\frac{2\tan x}{1+\tan^2x}-\frac{1-\tan^2x}{1+\tan^2x}\right]\left[\frac{2\tan x}{1+\tan^2x}+\frac{1-\tan^2x}{1+\tan^2x}\right]$$

Identificando cada término tenemos

$B=[\operatorname{sen}2x-\cos 2x][\operatorname{sen}2x+\cos 2x]$

$B=\operatorname{sen}^2x-\cos^2 2x=-(\cos^2 2x-\operatorname{sen}^2 2x)$

$\Rightarrow B=-\cos 4x$

pero $x=7°30'$

entonces $B=-\cos 30°$

$$\therefore\ B=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Problema 15

Calcule el valor de

$$E=\frac{\cot 10^\circ+\cot 80^\circ}{\sec 70^\circ}+\frac{\cot 50^\circ}{\cot 25^\circ-\cot 65^\circ}$$

Resolución

Como

$\cot 80^\circ=\tan 10^\circ$; $\sec 70^\circ=\csc 20^\circ$ y $\cot 65^\circ=\tan 25^\circ$

Reemplazando en E, tenemos

$$E=\frac{\cot 10^\circ+\tan 10^\circ}{\csc 20^\circ}+\frac{\cot 50^\circ}{\cot 25^\circ-\tan 25^\circ} \quad ...(1)$$

Por relación trigonométrica (*xv*), tenemos

$$\tan 10^\circ+\cot 10^\circ=2\csc 20^\circ \quad ...(2)$$

Por relación trigonométrica (*xvi*), tenemos

$$\cot 25^\circ-\tan 25^\circ=2\cot 50^\circ \quad ...(3)$$

(2) y (3) reemplazando en (1)

$$E=\frac{2\csc 20^\circ}{\csc 20^\circ}+\frac{\cot 50^\circ}{2\cot 50^\circ}=2+\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$$

$$\therefore\ E=\frac{5}{2}$$

Problema 16

Calcule los valores que admite

$\cos\left(\frac{\theta}{4}\right)$ a partir de $5\operatorname{sen}\theta=\operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)$

Resolución

De la condición

$$5\operatorname{sen}\theta=\operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

$$\Rightarrow 5\times 2\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}=\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}$$

$$\Rightarrow 10\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}-\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}=0$$

$$\Rightarrow \operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\left(10\cos\frac{\theta}{2}-1\right)=0$$

igualando a cero cada factor

i) $\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}=0 \Rightarrow \operatorname{sen}^2\frac{\theta}{2}=0$

$$1-\cos^2\frac{\theta}{2}=0$$

$$\cos\frac{\theta}{2}=\pm 1$$

Por relación trigonométrica

$$\cos\frac{\theta}{4}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\frac{\theta}{2}}{2}}$$

si $\cos\frac{\theta}{2}=1 \Rightarrow \cos\frac{\theta}{4}=\pm 1$

si $\cos\frac{\theta}{2}=-1 \Rightarrow \cos\frac{\theta}{4}=0$

ii) $10\cos\frac{\theta}{2}-1=0 \quad\Rightarrow\quad \cos\frac{\theta}{2}=\frac{1}{10}$

pero $\cos\left(\frac{\theta}{4}\right)=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\frac{\theta}{2}}{2}}$

$$\Rightarrow \cos\left(\frac{\theta}{4}\right)=\pm\sqrt{\frac{1+\frac{1}{10}}{2}}$$

$$\Rightarrow \cos\left(\frac{\theta}{4}\right)=\pm\sqrt{\frac{11}{20}}$$

Finalmente concluimos que $\cos\left(\frac{\theta}{4}\right)$ admite 5 valores, que son los siguientes

$$\left\{-1\ ;-\sqrt{\frac{11}{20}}\ ;\ 0\ ;\ \sqrt{\frac{11}{20}}\ ;\ 1\right\}$$

Observación

De las resoluciones de los problemas 7 y 17, podemos plantear las siguientes identidades

i) $\sqrt{1+\operatorname{sen}x}=\left|\operatorname{sen}\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right|$

ii) $\sqrt{1+\cos x}=\sqrt{2}\left|\cos\frac{x}{2}\right|$

iii) $\sqrt{1-\operatorname{sen}x}=\left|\operatorname{sen}\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}\right|$

iv) $\sqrt{1-\cos x}=\sqrt{2}\left|\operatorname{sen}\frac{x}{2}\right|$

Problema 17

Si $\cos 2\theta=\frac{-119}{169}$ $\left(\pi<\theta<\frac{3\pi}{2}\right)$

calcule el valor de

$$K=7\operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)+4\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

Resolución

Dato: $\cos 2\theta=-\frac{119}{169}$

$$2\cos^2\theta-1=-\frac{119}{169}$$

$$2\cos^2\theta=\frac{50}{169}$$

$$\cos^2\theta=\frac{25}{169}$$

$$\cos\theta=\pm\frac{5}{13}$$

como $\pi<\theta<\frac{3\pi}{2}$

entonces $\cos\theta$ es negativo

$$\therefore\ \cos\theta=-\frac{5}{13}$$

Hallando K

De la condición $\pi<\theta<\frac{3\pi}{2}$

tenemos $\frac{\pi}{2}<\frac{\theta}{2}<\frac{3\pi}{4}$

entonces $\frac{\theta}{2}\in$ IIC

utilizando identidades trigonométricas $x)\wedge xi)$ tenemos

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)=+\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}=\sqrt{\frac{1-\left(-\frac{5}{13}\right)}{2}}=\frac{3\sqrt{13}}{13}\quad\dots(1)$$

$$\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)=-\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}=-\sqrt{\frac{1+\left(-\frac{5}{13}\right)}{2}}=-\frac{2\sqrt{13}}{13}\quad\dots(2)$$

(1) y (2) lo reemplazamos en K

$$K=7\left(\frac{3\sqrt{13}}{13}\right)+4\left(-\frac{2\sqrt{13}}{13}\right)$$

$$\therefore K=\sqrt{13}$$

Problema 18

De la siguiente identidad

$\tan^3x+\cot^3x+6\csc 2x=a\csc^3bx$, calcule $(a+b)$ si $a;b>0$

Resolución

Transformamos el primer miembro a la forma del segundo miembro, para determinar los valores de a y b.

$$\underline{\tan^3x+\cot^3x}+6\csc 2x=a\csc^3bx$$

$$\underline{(\tan x+\cot x)}(\tan^2x-\underline{\tan x\cot x}+\cot^2x)+6\csc 2x=a\csc 3bx$$

Por suma de cubos

$$2\csc 2x(\underline{\tan^2 x+\cot^2 x}-1)+6\csc 2x = a\csc^3 bx$$

Por relación trigonométrica (*xix*) e identidad recíproca

$$2\csc 2x[(\underline{\tan x+\cot x})^2-2-1]+6\csc 2x = a\csc^3 bx$$

$$\Rightarrow 2\csc 2x\left[(2\csc 2x)^2-3\right]+6\csc 2x = a\csc^3 bx$$

$$\Rightarrow 2\csc 2x(4\csc^2 2x-3)+6\csc 2x = a\csc^3 bx$$

$$\Rightarrow 8\csc^3 2x-6\csc 2x+6\csc 2x = a\csc^3 bx$$

$$\Rightarrow 8\csc^3 2x = a\csc^3 bx$$

entonces, se observa que

$a=8 \wedge b=2$ ó $a=-8 \wedge b=-2$

ya que $8\csc^3 2x = -8\csc^3(-2x)$

como a ; b >0

$\Rightarrow$ $a = 8 \wedge b = 2$

$\therefore$ $a+b = 10$

Problema 19

De la siguiente igualdad

$$\sqrt[3]{\frac{\frac{1}{6}-\operatorname{sen}10^\circ}{\frac{1}{6}+\cos 20^\circ}} = A\tan 20^\circ + B \;;\quad \text{halle } (A+B)$$

Resolución

Transformando el primer miembro

$$\sqrt[3]{\frac{\frac{1}{3}\operatorname{sen}30^\circ-\operatorname{sen}10^\circ}{\frac{1}{3}\cos 60^\circ+\cos 20^\circ}} = A\tan 20^\circ + B$$

Utilizando $\operatorname{sen}30^\circ = \frac{1}{2} \wedge \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$

$$\sqrt[3]{\frac{\frac{1}{3}(3\operatorname{sen}10^\circ-4\operatorname{sen}^3 10^\circ)-\operatorname{sen}10^\circ}{\frac{1}{3}(4\cos^3 20^\circ-3\cos 20^\circ)+\cos 20^\circ}} = A\tan 20^\circ + B$$

Utilizando la relación trigonométrica de triple

$$\sqrt[3]{\frac{\operatorname{sen}10^\circ-\frac{4}{3}\operatorname{sen}^3 10^\circ-\operatorname{sen}10^\circ}{\frac{4}{3}\cos^3 20^\circ-\cos 20^\circ+\cos 20^\circ}} = A\tan 20^\circ + B$$

$$\sqrt[3]{\frac{-\frac{4}{3}\operatorname{sen}^3 10^\circ}{\frac{4}{3}\cos^3 20^\circ}} = A\tan 20^\circ + B$$

Simplificando

$$-\frac{\operatorname{sen}10^\circ}{\cos 20^\circ} = A\tan 20^\circ + B$$

Si se hace $\operatorname{sen}10^\circ = \operatorname{sen}(30^\circ-20^\circ)$

$$\Rightarrow -\frac{\operatorname{sen}(30^\circ-20^\circ)}{\cos 20^\circ} = A\tan 20^\circ + B$$

$$-\frac{(\operatorname{sen}30^\circ\cos 20^\circ-\cos 30^\circ\operatorname{sen}20^\circ)}{\cos 20^\circ} = A\tan 20^\circ + B$$

$$\frac{\overset{\sqrt{3}/2}{\cos 30^\circ}\operatorname{sen}20^\circ-\overset{\frac{1}{2}}{\operatorname{sen}30^\circ}\cos 20^\circ}{\cos 20^\circ} = A\tan 20^\circ + B$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\tan 20^\circ - \frac{1}{2} = A\tan 20^\circ + B$$

Identificando A y B

$$\Rightarrow A = \frac{\sqrt{3}}{2} \wedge B = -\frac{1}{2}$$

$$\therefore A+B = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$$

Problema 20

Si $\sqrt{3}\cos x - \operatorname{sen} x = \dfrac{2}{3}$, calcule sen3x

Resolución

De la condición dividimos a ambos miembros entre dos

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x - \frac{1}{2}\operatorname{sen} x = \frac{1}{3}$$

$$\operatorname{sen}\frac{\pi}{3}\cos x - \cos\frac{\pi}{3}\operatorname{sen} x = \frac{1}{3}$$

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3} - x\right) = \frac{1}{3}$$

Pero $\operatorname{sen} 3x = \operatorname{sen}(\pi - 3x)$

(Por reducción al primer cuadrante)

Transformando

$$\operatorname{sen} 3x = \operatorname{sen}\left[3\left(\frac{\pi}{3} - x\right)\right]$$

Por fórmula *xvii*

$$\operatorname{sen} 3x, = 3\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3} - x\right) - 4\operatorname{sen}^3\left(\frac{\pi}{3} - x\right)$$

Usando en $\operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{3} - x\right) = \dfrac{1}{3}$

$$\operatorname{sen} 3x = 3\left(\frac{1}{3}\right) - 4\left(\frac{1}{3}\right)^3$$

$$\operatorname{sen} 3x = 1 - \frac{4}{27}$$

Operando $\therefore \operatorname{sen} 3x = \dfrac{23}{27}$

Problema 21

Sabemos que $\cos x = 0{,}125$ entonces calcule

$$K = \sqrt[3]{\frac{\operatorname{sen} 3x(1 - \cos 3x)}{\operatorname{sen} 2x - \operatorname{sen} x}}$$

Resolución

Por identidades del arco triple y doble

$$K = \sqrt[3]{\frac{\operatorname{sen} x(2\cos 2x + 1)(1 - \cos 3x)}{2\operatorname{sen} x\cos x - \operatorname{sen} x}}$$

Utilizando $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$

$$K = \sqrt[3]{\frac{\operatorname{sen} x[2(2\cos^2 x - 1) + 1](1 - \cos 3x)}{\operatorname{sen} x(2\cos x - 1)}}$$

$$K = \sqrt[3]{\frac{(4\cos^2 x - 1)(1 - \cos 3x)}{2\cos x - 1}}$$

Simplificando y operando

Por diferencia de cuadrados

$$K = \sqrt[3]{\frac{(2\cos x + 1)(2\cos x - 1)(1 - \cos 3x)}{2\cos x - 1}}$$

$$K = \sqrt[3]{(2\cos x + 1)(1 - \cos 3x)} \quad \ldots (1)$$

pero

$$\cos x = \frac{1}{8} \Rightarrow \cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$$

$$\Rightarrow \cos 3x = 4\left(\frac{1}{8}\right)^3 - 3\left(\frac{1}{8}\right)$$

$$\Rightarrow \cos 3x = -\frac{47}{128}$$

Reemplazando en (1) los valores del $\cos x$ y $\cos 3x$ tenemos

$$K = \sqrt[3]{\left(2\times\frac{1}{8} + 1\right)\left[1 - \left(-\frac{47}{128}\right)\right]} = \sqrt[3]{\frac{5}{4}\times\frac{175}{128}}$$

$$K = \sqrt[3]{\frac{5^3 \times 7}{2^3 \times 4^3}}$$

$$\therefore K = \frac{5}{8}\sqrt[3]{7}$$

Problema 22

De la siguiente identidad

$$\frac{8\cot 3x}{\tan(30^\circ - x)+\cot(x-60^\circ)} = A(\cot 2x\cot x + B)$$

calcule (A+B)

Resolución

En el primer miembro, transformamos para comparar en el segundo miembro.

$$\frac{8\cot 3x}{\cot(60^\circ + x)-\cot(60^\circ - x)} = A(\cot 2x\cot x + B)$$

$$\frac{8\cot 3x}{\dfrac{\operatorname{sen}[(60^\circ - x)-(60^\circ + x)]}{\operatorname{sen}(60^\circ + x)\operatorname{sen}(60^\circ - x)}} = A(\cot 2x\cot x + B)$$

$$\frac{\dfrac{8\cot 3x}{1}}{\dfrac{\operatorname{sen}(-2x)}{\operatorname{sen}(60^\circ + x)\operatorname{sen}(60^\circ - x)}} = A(\cot 2x\cot x + B)$$

$$\frac{8\cot 3x\operatorname{sen}(60^\circ + x)\operatorname{sen}(60^\circ - x)}{-\operatorname{sen}2x} = A(\cot 2x\cot x + B)$$

$$\frac{2\cot 3x\overbrace{(4\operatorname{sen}x\operatorname{sen}(60^\circ + x)\operatorname{sen}(60^\circ - x))}^{\operatorname{sen}3x}}{-\operatorname{sen}2x\operatorname{sen}x} = A(\cot 2x\cot x + B)$$

$$\frac{\dfrac{2\cos 3x}{\operatorname{sen}3x}\times\operatorname{sen}3x}{-\operatorname{sen}2x\operatorname{sen}x} = A(\cot 2x\cot x + B)$$

$$\frac{-2\cos(2x+x)}{\operatorname{sen}2x\operatorname{sen}x} = A(\cot 2x\cot x + B)$$

$$-2\left(\frac{\cos 2x\cos x - \operatorname{sen}2x\operatorname{sen}x}{\operatorname{sen}2x\operatorname{sen}x}\right) = A(\cot 2x\cot x + B)$$

$$-2(\cot 2x\cot x - 1) = A(\cot 2x\cot x + B).$$

Comparando ambos miembros

$$A = -2 \ \wedge \ B = -1$$

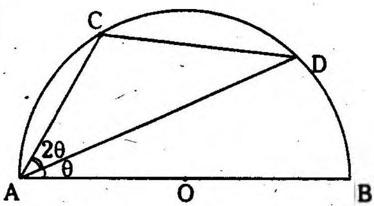
$$\Rightarrow \ A+B = -3$$

Problema 23

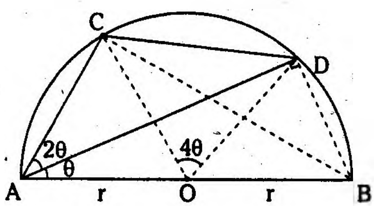
De la figura 5.27(a), calcule todos los valores de, $Y = \dfrac{AC+CD}{AD}$, siendo O centro de la semicircunferencia de diámetro $\overline{AB}$.

Resolución

Sea r el radio de la semicircunferencia, entonces de dicha semicircunferencia tenemos las siguientes figuras

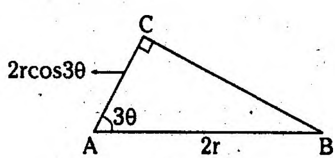


(a)

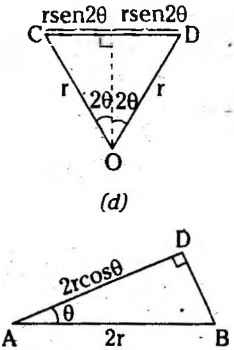


(b)

De los triángulos ACB, COD y ADB, (vea las figuras 5.27 b,c, d y e) por resolución de triángulos rectángulos, tenemos



(c)



(d)

(e)

Figura 5.27

AC = $2r\cos 3\theta$; CD = $2r\,\text{sen}2\theta$ y AD = $2r\cos\theta$

Como $Y=\dfrac{AC+CD}{AD}$

$$\Rightarrow Y=\frac{2r\cos3\theta+2r\,\text{sen}\,2\theta}{2r\cos\theta}$$

$$\Rightarrow Y=\frac{\cos3\theta+\text{sen}\,2\theta}{\cos\theta}$$

$$\Rightarrow Y=\frac{\cos\theta(2\cos2\theta-1)+2\,\text{sen}\,\theta\cos\theta}{\cos\theta}$$

Simplificamos $\cos\theta$ ya que $\cos\theta\neq 0$ (si $\cos\theta=0$, entonces θ podría ser igual a 90°, lo cual en la semicircunferencia del problema sería imposible).

$$\Rightarrow Y=2\underbrace{\cos2\theta}-1+2\,\text{sen}\,\theta$$

$$\Rightarrow Y=2(1-2\text{sen}^2\theta)-1+2\,\text{sen}\,\theta$$

completando cuadrados

$$\Rightarrow Y=\frac{5}{4}-4\left(\text{sen}\,\theta-\frac{1}{4}\right)^2$$

De la semicircunferencia 3θ es un ángulo agudo, entonces

$$0<3\theta<90° \Rightarrow 0<\theta<30°$$

$$\Rightarrow 0<\text{sen}\,\theta<\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{4}<\text{sen}\,\theta-\frac{1}{4}<\frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow 0\leq\left(\text{sen}\,\theta-\frac{1}{4}\right)^2<\frac{1}{16}$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{4}<-\left(4\text{sen}\,\theta-\frac{1}{4}\right)^2\leq 0$$

$$\Rightarrow 1<\underbrace{\frac{5}{4}-4\left(\text{sen}\,\theta-\frac{1}{4}\right)^2}_{Y}\leq\frac{5}{4}$$

$$\Rightarrow 1<Y\leq\frac{5}{4}\quad \therefore\ Y=\left\langle 1;\frac{5}{4}\right]$$

EJERCICIOS

1. Calcule el valor de $\text{sen}2\alpha$ y $\cos 2\alpha$, si $\text{sen}\alpha = 1/4$
2. Calcule el valor de $\cos 2\theta$, si $\cos\theta = -2/3$
3. Calcule el valor de $\text{sen}2\alpha$, si $\tan\alpha = -3$
4. Calcule el valor de $\tan 2x$, si $\cos x = \frac{1}{7}$
5. Calcule el valor de $\cos 4x$, si $\text{sen}x - \cos x = -\frac{1}{2}$
6. Calcule el valor de $\text{sen}\frac{\theta}{2}$ y $\cos\frac{\theta}{2}$, si $\cos\theta = 1/4$
7. Calcule el valor de $\tan\frac{\theta}{2}$, si $\text{sen}\theta = -\frac{4\sqrt{3}}{7}$; $\theta \in \left\langle \pi; \frac{3\pi}{2} \right\rangle$
8. Calcule el valor de $\text{sen}3x$, si $\text{sen}x = -1/3$
9. Calcule el valor de $\text{sen}3x$, si $\text{sen}(30° + x) = \frac{3}{4}$
10. Calcule el valor de $\tan 6x$, si $\tan x = -\frac{1}{2}$

Demuestre las siguientes identidades

11. $\dfrac{1 - \text{sen}2x}{\cos 2x} = \cot\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$
12. $\dfrac{1 + \text{sen}2x}{1 - \text{sen}2x} = \tan^2\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$
13. $\sec 2x - \tan 2x = \dfrac{\cos x - \text{sen}x}{\cos x + \text{sen}x}$
14. $8\text{sen}x\cos^3 x = 2\text{sen}2x + \text{sen}4x$
15. $\dfrac{\cot^2 x + \tan^2 x}{\cot^2 x - \tan^2 x} = \dfrac{1 + \cos^2 2x}{2\cos 2x}$
16. $\dfrac{\cos^6 x - \text{sen}^6 x}{\cos^4 x - \text{sen}^4 x} = 1 - \text{sen}^2 x\cos^2 x$
17. $\dfrac{\text{sen}x}{\cos x + \text{sen}x} + \dfrac{\cos x}{\cos x - \text{sen}x} = 1 + \tan 2x$
18. $\dfrac{1 + 2\tan x - \tan^2 x}{1 + \tan^2 x} = \text{sen}2x + \cos 2x$
19. $1 - \tan\alpha . \cot\frac{\alpha}{2} = -\sec\alpha$
20. $\sqrt{\dfrac{1 + \text{sen}x}{1 - \text{sen}x}} = \left| \dfrac{\cos\frac{x}{2} + \text{sen}\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2} - \text{sen}\frac{x}{2}} \right|$
21. $\dfrac{\text{sen}^3 x + \cos^3 x}{\text{sen}x + \cos x} = 1 - \frac{1}{2}\text{sen}2x$
22. $\dfrac{\cos 3x + \text{sen}3x}{\cos x - \text{sen}x} = 1 + 2\text{sen}2x$
23. $\dfrac{\text{sen}3x}{\cos x} + \dfrac{\cos 3x}{\text{sen}x} = 2\cot 2x$
24. $(1 + \sec 2\theta)(1 + \sec 4\theta)(1 + \sec 8\theta)(1 + \sec 16\theta) = \dfrac{\tan 16\theta}{\tan\theta}$
25. $\left(\dfrac{\tan 3x}{\tan x} - 1\right)\left(\dfrac{\tan 9x}{\tan 3x} - 1\right)\left(\dfrac{\tan 27x}{\tan 9x} - 1\right) \cdots\cdots \left(\dfrac{\tan 3^n x}{\tan 3^{n-1} x} - 1\right) = \dfrac{2^n \cos x}{\cos 3^n x}$

RESPUESTAS

1. $\text{sen}2\alpha = \pm\frac{\sqrt{15}}{8}$; $\cos 2\alpha = \frac{7}{8}$
2. $-\frac{1}{9}$
3. $-\frac{3}{5}$
4. $\pm\frac{8\sqrt{3}}{47}$
5. $-\frac{1}{8}$
6. $\pm\sqrt{\frac{3}{8}}$; $\pm\sqrt{\frac{5}{8}}$
7. $-\frac{2\sqrt{3}}{3}$
8. $-\frac{23}{27}$
9. $\pm\frac{5\sqrt{7}}{16}$
10. $\frac{44}{117}$

IDENTIDADES DE TRANSFORMACIONES TRIGONOMÉTRICAS

Identidades de Transformación de Sumas y Diferencias de Senos y Cosenos en Producto

Consideramos las identidades para el seno de la suma y diferencia de arcos.

$$\operatorname{sen}(\alpha+\theta)=\operatorname{sen}\alpha\cos\theta+\cos\alpha\operatorname{sen}\theta$$

$$\operatorname{sen}(\alpha-\theta)=\operatorname{sen}\alpha\cos\theta-\cos\alpha\operatorname{sen}\theta$$

Sumamos y restamos miembro a miembro las igualdades anteriores, resulta

$$\operatorname{sen}(\alpha+\theta)+\operatorname{sen}(\alpha-\theta)=2\operatorname{sen}\alpha\cos\theta \quad ...(a)$$

$$\operatorname{sen}(\alpha+\theta)-\operatorname{sen}(\alpha-\theta)=2\cos\alpha\operatorname{sen}\theta \quad ...(b)$$

Si cambiamos

$$\alpha+\theta=A$$
$$\alpha-\theta=B$$

del sistema de ecuaciones obtenemos

$$\alpha=\frac{A+B}{2}\ ;\ \theta=\frac{A-B}{2}$$

Sustituyendo en la identidad (a) obtenemos

$$\boxed{\operatorname{sen}A+\operatorname{sen}B=2\operatorname{sen}\left(\frac{A+B}{2}\right)\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)} \quad ...(1)$$

es decir, la suma de senos de dos ángulos es igual al doble producto del seno de la semisuma de los ángulos por el coseno de su semidiferencia.

Y sustituyendo en la identidad (b) obtenemos

$$\boxed{\operatorname{sen}A-\operatorname{sen}B=2\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{A-B}{2}\right)} \quad ...(2)$$

es decir, la diferencia de senos de dos ángulos es igual al doble producto del coseno de la semisuma de los ángulos por el seno de su semidiferencia.

De manera análoga, recordamos las identidades para el coseno de la suma y diferencia de dos arcos

$$\cos(\alpha+\theta)=\cos\alpha.\cos\theta-\operatorname{sen}\alpha.\operatorname{sen}\theta$$

$$\cos(\alpha-\theta)=\cos\alpha.\cos\theta+\operatorname{sen}\alpha.\operatorname{sen}\theta$$

sumando y restando miembro a miembro, obtenemos

$$\cos(\alpha+\theta)+\cos(\alpha-\theta)=2\cos\alpha.\cos\theta \quad ...(c)$$

$$\cos(\alpha+\theta)-\cos(\alpha-\theta)=-2\operatorname{sen}\alpha.\operatorname{sen}\theta \quad ...(d)$$

haciendo los mismos cambios de lo anterior, y sustituyendo en la identidad (c), obtenemos

$$\boxed{\cos A+\cos B=2\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)} \quad ...(3)$$

es decir, la suma de cosenos de dos ángulos es igual al doble producto del coseno de la semisuma de los ángulos por el coseno de la semidiferencia.

Sustituyendo en la identidad (d), obtenemos

$$\boxed{\cos A-\cos B=-2\operatorname{sen}\left(\frac{A+B}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{A-B}{2}\right)} \quad ...(4)$$

es decir, la diferencia de cosenos de dos ángulos es igual a menos el doble producto del seno de la semisuma de los ángulos por el seno de la semidiferencia.

Ejemplos de aplicación

Exprese cada suma o diferencia como un producto

Ejemplo 1

$\operatorname{sen}50^\circ+\operatorname{sen}24^\circ$

Resolución

Utilizando la identidad (1)

$$\operatorname{sen}50^\circ+\operatorname{sen}24^\circ=2\operatorname{sen}\left(\frac{50^\circ+24^\circ}{2}\right)\cos\left(\frac{50^\circ-24^\circ}{2}\right)$$

$$\operatorname{sen}50^\circ+\operatorname{sen}24^\circ=2\operatorname{sen}37^\circ\cos13^\circ$$

Ejemplo 2

$\operatorname{sen}7x-\operatorname{sen}x$

Resolución

Utilizando la identidad (2)

$$\operatorname{sen}7x-\operatorname{sen}x=2\cos\left(\frac{7x+x}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{7x-x}{2}\right)$$

$$\operatorname{sen}7x-\operatorname{sen}x=2\cos4x\operatorname{sen}3x$$

Ejemplo 3

$\cos 10\alpha + \cos 6\alpha$

Resolución

Utilizando la identidad (3)

$$\cos 10\alpha+\cos 6\alpha=2\cos\left(\frac{10\alpha+6\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{10\alpha-6\alpha}{2}\right)$$

$$\cos 10\alpha+\cos 6\alpha= 2\cos 8\alpha\cos 2\alpha$$

Ejemplo 4

$\cos 19° - \cos 3°$

Resolución

Utilizando la identidad (4)

$$\cos 19°-\cos 3° =-2\operatorname{sen}\left(\frac{19°+3°}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{19°-3°}{2}\right)$$

$$\cos 19°-\cos 3° = -2\operatorname{sen}11°\operatorname{sen}8°$$

Ejemplo 5

Factorice la expresión $K = 1+2\operatorname{sen}\alpha$

Resolución

Busquemos la forma tal que se aplique la identidad (1)

$$K = 1+2\operatorname{sen}\alpha = 2\left(\frac{1}{2}+\operatorname{sen}\alpha\right)$$

hacemos que $\frac{1}{2} = \operatorname{sen}30°$

$$K=1+2\operatorname{sen}\alpha = 2(\operatorname{sen}30°+\operatorname{sen}\alpha)$$

$$K = 1+\operatorname{sen}\alpha = 2\left[2\operatorname{sen}\left(\frac{30°+\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{30°-\alpha}{2}\right)\right]$$

$$K=1+2\operatorname{sen}\alpha=4\operatorname{sen}\left(15°+\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(15°-\frac{\alpha}{2}\right)$$

Queda como ejercicio para usted que transforme de forma análoga la siguiente expresión $2\cos\alpha+1$, y debe obtener como respuesta $4\cos\left(\frac{\alpha}{2}+30°\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2}-30°\right)$

Ejemplo 6

Transforme en producto $\operatorname{sen}x - \cos x$

Resolución

Sabiendo que $\cos x = \operatorname{sen}(90°-x)$

entonces

$$\operatorname{sen}x- \cos x=\operatorname{sen}x - \operatorname{sen}(90°- x)$$

$$\operatorname{sen}x - \cos x = 2\cos\left(\frac{x+90°-x}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{x-90°+x}{2}\right)$$

$$\operatorname{sen}x-\cos x=2\cos 45°\operatorname{sen}(x-45°)$$

$$\operatorname{sen}x - \cos x = \sqrt{2}\operatorname{sen}(x-45°)$$

Ejemplo 7

Demuestre la siguiente igualdad

$$\cos\left(\frac{\pi}{6}+x\right)+\cos\left(\frac{\pi}{6}-x\right)=\sqrt{3}\cos x$$

Resolución

Expresando en producto el primer miembro

$$2\cos\frac{\pi}{6}\cos x = \sqrt{3}\cos x$$

$$2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\cos x = \sqrt{3}\cos x$$

$$\Rightarrow \sqrt{3}\cos x=\sqrt{3}\cos x$$

Ejemplo 8

Demuestre la siguiente igualdad

$$\frac{\operatorname{sen}x - \operatorname{sen}2x + \operatorname{sen}3x}{\cos x - \cos 2x + \cos 3x} = \tan 2x$$

Resolución

Reagrupando convenientemente

$$\frac{\operatorname{sen}3x+\operatorname{sen}x - \operatorname{sen}2x}{\cos 3x + \cos x - \cos 2x} = \tan 2x$$

y transformando a producto

$$\frac{2\operatorname{sen}2x\cos x - \operatorname{sen}2x}{2\cos 2x\cos x - \cos 2x} = \tan 2x$$

$$\frac{\text{sen}\,2x(2\cos x-1)}{\cos 2x(2\cos x-1)}=\tan 2x$$

$$\Rightarrow\ \frac{\text{sen}\,2x}{\cos 2x}=\tan 2x$$

$$\Rightarrow\ \tan 2x=\tan 2x$$

Ejemplo 9

Demuestre la siguiente igualdad

$$\text{sen}^2\frac{7x}{2}-\text{sen}^2\frac{5x}{2}=\text{sen}6x\,\text{sen}x$$

Resolución

1ra. forma

Degradando por arco doble

$$\frac{1}{2}\left(2\text{sen}^2\frac{7x}{2}-2\text{sen}^2\frac{5x}{2}\right)=\text{sen}6x\,\text{sen}x$$

$$\frac{1}{2}[1-\cos 7x-(1-\cos 5x)]=\text{sen}6x\,\text{sen}x$$

$$\frac{1}{2}(\cos 5x-\cos 7x)=\text{sen}6x\,\text{sen}x$$

$$\frac{1}{2}(-2\text{sen}6x\,\text{sen}(-x))=\text{sen}6x\,\text{sen}x$$

$$\Rightarrow \text{sen}\,6x\,\text{sen}\,x=\text{sen}\,6x\,\text{sen}\,x$$

2da. forma

Por diferencia de cuadrados; en la igualdad inicial

$$\left(\text{sen}\frac{7x}{2}-\text{sen}\frac{5x}{2}\right)\left(\text{sen}\frac{7x}{2}+\text{sen}\frac{5x}{2}\right)=\text{sen}\,6x\,\text{sen}\,x$$

transformamos cada factor a producto.

$$2\cos 3x\,\text{sen}\frac{x}{2}\,2\text{sen}\,3x\cos\frac{x}{2}=\text{sen}\,6x\,\text{sen}\,x$$

Agrupando convenientemente

$$\underbrace{2\text{sen}\,3x\cos 3x}_{\text{sen}6x}\ \underbrace{2\text{sen}\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}_{\text{sen}\,x}=\text{sen}\,6x\,\text{sen}x$$

$$\therefore\ \text{sen}\,6x\,\text{sen}\,x=\text{sen}6x\,\text{sen}x$$

Identidades de Transformación de Producto de Senos y/o Cosenos a Suma o Diferencia

I. $\boxed{2\text{sen}\alpha\cos\theta=\text{sen}(\alpha+\theta)+\text{sen}(\alpha-\theta)}$

II. $\boxed{2\cos\alpha\cos\theta=\cos(\alpha+\theta)+\cos(\alpha-\theta)}$

III. $\boxed{2\text{sen}\alpha\,\text{sen}\theta=\cos(\alpha-\theta)-\cos(\alpha+\theta)}$

Las demostraciones se realizan fácilmente de las identidades a, b, c y d deducidas en la página **346**

Ejemplos de aplicación

Exprese en forma de suma o diferencia

Ejemplo 1

$2\text{sen}7x\cos 4x$

Resolución

Utilizando la identidad (I)

$2\text{sen}7x\cos 4x\ =\ \text{sen}(7x+4x)+\text{sen}(7x-4x)$

$\therefore\ 2\text{sen}7x\cos 4x\ =\ \text{sen}11x+\text{sen}3x$

Ejemplo 2

$2\cos 31°\cos 9°$

Resolución

Utilizando la identidad (II)

$2\cos 31°\cos 9°\ =\ \cos(31°+9°)+\cos(31°-9°)$

$\therefore\ 2\cos 31°\cos 9°\ =\ \cos 40°+\cos 22°$

Ejemplo 3

$2\text{sen}10°\cos 40°$

Resolución

Utilizando la identidad (I)

$2\text{sen}10°\cos 40°\ =\ \text{sen}(10°+40°)+\text{sen}(10°-40°)$

$2\text{sen}10°\cos 40°\ =\ \text{sen}50°+\text{sen}(-30°)$

$2\text{sen}10°\cos 40°\ =\ \text{sen}50°-\text{sen}30°$

Ejemplo 4

$$2\operatorname{sen}\frac{3x}{2}\operatorname{sen}\frac{x}{2}$$

Resolución

Utilizando la identidad (III)

$$2\operatorname{sen}\frac{3x}{2}\operatorname{sen}\frac{x}{2} = \cos\left(\frac{3x}{2}-\frac{x}{2}\right)-\cos\left(\frac{3x}{2}+\frac{x}{2}\right)$$

$$2\operatorname{sen}\frac{3x}{2}\operatorname{sen}\frac{x}{2} = \cos x - \cos 2x$$

Demuestre que se verifican las siguientes igualdades

Ejemplo 1

$\cos(x+y)\cos(x-y) = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 y$

Resolución

Multiplicamos y dividimos por 2 al primer miembro

$$\frac{2\cos(x+y)\cos(x-y)}{2} = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 y$$

transformando a suma de cosenos

$$\frac{\cos 2x + \cos 2y}{2} = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 y$$

sustituyendo con la identidad del coseno de arco doble

$$\frac{(2\cos^2 x - 1) + (1 - 2\operatorname{sen}^2 y)}{2} = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 y$$

$$\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 y = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 y$$

Ejemplo 2

$4\operatorname{sen}x\operatorname{sen}(60^\circ+x)\operatorname{sen}(60^\circ-x) = \operatorname{sen}3x$

Resolución

Agrupando convenientemente los factores

$$2\operatorname{sen}x[2\operatorname{sen}(60^\circ+x)\operatorname{sen}(60^\circ-x)] = \operatorname{sen}3x$$

Transformando de producto a diferencia utilizando identidad (III)

$$2\operatorname{sen}x[\cos 2x - \cos 120^\circ] = \operatorname{sen}x$$

$$2\operatorname{sen}x\left[\cos 2x - \left(-\frac{1}{2}\right)\right] = \operatorname{sen}3x$$

$$\operatorname{sen}x(2\cos 2x + 1) = \operatorname{sen}3x$$

$$\operatorname{sen}3x = \operatorname{sen}3x$$

Ejemplo 3

$4\cos x\cos(60^\circ+x)\cos(60^\circ-x) = \cos 3x$

Resolución

$$2\cos x[2\cos(60^\circ+x)\cos(60^\circ-x)] = \cos 3x$$

$$2\cos x[\underbrace{\cos 120^\circ}_{-1/2} + \cos 2x] = \cos 3x$$

$$\Rightarrow \cos x(2\cos 2x - 1) = \cos 3x$$

$$\Rightarrow \cos 3x = \cos 3x$$

Ejemplo 4

$\cos 3x\operatorname{sen}2x - \cos 4x\operatorname{sen}x = \cos 2x\operatorname{sen}x$

Resolución

Multiplicamos y dividimos por 2

$$\frac{1}{2}[2\cos 3x\operatorname{sen}2x - 2\cos 4x\operatorname{sen}x] = \cos 2x\operatorname{sen}x$$

$$\frac{1}{2}[\operatorname{sen}5x - \operatorname{sen}x - (\operatorname{sen}5x - \operatorname{sen}3x)] = \cos 2x\operatorname{sen}x$$

$$\frac{1}{2}[\operatorname{sen}3x - \operatorname{sen}x] = \cos 2x\operatorname{sen}x$$

transformando a producto

$$\frac{1}{2}[2\cos 2x\operatorname{sen}x] = \cos 2x\operatorname{sen}x$$

$$\Rightarrow \cos 2x\operatorname{sen}x = \cos 2x\operatorname{sen}x$$

Ejemplo 5

$$\tan(x+30°)\tan(x-30°)=\frac{1-2\cos 2x}{1+2\cos 2x}$$

Resolución

Expresando a senos y cosenos

$$\frac{\operatorname{sen}(x+30°)}{\cos(x+30°)}\cdot\frac{\operatorname{sen}(x-30°)}{\cos(x-30°)}=\frac{1-2\cos 2x}{1+2\cos 2x}$$

multiplicando ×2 al numerador y denominador

$$\frac{2\operatorname{sen}(x+30°)\operatorname{sen}(x-30°)}{2\cos(x+30°)\cos(x-30°)}=\frac{1-2\cos 2x}{1+2\cos 2x}$$

transformando a suma o diferencia

$$\frac{\cos 60°-\cos 2x}{\cos 2x+\cos 60°}=\frac{1-2\cos 2x}{1+2\cos 2x}$$

$$\frac{\frac{1}{2}-\cos 2x}{\cos 2x+\frac{1}{2}}=\frac{1-2\cos 2x}{1+2\cos 2x}$$

$$\Rightarrow\ \frac{1-2\cos 2x}{1+2\cos 2x}=\frac{1-2\cos 2x}{1+2\cos 2x}$$

Ejemplo 6

Demuestre que $\cos\left(\frac{\pi}{7}\right)\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right)\cos\left(\frac{3\pi}{7}\right)=\left(\frac{1}{8}\right)$

Resolución

Designando W al 1er. miembro de la igualdad y multiplicando por $2\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{7}\right)$

$$2\operatorname{sen}\frac{\pi}{7}.W=\underline{2\operatorname{sen}\frac{\pi}{7}\cos\frac{\pi}{7}}\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{3\pi}{7}$$

$$2\times 2\operatorname{sen}\frac{\pi}{7}W=\underline{2\operatorname{sen}\frac{2\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}}\cos\frac{3\pi}{7}$$

$$4\operatorname{sen}\frac{\pi}{7}W=\operatorname{sen}\frac{4\pi}{7}\cos\frac{3\pi}{7}$$

multiplicando por 2 y transformando a suma de senos

$$2\times 4\operatorname{sen}\frac{\pi}{7}W=\underbrace{2\operatorname{sen}\frac{4\pi}{7}\cos\frac{3\pi}{7}}_{\operatorname{sen}\pi+\operatorname{sen}\frac{\pi}{7}}\ ;\ (\operatorname{sen}\pi=0)$$

$$\Rightarrow\ 8\operatorname{sen}\frac{\pi}{7}W=\operatorname{sen}\frac{\pi}{7}$$

$$\therefore\ W=\frac{1}{8}$$

Teorema

Si A+B+C = 180° , se cumple

1) $\operatorname{sen}A+\operatorname{sen}B+\operatorname{sen}C=4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$

2) $\cos A+\cos B+\cos C=4\operatorname{sen}\frac{A}{2}\operatorname{sen}\frac{B}{2}\operatorname{sen}\frac{C}{2}+1$

Demostración de (1)

De la condición A+B+C = 180°, se tiene

$$\frac{A}{2}+\frac{B}{2}+\frac{C}{2}=90°$$

aplicando propiedad de ángulos cuya suma es 90°

$$\begin{cases}\operatorname{sen}\frac{A+B}{2}=\cos\frac{C}{2}\\ \cos\frac{A+B}{2}=\operatorname{sen}\frac{C}{2}\end{cases}$$

transformando el 1er miembro

$$\underbrace{\operatorname{sen}A+\operatorname{sen}B}+\underbrace{\operatorname{sen}C}=4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$$

$$2\operatorname{sen}\left(\frac{A+B}{2}\right)\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)+2\operatorname{sen}\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}=4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$$

$$2\cos\frac{C}{2}\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)+2\operatorname{sen}\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}=4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$$

Factorizando $2\cos\frac{C}{2}$ se tiene

$$2\cos\frac{C}{2}\left[\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)+\operatorname{sen}\frac{C}{2}\right]=4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$$

Reemplazando $\operatorname{sen}\frac{C}{2}$ por $\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)$

$$2\cos\frac{C}{2}\left[\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)+\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)\right]=4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$$

$$2\cos\frac{C}{2}\left[2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\right]=4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$$

$$\therefore\ 4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}=4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$$

esto es lo que se buscaba demostrar.

Demostración de (2)

Luego

$$\underline{\cos A+\cos B}+\underline{\cos C}=4\operatorname{sen}\frac{A}{2}\operatorname{sen}\frac{B}{2}\operatorname{sen}\frac{C}{2}+1$$

$$2\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)+1-2\operatorname{sen}^2\frac{C}{2}=4\operatorname{sen}\frac{A}{2}\operatorname{sen}\frac{B}{2}\operatorname{sen}\frac{C}{2}+1$$

$$2\operatorname{sen}\frac{C}{2}\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)-2\operatorname{sen}^2\frac{C}{2}+1=4\operatorname{sen}\frac{A}{2}\operatorname{sen}\frac{B}{2}\operatorname{sen}\frac{C}{2}+1$$

$$2\operatorname{sen}\frac{C}{2}\left[\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)-\operatorname{sen}\frac{C}{2}\right]+1=4\operatorname{sen}\frac{A}{2}\operatorname{sen}\frac{B}{2}\operatorname{sen}\frac{C}{2}+1$$

$$2\operatorname{sen}\frac{C}{2}\left[\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)-\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)\right]+1=4\operatorname{sen}\frac{A}{2}\operatorname{sen}\frac{B}{2}\operatorname{sen}\frac{C}{2}+1$$

$$2\operatorname{sen}\frac{C}{2}\left[-2\operatorname{sen}\frac{A}{2}\operatorname{sen}\left(-\frac{B}{2}\right)\right]+1=4\operatorname{sen}\frac{A}{2}\operatorname{sen}\frac{B}{2}\operatorname{sen}\frac{C}{2}+1$$

$$\therefore\ 4\operatorname{sen}\frac{A}{2}\operatorname{sen}\frac{B}{2}\operatorname{sen}\frac{C}{2}+1=4\operatorname{sen}\frac{A}{2}\operatorname{sen}\frac{B}{2}\operatorname{sen}\frac{C}{2}+1$$

Teorema

Si $A+B+C=180°$, se cumple

3) $\operatorname{sen}2A+\operatorname{sen}2B+\operatorname{sen}2C=4\operatorname{sen}A\operatorname{sen}B\operatorname{sen}C$

4) $\cos2A+\cos2B+\cos2C=-4\cos A\cos B\cos C-1$

Demostración de (3)

En la condición tenemos

$A+B+C=180°$

aplicando propiedad de ángulos cuya suma es 180° $\left\{\begin{array}{l}\operatorname{sen}(A+B)=\operatorname{sen}C\\ \cos(A+B)=-\cos C\end{array}\right.$

transformando el 1er. miembro

$$\underline{\operatorname{sen}2A+\operatorname{sen}2B}+\underline{\operatorname{sen}2C}=4\operatorname{sen}A\operatorname{sen}B\operatorname{sen}C$$

$$2\operatorname{sen}(A+B)\cos(A-B)+2\operatorname{sen}C\cos C=4\operatorname{sen}A\operatorname{sen}B\operatorname{sen}C$$

$$2\operatorname{sen}C\cos(A-B)+2\operatorname{sen}C\cos C=4\operatorname{sen}A\operatorname{sen}B\operatorname{sen}C$$

$$2\operatorname{sen}C[\cos(A-B)+\cos C]=4\operatorname{sen}A\operatorname{sen}B\operatorname{sen}C$$

$$2\operatorname{sen}C[\cos(A-B)-\cos(A+B)]=4\operatorname{sen}A\operatorname{sen}B\operatorname{sen}C$$

$$2\operatorname{sen}C[-2\operatorname{sen}A\operatorname{sen}(-B)]=4\operatorname{sen}A\operatorname{sen}B\operatorname{sen}C$$

$$\therefore\ 4\operatorname{sen}A\operatorname{sen}B\operatorname{sen}C=4\operatorname{sen}A\operatorname{sen}B\operatorname{sen}C$$

Se deja para el lector la demostración del teorema (4).

Ejemplo 1

Calcule la suma de los senos de una serie de arcos en progresión aritmética, tal como se presenta

$$S=\operatorname{sen}x+\operatorname{sen}(x+r)+\operatorname{sen}(x+2r)+\ldots+\operatorname{sen}[x+(n-1)r]$$

Resolución

Multiplicando por $2\operatorname{sen}\frac{r}{2}$ a ambos miembros de la expresión propuesta, donde observamos que r es la razón del ángulo.

$$2\text{sen}\frac{r}{2}S = 2\text{sen}x\,\text{sen}\frac{r}{2}+2\text{sen}(x+r)\text{sen}\frac{r}{2}+2\text{sen}(x+2r)\text{sen}\frac{r}{2}+ \ldots +2\text{sen}[x+(n-1)r]\text{sen}\frac{r}{2}$$

como sabemos cada doble producto de senos también nos representa una diferencia de cosenos, es decir

$$2\text{sen}\,x\,\text{sen}\frac{r}{2} = \cos\left(x-\frac{r}{2}\right)-\cos\left(x+\frac{r}{2}\right)$$

$$2\text{sen}(x+r)\text{sen}\frac{r}{2} = \cos\left(x+\frac{r}{2}\right)-\cos\left(x+\frac{3r}{2}\right)$$

$$2\text{sen}(x+2r)\text{sen}\frac{r}{2} = \cos\left(x+\frac{3r}{2}\right)-\cos\left(x+\frac{5r}{2}\right)$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$2\text{sen}(x+(n-1)r)\text{sen}\frac{r}{2} = \cos\left[x+(2n-3)\frac{r}{2}\right]-\cos\left[x+(2n-1)\frac{r}{2}\right]$$

sumando miembro a miembro; obtenemos

$$2\text{sen}\frac{r}{2}S = \cos\left(x-\frac{r}{2}\right)-\cos\left[x+(2n-1)\frac{r}{2}\right]$$

transformando a producto el segundo miembro

$$2\text{sen}\frac{r}{2}S = -2\text{sen}\left[x+\frac{(n-1)r}{2}\right]\text{sen}\left(-\frac{nr}{2}\right)$$

$$\therefore\ S = \frac{\text{sen}\left(\frac{nr}{2}\right)}{\text{sen}\frac{r}{2}}\text{sen}\left[x+\frac{(n-1)r}{2}\right]$$

Ejemplo 2

Calcule la suma de los cosenos de una serie de n arcos en progresión aritmética, tal como se presenta en

$$S = \cos x+\cos(x+r)+\cos(x+2r)+ \ldots + \cos[x+(n-1)r]$$

Resolución

Multiplicando por $2\text{sen}\frac{r}{2}$ a ambos miembros de la expresión propuesta, donde observamos que r es la razón del ángulo.

$$2\text{sen}\frac{r}{2}S = 2\cos x\,\text{sen}\frac{r}{2}+2\cos(x+r)\text{sen}\frac{r}{2}+2\cos(x+2r)\text{sen}\frac{r}{2}+ \ldots +2\cos[x+(n-1)r]\text{sen}\frac{r}{2}$$

como sabemos cada doble producto de coseno por seno nos representa una diferencia de senos, es decir

$$2\cos x\,\text{sen}\frac{r}{2} = \text{sen}\left(x+\frac{r}{2}\right)-\text{sen}\left(x-\frac{r}{2}\right)$$

$$2\cos(x+r)\text{sen}\frac{r}{2} = \text{sen}\left(x+\frac{3r}{2}\right)-\text{sen}\left(x+\frac{r}{2}\right)$$

$$2\cos(x+2r)\text{sen}\frac{r}{2} = \text{sen}\left(x+\frac{5r}{2}\right)-\text{sen}\left(x+\frac{3r}{2}\right)$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$2\cos[(x+(n-1)r]\text{sen}\frac{r}{2} = \text{sen}\left[x+\frac{(2n-1)r}{2}\right]-\text{sen}\left[\frac{(2n-3)r}{2}\right]$$

sumando miembro a miembro obtenemos

$$2\text{sen}\frac{r}{2}S = \text{sen}\left[x+\frac{(2n-1)r}{2}\right]-\text{sen}\left(x-\frac{r}{2}\right)$$

transformando a producto el segundo miembro

$$2\text{sen}\frac{r}{2}S = 2\cos\left[x+\frac{(n-1)r}{2}\right]\text{sen}\frac{nr}{2}$$

$$\therefore\ S = \frac{\text{sen}\left(\frac{nr}{2}\right)}{\text{sen}\frac{r}{2}}\cos\left[x+\frac{(n-1)r}{2}\right]$$

Observación

Para simplificar la notación de una suma de n términos, introducimos ahora el símbolo Σ. La letra griega Σ (correspondiente a la S) se utiliza para indicar la "suma de". Con dicho símbolo se utiliza una especie de subíndice que se suele denominar con K.

Por ejemplo

$\sum_{K=1}^{4} x^K$ se lee "la suma de las x a la K–ésima potencia, con K=1,2,3,4", es decir

$$\sum_{K=1}^{4} x^K = x + x^2 + x^3 + x^4$$

Así escribimos la sumatoria de senos y cosenos cuyos ángulos satisfacen una progresión aritmética de razón r en notación $\sum$

$$\sum_{K=1}^{n} \cos[x+(K-1)r] = \cos x + \cos(x+r) + \cos(x+2r) + \ldots + \cos[x+(n-1)r]$$

La propiedad para la sumatoria de senos y cosenos cuyos ángulos están en progresión aritmética se presenta

$$\sum_{K=1}^{n} \operatorname{sen}[x+(K-1)r] = \frac{\operatorname{sen}\frac{nr}{2}}{\operatorname{sen}\frac{r}{2}} \operatorname{sen}\left(\frac{P\sphericalangle + U\sphericalangle}{2}\right)$$

$$\sum_{K=1}^{n} \cos[x+(K-1)r] = \frac{\operatorname{sen}\frac{nr}{2}}{\operatorname{sen}\frac{r}{2}} \cos\left(\frac{P\sphericalangle + U\sphericalangle}{2}\right)$$

donde para ambos casos

n: es el número de términos

r : es la razón de la progresión aritmética del ángulo

P∢ es el primer ángulo de la serie

U∢ es el último ángulo de la serie

Ejemplo 1

Reduzca la siguiente sumatoria

$T = \operatorname{sen}2° + \operatorname{sen}4° + \operatorname{sen}6° + \ldots + \operatorname{sen}180°$

Resolución

Es evidente que la serie tiene 90 términos, además reconocemos que 2° y 180° son el primer y último ángulo de la serie, respectivamente, donde la razón de la progresión aritmética del ángulo es 2°, es decir, n = 90, r = 2, P∢ = 2°, U∢ = 180°.

Aplicando la fórmula para la sumatoria de senos

$$T = \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{90(2°)}{2}\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{2°}{2}\right)} . \operatorname{sen}\left(\frac{2° + 180°}{2}\right)$$

$$T = \frac{\operatorname{sen}90°}{\operatorname{sen}1°} . \operatorname{sen}91° = \frac{1}{\operatorname{sen}1°} . \cos 1°$$

... (se utilizó $\operatorname{sen}91° = \operatorname{sen}(90° + 1°) = \cos 1°$)

$\therefore T = \cot 1°$

Ejemplo 2

Reduzca la siguiente sumatoria

$$K = \operatorname{sen}^2\frac{1°}{2} + \operatorname{sen}^2\frac{3°}{2} + \operatorname{sen}^2\frac{5°}{2} + \ldots + \operatorname{sen}^2\frac{89°}{2}$$

Resolución

Multiplicamos por 2 en ambos miembros para degradar

$$2K = \underbrace{2\operatorname{sen}^2\frac{1°}{2}} + \underbrace{2\operatorname{sen}^2\frac{3°}{2}} + \underbrace{2\operatorname{sen}^2\frac{5°}{2}} + \ldots + \underbrace{2\operatorname{sen}^2\frac{89°}{2}}$$

$$2K = 1 - \cos 1° + 1 - \cos 3° + 1 - \cos 5° + \ldots + 1 - \cos 89° \ \ldots (\lambda)$$

Para hallar el número de términos, podemos aplicar la fórmula

$$\begin{pmatrix}\text{número de}\\ \text{términos}\end{pmatrix} = \frac{\begin{pmatrix}\text{último}\\ \text{término}\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\text{primer}\\ \text{término}\end{pmatrix}}{\text{razón}} + 1$$

es decir $n = \dfrac{89° - 1°}{2°} + 1 \Rightarrow n = 45$

luego en (λ)

$2K = 1(45) - (\cos 1° + \cos 3° + \cos 5° + \ldots + \cos 89°)$

aplicando la fórmula para la sumatoria de cosenos

$$2K = 45 - \frac{\operatorname{sen}\left(45 \times \frac{2°}{2}\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{2°}{2}\right)} . \cos\left(\frac{1° + 89°}{2}\right)$$

$$2K = 45 - \frac{\text{sen}45^\circ \times \cos 45^\circ}{\text{sen}1^c}$$

$$2K = 45 - \frac{1}{2\text{sen}1^\circ}$$

$$\therefore K = \frac{45}{2} - \frac{1}{4}\csc 1^\circ$$

Ejemplo 3

Determine la suma de los n primeros términos de las siguientes series

I. $L = \cos\frac{\pi}{2n+1} + \cos\frac{3\pi}{2n+1} + \cos\frac{5\pi}{2n+1} + \ldots$

II. $M = \cos\frac{2\pi}{2n+1} + \cos\frac{4\pi}{2n+1} + \cos\frac{6\pi}{2n+1} + \ldots$

Resolución (I)

Completando la serie con el enésimo término

$$L = \cos\frac{\pi}{2n+1} + \cos\frac{3\pi}{2n+1} + \cos\frac{5\pi}{2n+1} + \ldots + \cos\frac{(2n-1)\pi}{2n+1}$$

Identificando al primer término $\frac{\pi}{2n+1}$, último término $\frac{(2n-1)\pi}{2n+1}$, y razón de la progresión del ángulo $\frac{2\pi}{2n+1}$, entonces

$$L = \frac{\text{sen}\left(\frac{n}{2}\cdot\frac{2\pi}{2n+1}\right)}{\text{sen}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{2\pi}{2n+1}\right)}.\cos\left(\frac{\frac{\pi}{2n+1}+\frac{(2n-1)\pi}{2n+1}}{2}\right)$$

$$L = \frac{\text{sen}\frac{n\pi}{2n+1}}{\text{sen}\frac{\pi}{2n+1}}.\cos\frac{n\pi}{2n+1} = \frac{2\text{sen}\frac{n\pi}{2n+1}.\cos\frac{n\pi}{2n+1}}{2\text{sen}\frac{\pi}{2n+1}}$$

$$L = \frac{\text{sen}\frac{2n\pi}{2n+1}}{2\text{sen}\frac{\pi}{2n+1}} = \frac{\text{sen}\left(\pi - \frac{\pi}{2n+1}\right)}{2\text{sen}\frac{\pi}{2n+1}}$$

reduciendo

$$L = \frac{\text{sen}\frac{\pi}{2n+1}}{2\text{sen}\frac{\pi}{2n+1}} = \frac{1}{2} \quad ; \quad \therefore L = \frac{1}{2}$$

Resolución (II)

Completando la serie, con el enésimo término

$$M = \cos\frac{2\pi}{2n+1} + \cos\frac{4\pi}{2n+1} + \cos\frac{6\pi}{2n+1} + \ldots + \cos\frac{2n\pi}{2n+1}$$

análogo de la anterior serie, la razón de la progresión del ángulo es $\frac{2\pi}{2n+1}$

$$M = \frac{\text{sen}\left(\frac{n}{2}\times\frac{2\pi}{2n+1}\right)}{\text{sen}\left(\frac{1}{2}\times\frac{2\pi}{2n+1}\right)}\cos\left(\frac{\frac{2\pi}{2n+1}+\frac{2n\pi}{2n+1}}{2}\right)$$

$$M = \frac{\text{sen}\left(\frac{n\pi}{2n+1}\right)}{\text{sen}\left(\frac{\pi}{2n+1}\right)}\cos\left(\frac{n\pi+\pi}{2n+1}\right)$$

$$M = \frac{2\text{sen}\left(\frac{n\pi}{2n+1}\right)\cos\left(\frac{n\pi+\pi}{2n+1}\right)}{2\text{sen}\frac{\pi}{2n+1}}$$

$$M = \frac{\text{sen}\pi + \text{sen}\left(-\frac{\pi}{2n+1}\right)}{2\text{sen}\left(\frac{\pi}{2n+1}\right)} = \frac{-\text{sen}\left(\frac{\pi}{2n+1}\right)}{2\text{sen}\left(\frac{\pi}{2n+1}\right)} = -\frac{1}{2}$$

Finalmente quedan como propiedad

$$\sum_{K=1}^{n} \cos\frac{(2K-1)\pi}{2n+1} = \cos\frac{\pi}{2n+1} + \cos\frac{3\pi}{2n+1} + \cos\frac{5\pi}{2n+1} + \cos\frac{7\pi}{2n+1} + \ldots + \cos\frac{(2n-1)\pi}{2n+1} = \frac{1}{2}$$

$$\sum_{K=1}^{n} \cos\frac{2K\pi}{2n+1} = \cos\frac{2\pi}{2n+1} + \cos\frac{4\pi}{2n+1} + \cos\frac{6\pi}{2n+1} + \cos\frac{8\pi}{2n+1} + \ldots + \cos\frac{2n\pi}{2n+1} = -\frac{1}{2}$$

Veamos algunos casos particulares

Para n=1 $\begin{cases} \cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2} \\ \cos\frac{2\pi}{3}=-\frac{1}{2} \end{cases}$

Para n=2 $\begin{cases} \cos\frac{\pi}{5}+\cos\frac{3\pi}{5}=\frac{1}{2} \\ \cos\frac{2\pi}{5}+\cos\frac{4\pi}{5}=-\frac{1}{2} \end{cases}$

Para n=3 $\begin{cases} \cos\frac{\pi}{7}+\cos\frac{3\pi}{7}+\cos\frac{5\pi}{7}=\frac{1}{2} \\ \cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{6\pi}{7}=-\frac{1}{2} \end{cases}$

Ejemplo 1

Calcule $D=\cos^2\frac{\pi}{7}+\cos^2\frac{2\pi}{7}+\cos^2\frac{3\pi}{7}$

Resolución
Multiplicando por 2

$$2D=\underbrace{2\cos^2\frac{\pi}{7}}+\underbrace{2\cos^2\frac{2\pi}{7}}+\underbrace{2\cos^2\frac{3\pi}{7}}$$

$$2D=1+\cos\frac{2\pi}{7}+1+\cos\frac{4\pi}{7}+1+\cos\frac{6\pi}{7}$$

$$2D=3+\left(\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{6\pi}{7}\right)$$

$\Rightarrow\ 2D=3+(-1/2)$

$\therefore D=5/4$

Ejemplo 2

Calcule el valor de $T=\cos\frac{\pi}{7}.\cos\frac{2\pi}{7}.\cos\frac{3\pi}{7}$.

Resolución

Multiplicamos por 2 y transformando a suma de cosenos:

$$2T=\left[2\cos\frac{3\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}\right]\cos\frac{\pi}{7}$$

$$2T=\left[\cos\frac{5\pi}{7}+\cos\frac{\pi}{7}\right]\cos\frac{\pi}{7}$$

$$4T=\underbrace{2\cos\frac{5\pi}{7}.\cos\frac{\pi}{7}}+\underbrace{2\cos^2\frac{\pi}{7}}$$

$$4T=\cos\frac{6\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+1+\cos\frac{2\pi}{7}$$

entonces $4T=1+\underbrace{\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{6\pi}{7}}_{-\frac{1}{2}}$

$\Rightarrow\ 4T=\frac{1}{2}\qquad\therefore T=\frac{1}{8}$

Ejemplo 3

Calcule el valor de

$$K=\operatorname{sen}^2\frac{\pi}{9}+\operatorname{sen}^2\frac{2\pi}{9}+\operatorname{sen}^2\frac{3\pi}{9}+\operatorname{sen}^2\frac{4\pi}{9}$$

Resolución

Multiplicando por 2

$$2K=\underbrace{2\operatorname{sen}^2\frac{\pi}{9}}_{1-\cos\frac{2\pi}{9}}+\underbrace{2\operatorname{sen}^2\frac{2\pi}{9}}_{1-\cos\frac{4\pi}{9}}+\underbrace{2\operatorname{sen}^2\frac{3\pi}{9}}_{1-\cos\frac{6\pi}{9}}+\underbrace{2\operatorname{sen}^2\frac{4\pi}{9}}_{1-\cos\frac{8\pi}{9}}$$

$$2K=4-\left(\cos\frac{2\pi}{9}+\cos\frac{4\pi}{9}+\cos\frac{6\pi}{9}+\cos\frac{8\pi}{9}\right)\ ...(1)$$

Por propiedad, para n=4 se tiene que

$$\cos\frac{2\pi}{9}+\cos\frac{4\pi}{9}+\cos\frac{6\pi}{9}+\cos\frac{8\pi}{9}=-\frac{1}{2}$$

Reemplazamos en (1)

$$2K=4-\left(-\frac{1}{2}\right)=4+\frac{1}{2}=\frac{9}{2}$$

$\therefore\ K=\frac{9}{4}$

Ejemplo 4

Halle el valor de

$$R=-\operatorname{sen}50°+\operatorname{sen}70°-\operatorname{sen}10°+\frac{1}{2}$$

Resolución

$$R=-\operatorname{sen}50°+\operatorname{sen}70°-\operatorname{sen}10°+\operatorname{sen}30°$$

$$R=\cos140°+\cos20°+\cos100°+\cos60°$$

$$R=\cos\frac{7\pi}{9}+\cos\frac{\pi}{9}+\cos\frac{5\pi}{9}+\cos\frac{3\pi}{9}$$

$\therefore\ R=\frac{1}{2}$

Ejemplo 5

Calcule el valor de $R=\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}\cos\frac{6\pi}{7}+\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{6\pi}{7}$

Resolución

Multiplicando por 2 y transformando cada producto a suma de cosenos

$$2R=2\cos\frac{4\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}+2\cos\frac{6\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}+2\cos\frac{6\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}$$

$$2R=\cos\frac{6\pi}{7}+\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{10\pi}{7}+\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{8\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}$$, se cambiarán $\cos\frac{8\pi}{7}$ y $\cos\frac{10\pi}{7}$

$$2R=\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{6\pi}{7}+\underbrace{\cos\left(\pi+\frac{\pi}{7}\right)}_{-\cos\frac{\pi}{7}}+\underbrace{\cos\left(\pi+\frac{3\pi}{7}\right)}_{-\cos\frac{3\pi}{7}}+\underbrace{\cos\frac{2\pi}{7}}_{-\cos\frac{5\pi}{7}}$$

$$2R=\underbrace{\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{6\pi}{7}}_{-\frac{1}{2}}-\left(\underbrace{\cos\frac{\pi}{7}+\cos\frac{3\pi}{7}+\cos\frac{5\pi}{7}}_{\frac{1}{2}}\right)$$

entonces $2R=-1 \Rightarrow R=-\frac{1}{2}$

Ejemplo 6

Calcule el valor de $H=\operatorname{sen}\frac{\pi}{7}\operatorname{sen}\frac{2\pi}{7}\operatorname{sen}\frac{3\pi}{7}$

Resolución

Como $\operatorname{sen}\frac{\pi}{7}>0$ $\operatorname{sen}\frac{2\pi}{7}>0$ y $\operatorname{sen}\frac{3\pi}{7}>0 \Rightarrow H>0$

Elevando al cuadrado y degradando

$$H^2=\operatorname{sen}^2\frac{\pi}{7}\operatorname{sen}^2\frac{2\pi}{7}\operatorname{sen}^2\frac{3\pi}{7}$$

$$H^2=\frac{\left(1-\cos\frac{2\pi}{7}\right)}{2}\frac{\left(1-\cos\frac{4\pi}{7}\right)}{2}\frac{\left(1-\cos\frac{6\pi}{7}\right)}{2}=\quad 8H^2=\left(1-\cos\frac{2\pi}{7}\right)\left(1-\cos\frac{4\pi}{7}\right)\left(1-\cos\frac{6\pi}{7}\right).$$

efectuando

$$8H^2=1-\cos\frac{2\pi}{7}-\cos\frac{4\pi}{7}-\cos\frac{6\pi}{7}+\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{6\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}\cos\frac{6\pi}{7}-\cos\frac{2\pi}{7}\underbrace{\cos\frac{4\pi}{7}}_{-\cos\frac{3\pi}{7}}\underbrace{\cos\frac{6\pi}{7}}_{-\cos\frac{\pi}{7}}$$

$$8H^2=1-\left(\underbrace{\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{6\pi}{7}}_{-\frac{1}{2}}\right)+\left(\underbrace{\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{6\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}\cos\frac{6\pi}{7}}_{-\frac{1}{2}}\right)-\left(\underbrace{\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{3\pi}{7}}_{\frac{1}{8}}\right)$$

(este valor se calculó en el ejemplo anterior)

$$8H^2=1+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}-\frac{1}{8}$$

$H^2=\frac{7}{64} \Rightarrow H=\frac{\sqrt{7}}{8} \quad \vee \quad H=-\frac{\sqrt{7}}{8}$ pero como $H>0 \quad \therefore H=\frac{\sqrt{7}}{8} \quad \vee \quad \operatorname{sen}\frac{\pi}{7}\operatorname{sen}\frac{2\pi}{7}\operatorname{sen}\frac{3\pi}{7}=\frac{\sqrt{7}}{8}$

Problemas Resueltos

Problema 1

Simplifique las expresiones siguientes

i) $\operatorname{sen}x+\operatorname{sen}(x-120°)+\operatorname{sen}(x+120°)$

ii) $\cos x+\cos(x-120°)+\cos(x+120°)$

Resolución

De (i) transformando a producto

$$P=\operatorname{sen}x+\underbrace{\operatorname{sen}(x-120°)+\operatorname{sen}(x+120°)}_{2\operatorname{sen}x\cos(-120°)}$$

$$P=\operatorname{sen}x+2\operatorname{sen}x\underbrace{\cos 120°}_{-\frac{1}{2}}$$

$P=\operatorname{sen}x-\operatorname{sen}x \quad \therefore P=0$

De (ii) transformando a producto

$$E=\cos x+\underbrace{\cos(x-120°)+\cos(x+120°)}_{2\cos x\cos(-120°)}$$

$$E=\cos x+2\cos x.\underbrace{\cos 120°}_{-\frac{1}{2}}$$

$E=\cos x-\cos x \quad \therefore E=0$

De este problema, como $\cos(x-120°)=\cos(120°-x)$; podemos concluir que

$$\boxed{\cos x+\cos(120°-x)+\cos(x+120°)=0} \quad \ldots(1)$$

y

$$\boxed{\operatorname{sen}x+\operatorname{sen}(x-120°)+\operatorname{sen}(x+120°)=0}$$

Son ejemplos de esta conclusión

$A=\cos 20°+\underbrace{\cos 100°}+\underbrace{\cos 140°}$

$A=\cos 20°+\cos(120°-20°)+\cos(120°+20°) \quad \therefore A=0$

$B=\cos 1°+\underbrace{\cos 119°}+\underbrace{\cos 121°}$

$B=\cos 1°+\cos(120°-1°)+\cos(120°+1°) \quad \therefore B=0$

$C=\cos 2x+\cos(120°-2x)+\cos(120°+2x) \quad \therefore C=0$

pero como recordará, si

$\alpha+\beta=360° \Rightarrow \cos\alpha=\cos\beta$, luego como

$$\left.\begin{array}{l}120°-x+240°+x=360°\\ \Rightarrow \cos(120°-x)=\cos(240°+x)\\ 120°+x+240°-x=360°\\ \Rightarrow \cos(120°+x)=\cos(240°-x)\end{array}\right\}\text{(I)}$$

a partir de $\cos x+\underbrace{\cos(120°-x)}+\underbrace{\cos(120°+x)}=0$

de (I) $\cos x+\cos(240°+x)+\cos(240°-x)=0$

Por lo que concluimos también

$$\boxed{\cos x+\cos(240°+x)+\cos(240°-x)=0} \quad \ldots(2)$$

A continuación, observe los siguientes ejemplos

$M=\cos 20°+\underbrace{\cos 260°}+\underbrace{\cos 220°}$

$M=\cos 20°+\cos(240°+20°)+\cos(240°-20°)$

$\therefore M=0$

$N=\cos 50°+\underbrace{\cos 290°}+\underbrace{\cos 190°}$

$N=\cos 50°+\cos(240°+50°)+\cos(240°-50°)$

$\therefore N=0$

También podemos obtener el equivalente de la siguiente expresión $R=\cos^2x+\cos^2(120°-x)+\cos^2(120°+x)$

Resolución

A partir de la expresión R, por 2

$2R=2\cos^2x+2\cos^2(120°-x)+2\cos^2(120°+x)$

Si utilizamos la fórmula de degradación $2\cos^2\alpha=1+\cos 2\alpha$, se obtiene

$2R=1+\cos 2x+1+\cos(240°-2x)+1+\cos(240°+2x)$

Efectuando

$$2R=3+\underbrace{\cos 2x+\cos(240°-2x)+\cos(240°+2x)}_{(0)}$$

reduciendo $R=\dfrac{3}{2}$

dado este resultado notamos que se cumple la siguiente igualdad

$$\boxed{\cos^2x+\cos^2(120°+x)+\cos^2(120°-x)=\frac{3}{2}} \quad \ldots(3)$$

transformando el primer miembro, utilizando la identidad $\cos^2\alpha=1-\operatorname{sen}^2\alpha$, obtenemos

$1-\operatorname{sen}^2x+1-\operatorname{sen}^2(120°+x)+1-\operatorname{sen}^2(120°-x)=\dfrac{3}{2}$

agrupando

$3-(\operatorname{sen}^2x+\operatorname{sen}^2(120°+x)+\operatorname{sen}^2(120°-x))=\dfrac{3}{2}$

de donde obtenemos

$$\boxed{\operatorname{sen}^2x+\operatorname{sen}^2(120°+x)+\operatorname{sen}^2(120°-x)=\frac{3}{2}} \quad \ldots(4)$$

Ejemplos

$A = \text{sen}^2 10° + \text{sen}^2 130° + \text{sen}^2 110°$

$A = \text{sen}^2 10° + \text{sen}^2(120°+10°) + \text{sen}^2(120°-10°)$ $\quad \therefore A = \dfrac{3}{2}$

$B = \cos^2 40° + \cos^2 160° + \cos^2 80°$

$B = \cos^2 40° + \cos^2(120°+40°) + \cos^2(120°-40°)$ $\quad \therefore B = \dfrac{3}{2}$

Queda para usted lector el comprobar que

De (1) se obtiene $\boxed{\cos^2 x + \cos^2(240°+x) + \cos^2(240°-x) = \dfrac{3}{2}}$ ... (5)

y de (4) se obtiene $\boxed{\text{sen}^2 x + \text{sen}^2(240°+x) + \text{sen}^2(240°-x) = \dfrac{3}{2}}$ ... (6)

seguidamente teniendo en cuenta la degradación $4\cos^3\alpha = \cos 3\alpha + 3\cos\alpha$

obtendremos el equivalente de $R = \cos^3 x + \cos^3(120°-x) + \cos^3(120°+x)$

Resolución

se sabe que

$$\left.\begin{aligned} 4\cos^3 x &= \cos 3x + 3\cos x \\ 4\cos^3(120°-x) &= \cos(360°-3x) + 3\cos(120°-x) \\ 4\cos^3(120°+x) &= \cos(360°+3x) + 3\cos(120°+x) \end{aligned}\right\} (+)$$

agrupando

$$4(\underbrace{\cos^3 x + \cos^3(120°-x) + \cos^3(120°+x)}_{R}) = \cos 3x + \cos(360°-3x) + \cos(360°+3x) + 3\big(\underbrace{\cos x + \cos(120°-x) + \cos(120°+x)}_{0 \text{ ... de (1)}}\big)$$

puesto que $\cos(360°-3x) = \cos 3x$ y $\cos(360°+3x) = \cos 3x$

$$\Rightarrow 4R = 3\cos 3x + 3(0) \quad \therefore R = \frac{3}{4}\cos 3x$$

dado este resultado planteamos la siguiente identidad $\boxed{\cos^3 x + \cos^3(120°-x) + \cos^3(120°+x) = \dfrac{3}{4}\cos 3x}$ ... (7)

Otra forma de llegar a este resultado es utilizando una identidad algebraica.

Si $a+b+c = 0 \Rightarrow a^3+b^3+c^3 = 3abc$

como $\cos x + \cos(120°-x) + \cos(120°+x) = 0$

$\Rightarrow \cos^3 x + \cos^3(120°-x) + \cos^3(120°+x) = 3\cos x\cos(120°-x)\cos(120°+x)$

pero $\cos(120°-x) = -\cos(60°+x)$ ... (revise ángulos suplementarios)

y $\cos(120°+x) = -\cos(60°-x)$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \cos^3 x + \cos^3(120°-x) + \cos^3(120°+x) &= 3\cos x(-\cos(60°+x))(-\cos(60°-x)) \\ &= 3\cos x\cos(60°+x)\cos(60°-x) \\ &= \frac{3}{4}\underbrace{4\cos x\cos(60°+x)\cos(60°-x)}_{\cos 3x} \end{aligned}$$

finalmente $\cos^3 x + \cos^3(120°-x) + \cos^3(120°+x) = \dfrac{3}{4}\cos 3x$

Ejemplos

$A = \cos^3 10° + \cos^3 110° + \cos^3 130°$

$A = \cos^3 10° + \cos^3(120° - 110°) + \cos^3(120° + 10°)$

$A = \frac{3}{4}\cos 3(10°) = \frac{3}{4}\cos 30° = \frac{3}{4}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ $\quad \therefore A = \frac{3\sqrt{3}}{8}$

$B = \cos^3 20° + \cos^3 100° + \cos^3 140°$

$B = \cos^3 20° + \cos^3(120° - 20°) + \cos^3(120° + 20°)$

$B = \frac{3}{4}\cos 3(20°) = \frac{3}{4}\cos 60° = \frac{3}{4}\left(\frac{1}{2}\right)$ $\quad \therefore B = \frac{3}{8}$

Queda para el lector la verificación de

$$\boxed{\operatorname{sen}^3\alpha + \operatorname{sen}^3(\alpha - 120°) + \operatorname{sen}^3(\alpha + 120°) = -\frac{3}{4}\operatorname{sen}3\alpha} \quad \dots (8)$$

sugerencia, utilice $4\operatorname{sen}^3\alpha = 3\operatorname{sen}\alpha - \operatorname{sen}3\alpha$

Ejemplo

$A = \operatorname{sen}^3 10° - \operatorname{sen}^3 110° + \operatorname{sen}^3 130°$

$A = \operatorname{sen}^3 10° + \operatorname{sen}^3(10° - 120°) + \operatorname{sen}^3(10° + 120°)$; $-\operatorname{sen}^3 110° = \operatorname{sen}^3(-110°)$

$A = -\frac{3}{4}\operatorname{sen}3(10°) = -\frac{3}{4}\operatorname{sen}30° = -\frac{3}{4}\left(\frac{1}{2}\right)$ $\quad \therefore A = -\frac{3}{8}$

$B = \operatorname{sen}^3 20° - \operatorname{sen}^3 100° + \operatorname{sen}^3 140°$

$B = \operatorname{sen}^3 20° + \operatorname{sen}^3(20° - 120°) + \operatorname{sen}^3(20° + 120°)$; $-\operatorname{sen}^3 100° = \operatorname{sen}^3(-100°)$

$B = -\frac{3}{4}\operatorname{sen}3(20°) = -\frac{3}{4}\operatorname{sen}60° = -\frac{3}{4}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ $\quad \therefore B = -\frac{3\sqrt{3}}{8}$

En el tema de arcos múltiplos se comprobó

$$\left.\begin{aligned}
\cos^4\alpha &= \frac{3 + 4\cos 2\alpha + \cos 4\alpha}{8} \text{ ; de igual forma:}\\
\cos^4(120° - \alpha) &= \frac{3 + 4\cos(240° - 2\alpha) + \cos(480° - 4\alpha)}{8}\\
\cos^4(120° + \alpha) &= \frac{3 + 4\cos(240° + 2\alpha) + \cos(480° + 4\alpha)}{8}
\end{aligned}\right| \; (+)$$

sumando miembro obtenemos

$$\cos^4\alpha + \cos^4(120° + \alpha) + \cos^4(120° - \alpha) = \frac{9 + 4(\overbrace{\cos 2\alpha + \cos(240° - 2\alpha) + \cos(240° + 2\alpha)}^{0}) + \cos 4\alpha + \cos(480° - 4\alpha) + \cos(480° + 4\alpha)}{8}$$

$$\Rightarrow 8[\cos^4\alpha + \cos^4(120° + \alpha) + \cos^4(120° - \alpha)] = 9 + \cos 4\alpha + \underline{\cos(480° - 4\alpha)} + \underline{\cos(480° + 4\alpha)}$$

$$8[\cos^4\alpha + \cos^4(120° + \alpha) + \cos^4(120° - \alpha)] = 9 + \underbrace{\cos 4\alpha + \cos(120° - 4\alpha) + \cos(120° + 4\alpha)}_{0}$$

Finalmente

$$\boxed{\cos^4\alpha+\cos^4(120°+\alpha)+\cos^4(120°-\alpha)=\frac{9}{8}} \ldots (9)$$

dejamos para el lector la verificación de

$$\boxed{\operatorname{sen}^4\alpha+\operatorname{sen}^4(120°+\alpha)+\operatorname{sen}^4(120°-\alpha)=\frac{9}{8}} \ldots (10)$$

sugerencia, utilice $\operatorname{sen}^4\alpha=\dfrac{3-4\cos 2\alpha+\cos 4\alpha}{8}$

o también $\operatorname{sen}^4\alpha+\cos^4\alpha=\dfrac{3}{4}+\dfrac{1}{4}\cos 4\alpha$

Ejemplo

$A=\operatorname{sen}^4 10°+\operatorname{sen}^4 50°+\operatorname{sen}^4 70°$

$A=\operatorname{sen}^4 10°+\operatorname{sen}^4 130°+\operatorname{sen}^4 110°$

$A=\operatorname{sen}^4 10°+\operatorname{sen}^4(120°+10°)+\operatorname{sen}^4(120°-10°)$

$\therefore A=\dfrac{9}{8}$

El lector debe entender que la matemática es única, por lo que podemos utilizar y combinar todos nuestros conocimientos. Un ejemplo de esta combinación es utilizar una identidad algebraica y una trigonométrica, para ello sigamos con el desarrollo de los ejemplos siguientes

Si

$$a+b+c=0 \Rightarrow \left(\frac{a^2+b^2+c^2}{2}\right)\left(\frac{a^3+b^3+c^3}{3}\right)=\frac{a^5+b^5+c^5}{5} \ldots (I)$$

también

$$a+b+c=0 \Rightarrow \left(\frac{a^2+b^2+c^2}{2}\right)\left(\frac{a^5+b^5+c^5}{5}\right)=\left(\frac{a^7+b^7+c^7}{7}\right) \ldots (II)$$

utilizando (I), calculemos la sumatoria de las quintas de los coseno para ángulos x, $120°-x$ y $120°+x$ como $\cos x+\cos(120°-x)+\cos(120°+x)=0$

$$\Rightarrow \underbrace{\left(\frac{\cos^2 x+\cos^2(120°-x)+\cos^2(120°+x)}{2}\right)}_{\text{de 3: }\left(\frac{3}{4}\right)}\underbrace{\left(\frac{\cos^3 x+\cos^3(120°-x)+\cos^3(120°+x)}{3}\right)}_{\text{de (7): }\left(\frac{1}{4}\cos 3x\right)}$$

$$=\frac{\cos^5 x+\cos^5(120°+x)+\cos^5(120°-x)}{5}$$

$$\Rightarrow \frac{\cos^5 x+\cos^5(120°-x)+\cos^5(120°+x)}{5}=\frac{3}{4}\left(\frac{1}{4}\cos 3x\right)$$

de donde deducimos

$$\boxed{\cos^5 x+\cos^5(120°-x)+\cos^5(120°+x)=\frac{15}{16}\cos 3x} \ldots (11)$$

Ejemplo

$B = \cos^5 24° + \cos^5 96° + \cos^5 144°$

$B = \cos^5 24° + \cos^5(120°-24°) + \cos^5(120°+24°)$

$B = \dfrac{15}{16}\cos 3(24°) = \dfrac{15}{16}\cos 72° = \dfrac{15}{16}\text{sen}18°$; $\text{sen}18° = \dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$

luego $B = \dfrac{15}{16}\left(\dfrac{\sqrt{5}-1}{4}\right)$ $\quad \therefore B = \dfrac{15}{64}(\sqrt{5}-1)$

si utilizamos la identidad (11), ahora calculemos la suma de las sétimas de los cosenos cuyos ángulos son x, $120°-x$, $120°+x$ como $\cos x + \cos(120°-x) + \cos(120°+x) = 0$

$$\Rightarrow \underbrace{\left(\frac{\cos^2 x + \cos^2(120°-x) + \cos^2(120°+x)}{2}\right)}_{\text{de (3): } \frac{3}{4}} \times \underbrace{\left(\frac{\cos^5 x + \cos^5(120°-x) + \cos^5(120°+x)}{5}\right)}_{\text{de (11): } \frac{3}{16}\cos 3x} = \frac{\cos^7 x + \cos^7(120°-x) + \cos^7(120°+x)}{7}$$

$$\Rightarrow \frac{\cos^7 x + \cos^7(120°-x) + \cos^7(120°+x)}{7} = \frac{3}{4}\left(\frac{3}{16}\right)\cos 3x$$

de donde concluimos $\boxed{\cos^7 x + \cos^7(120°-x) + \cos^7(120°+x) = \dfrac{63}{64}\cos 3x}$ ...(12)

Ejemplos

Aplicando la identidad (12), calcule el valor de

- $A = \cos^7 10° + \cos^7 110° + \cos^7 130°$

  $A = \cos^7 10° + \cos^7(120°-10°) + \cos^7(120°+10°)$

  $A = \dfrac{63}{64}\cos 3(10°) = \dfrac{63}{64}\cos 30° = \dfrac{63}{64}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$

  $\therefore A = \dfrac{63\sqrt{3}}{128}$

- $B = \cos^7 20° - \cos^7 80° - \cos^7 40°$

  $B = \cos^7 20° + (-\cos 80°)^7 + (-\cos 40°)^7$

  $B = \cos^7 20° + \cos^7 100° + \cos^7 140°$

  $B = \cos^7 20° + \cos^7(120°-20°) + \cos^7(120°+20°)$

  $B = \dfrac{63}{64}\cos 3(20°) = \dfrac{63}{64}\cos 60° = \dfrac{63}{64}\left(\dfrac{1}{2}\right)$

  $\therefore B = \dfrac{63}{128}$

- $C = \cos^7 5° - \cos^7 65° - \text{sen}^7 35°$

  Se sabe que

  $\cos 65° = -\cos 115°$

  $\text{sen}35° = \cos 55°$

  Además $\cos 55° = -\cos 125°$

  Luego en la expresión

  $C = \cos^7 5° - (-\cos 115°)^7 - (-\cos 125°)^7$

  Efectuando

  $C = \cos^7 5° + \cos^7 115° + \cos^7 125°$

  $C = \cos^7 5° + \cos^7(120°-5°) + \cos^7(120°+5)$

  $C = \dfrac{63}{64}\cos 3(5°) = \dfrac{63}{64}\cos 15°$

  Pero como $\cos 15° = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

  $\therefore C = \dfrac{63}{256}(\sqrt{6}+\sqrt{2})$

Problema 2

Determine el valor de $L=\dfrac{\text{sen}2x+\text{sen}3x+\text{sen}4x}{\cos2x+\cos3x+\cos4x}$;

para $x=5°$

Resolución

Transformando a producto convenientemente al numerador y denominador, respectivamente

$$L=\frac{\text{sen}3x+\overbrace{\text{sen}4x+\text{sen}2x}^{2\text{sen}3x\cos x}}{\cos3x+\underbrace{\cos4x+\cos2x}_{2\cos3x\cos x}}=\frac{\text{sen}3x\,(1+2\cos x)}{\cos3x\,(1+2\cos x)}$$

$$L=\frac{\text{sen}3x}{\cos3x}=\tan3x$$

sustituyendo el valor de $x=5°$

$\therefore L=\tan15°=2-\sqrt{3}$

Problema 3

Halle el valor máximo de $H=\text{sen}(x-40°)-\cos x$

Resolución

Cambiando a $\cos x$ por $\text{sen}(90°-x)$ y transformando a producto

$H=\text{sen}(x-40°)-\text{sen}(90°-x)=2\cos25°\text{sen}(x-65°)$

sabemos que

$-1\leq\text{sen}(x-65°)\leq1$

entonces el valor máximo de $\text{sen}(x-65°)$ es 1

luego, en H.

$H_{\text{máximo}}=2\cos25°$

Problema 4

Transforme a producto

$$K=\text{sen}^2x-\text{sen}^22x+\text{sen}^23x$$

Resolución

Multiplicando por 2 a ambos miembros y degradando

$$2K=\underbrace{2\text{sen}^2x}_{1-\cos2x}-\underbrace{2\text{sen}^22x}_{1-\cos4x}+2\text{sen}^23x$$

$$2K=\underbrace{\cos4x-\cos2x}_{-2\text{sen}3x\text{sen}x}+2\text{sen}^23x$$

factor común $2\text{sen}3x$

$$\not{2}K=\not{2}\text{sen}3x(\underbrace{\text{sen}3x-\text{sen}x}_{2\cos2x.\text{sen}x})$$

$\therefore K=2\text{sen}x.\cos2x.\text{sen}3x$

Para este problema también podemos aplicar otro método de resolución, pero para ello es necesario que el lector recuerde la siguiente identidad

$\text{sen}^2\alpha-\text{sen}^2\beta=\text{sen}(\alpha+\beta)\text{sen}(\alpha-\beta)$ ... (1)

Otro método

A partir de la expresión

$K=\underline{\text{sen}^2x-\text{sen}^22x}+\text{sen}^23x$

$K=\text{sen}(x-2x)\text{sen}(x+2x)+\text{sen}^23x$

$K=\text{sen}(-x)\text{sen}3x+\text{sen}^23x$

factorizando $\text{sen}3x$ obtenemos

$K=\text{sen}3x(\text{sen}3x+\text{sen}(-x))$

de donde

$K=\text{sen}3x(\underline{\text{sen}3x-\text{sen}x})$

$K=\text{sen}3x(2\cos2x\text{sen}x)$

Finalmente

$\therefore K=2\text{sen}x\cos2x\text{sen}3x$

Problema 5

Reduzca

$T=\text{sen}^2(x-120°)+\text{sen}^2x+\text{sen}^2(x+120°)$

Resolución

Multiplicando por 2 a ambos miembros y degradando

$2T=2\text{sen}^2(x-120°)+2\text{sen}^2x+2\text{sen}^2(x+120°)$

$2T=1-\cos(2x-240°)+1-\cos2x+1-\cos(2x+240°)$

$2T=3-\cos(2x-240°)-\cos2x-\cos(2x+240°)$

ordenando los términos

$2T=3-\cos2x-(\cos(2x+240°)+\cos(2x-240°))$

$2T=3-\cos2x-(2\cos2x\cos240°)$ ... (I)

Por reducción al primer cuadrante

$\cos240°=-\dfrac{1}{2}$

Reemplazando en la ecuación (I)

$$2T=3-\cos2x-\left(2\cos2x\left(-\frac{1}{2}\right)\right)$$

$2T=3-\cos2x+(\cos2x)$

de donde $2T=3$

$\therefore T=\dfrac{3}{2}$

Problema 6

Calcule el valor del ángulo x si

$$\tan x=\frac{2\cos 20°-\operatorname{sen}50°}{\operatorname{sen}40°}\ ;\ 0°<x<90°$$

Resolución

$$\tan x=\frac{2\operatorname{sen}70°-\operatorname{sen}50°}{\operatorname{sen}40°}$$

$$\tan x=\frac{\operatorname{sen}70°+\operatorname{sen}70°-\operatorname{sen}50°}{\operatorname{sen}40°}$$

transformando a producto

$$\tan x=\frac{\operatorname{sen}70°+(2\cos 60°\operatorname{sen}10°)}{\operatorname{sen}40°}$$

reduciendo

$$\tan x=\frac{\operatorname{sen}70°+\operatorname{sen}10°}{\operatorname{sen}40°}\Rightarrow \tan x=\frac{2\cancel{\operatorname{sen}40°}\cos 30°}{\cancel{\operatorname{sen}40°}}$$

obteniéndose $\tan x=2\cos 30°=\sqrt{3}$

$\therefore x=60°$

Problema 7

Calcule el valor de

$$K=(\cos 6x+\cos 2x)(\cos 9x+\cos 7x);\ \text{para } x=\frac{\pi}{17}$$

Resolución

Transformando a producto cada término

$$K=2\cos\left(\frac{6x+2x}{2}\right)\cos\left(\frac{6x-2x}{2}\right)2\cos\left(\frac{9x+7x}{2}\right)\cos\left(\frac{9x-7x}{2}\right)$$

$$K=4\cos 4x\cos 2x\cos 8x\cos x$$

ordenando y multiplicando por $\operatorname{sen}x$

$$\operatorname{sen}xK=2\times\underbrace{2\operatorname{sen}x\cos x}_{\operatorname{sen}2x}\cos 2x\cos 4x\cos 8x$$

$$\operatorname{sen}xK=\underbrace{2\operatorname{sen}2x\cos 2x}_{\operatorname{sen}4x}\cos 4x\cos 8x$$

multiplicando por 2

$$2\operatorname{sen}xK=\underbrace{2\operatorname{sen}4x\cos 4x}_{\operatorname{sen}8x}\cos 8x$$

multiplicando por 2.

$$4\operatorname{sen}xK=\underbrace{2\operatorname{sen}8x\cos 8x}_{\operatorname{sen}16x}\Rightarrow 4\operatorname{sen}x(K)=\operatorname{sen}16x$$

de donde se obtiene

$$K=\frac{\operatorname{sen}16x}{4\operatorname{sen}x}\quad \ldots\text{(I)}$$

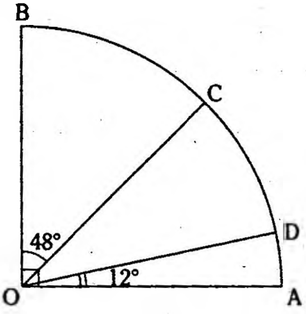
reemplazando $x=\frac{\pi}{17}$ en la ecuación (I)

$$K=\frac{\operatorname{sen}\frac{16\pi}{17}}{4\operatorname{sen}\frac{\pi}{7}}$$

$$K=\frac{\operatorname{sen}\left(\pi-\frac{\pi}{17}\right)}{4\operatorname{sen}\frac{\pi}{17}}\Rightarrow K=\frac{\operatorname{sen}\frac{\pi}{17}}{4\operatorname{sen}\frac{\pi}{17}}\qquad \therefore K=\frac{1}{4}$$

Problema 8

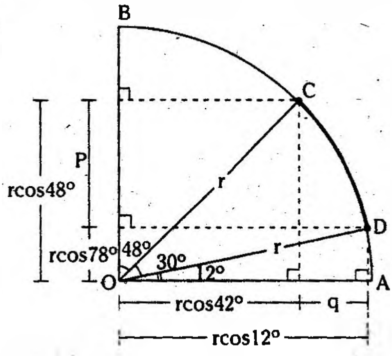
Del gráfico adjunto, p y q representan las longitudes de la proyección del arco CD respecto a OB y OA respectivamente. Siendo AOB un sector circular de radio $(4+4\sqrt{3})$ y $\cos 18°=0{,}95$. Calcule $p+q$.



(a)

Resolución

Aplicando resolución de triángulos rectángulos



(b)

Figura 5.28

Luego tenemos

$p = r(\cos 48^\circ - \cos 78^\circ) \qquad q = r(\cos 12^\circ - \cos 42^\circ)$

nos piden

$p + q = r(\cos 48^\circ - \cos 78^\circ + \cos 12^\circ - \cos 42^\circ)$

transformando a producto convenientemente

$$p+q = r(\underbrace{\cos 48^\circ - \cos 42^\circ}_{-2\mathrm{sen}45^\circ \mathrm{sen}3^\circ} + \underbrace{\cos 12^\circ - \cos 78^\circ}_{-2\mathrm{sen}45^\circ \mathrm{sen}(-33^\circ)})$$

$$p+q = r(-\sqrt{2}\,\mathrm{sen}\,3^\circ + \sqrt{2}\,\mathrm{sen}\,33^\circ)$$

factorizando

$$p+q = \sqrt{2}r(\mathrm{sen}\,33^\circ - \mathrm{sen}\,3^\circ)$$

transformando a producto

$$p+q = \sqrt{2}r\,(2\cos 18^\circ \mathrm{sen}15^\circ)$$

reemplazando los valores numéricos

$$p+q = \sqrt{2}(4+4\sqrt{3})2(0{,}95)\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right)$$

$\therefore p+q = 7{,}6$

Problema 9

Siendo A, B y C, ángulos internos de un triángulo ABC, simplifique

$$T = 2\cos\frac{B}{2}.\cos\frac{C}{2}.\csc\frac{A}{2} - \frac{\mathrm{sen}\,B+\mathrm{sen}\,C}{\mathrm{sen}\,A}$$

Resolución

Transformando a producto

$$T = \frac{2\cos\frac{B}{2}.\cos\frac{C}{2}}{\mathrm{sen}\frac{A}{2}} - \frac{2\mathrm{sen}\left(\frac{B+C}{2}\right)\cos\left(\frac{B-C}{2}\right)}{\mathrm{sen}\,A}$$

del dato $A+B+C = 180^\circ \Rightarrow \frac{A}{2}+\frac{B}{2}+\frac{C}{2} = 90^\circ$

se cumple

$\mathrm{sen}\left(\frac{B+C}{2}\right) = \cos\frac{A}{2}$ (propiedad de co–razones)

luego, sustituyendo en T

$$T = \frac{2\cos\frac{B}{2}.\cos\frac{C}{2}}{\mathrm{sen}\frac{A}{2}} - \frac{\cancel{2}\,\cancel{\cos\frac{A}{2}}.\cos\left(\frac{B-C}{2}\right)}{\cancel{2}\,\mathrm{sen}\frac{A}{2}.\cancel{\cos\frac{A}{2}}}$$

$$T = \frac{2\cos\frac{B}{2}.\cos\frac{C}{2} - \cos\left(\frac{B-C}{2}\right)}{\mathrm{sen}\frac{A}{2}}$$

$$T = \frac{\cos\left(\frac{B+C}{2}\right) + \cancel{\cos\left(\frac{B-C}{2}\right)} - \cancel{\cos\left(\frac{B-C}{2}\right)}}{\mathrm{sen}\frac{A}{2}}$$

obteniéndose

$$T = \frac{\cancel{\cos\left(\frac{B+C}{2}\right)}}{\cancel{\mathrm{sen}\frac{A}{2}}} \text{ ; como } \mathrm{sen}\frac{A}{2} = \cos\left(\frac{B+C}{2}\right)$$

$\therefore T = 1$

Problema 10

Si en un triángulo acutángulo ABC, se cumple

sen2A+sen2B+sen2C = 2senA.senB

Calcule la medida del ángulo C.

Resolución

Del enunciado $A+B+C=180^\circ$

recordando la propiedad demostrada en la página **350**, tenemos

$$\underbrace{\mathrm{sen}\,2A+\mathrm{sen}\,2B+\mathrm{sen}\,2C}_{4\mathrm{sen}A\mathrm{sen}B\mathrm{sen}C} = 2\mathrm{sen}A\mathrm{sen}B$$

reduciendo $2\mathrm{sen}C=1$

$\Rightarrow \mathrm{sen}\,C = \frac{1}{2}$, es decir $C=30^\circ$ ó 150°

como el triángulo ABC es acutángulo $C<90^\circ$

$\therefore C = 30^\circ$

Problema 11

Transforme en producto la expresión

$L = \mathrm{sen}3A+\mathrm{sen}3B+\mathrm{sen}3C$; si $A+B+C = \pi$

Resolución

$$L = 2\mathrm{sen}\left(\frac{3A+3B}{2}\right)\cos\left(\frac{3A-3B}{2}\right)+\mathrm{sen}\,3C$$

de la condición $\frac{3A}{2}+\frac{3B}{2}+\frac{3C}{2} = \frac{3\pi}{2}$

se cumple

- $\mathrm{sen}\left(\frac{3A+3B}{2}\right) = -\cos\frac{3C}{2}$
- $\cos\left(\frac{3A+3B}{2}\right) = -\mathrm{sen}\frac{3C}{2}$

luego obtenemos

$$L=2\left(-\cos\frac{3C}{2}\right)\cos\left(\frac{3A-3B}{2}\right)+2\operatorname{sen}\frac{3C}{2}\cos\frac{3C}{2}$$

$$L=-2\cos\frac{3C}{2}\left[\cos\left(\frac{3A-3B}{2}\right)-\operatorname{sen}\frac{3C}{2}\right]$$

$$L=-2\cos\frac{3C}{2}\left[\underbrace{\cos\left(\frac{3A-3B}{2}\right)+\cos\left(\frac{3A+3B}{2}\right)}\right]$$

$$2\cos\frac{3A}{2}.\cos\frac{3B}{2}$$

$$\therefore L=-4\cos\frac{3A}{2}\cos\frac{3B}{2}\cos\frac{3C}{2}$$

Problema 12

Si A,B y C son ángulos de un triángulo, demuestre que

$\operatorname{sen}^3A+\operatorname{sen}^3B+\operatorname{sen}^3C=$

$$3\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}+\cos\frac{3A}{2}\cos\frac{3B}{2}\cos\frac{3C}{2}$$

Resolución

Designando como K el primer miembro

$K=\operatorname{sen}^3A+\operatorname{sen}^3B+\operatorname{sen}^3C$

multiplicando por (4)

$4K=4\operatorname{sen}^3A+4\operatorname{sen}^3B+4\operatorname{sen}^3C$

degradamos cada término, utilizando la identidad

$4\operatorname{sen}^3x=3\operatorname{sen}x-\operatorname{sen}3x$

$4K=3\operatorname{sen}A-\operatorname{sen}3A+3\operatorname{sen}B-\operatorname{sen}3B+3\operatorname{sen}C-\operatorname{sen}3C$

$4K=3(\operatorname{sen}A+\operatorname{sen}B+\operatorname{sen}C)-(\operatorname{sen}3A+\operatorname{sen}3B+\operatorname{sen}3C)$

sustituyendo cada suma en producto para la condición $A+B+C=180°$

$$4K=3\left(4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}\right)-\left(-4\cos\frac{3A}{2}\cos\frac{3B}{2}\cos\frac{3C}{2}\right)$$

$$\therefore K=3\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}+\cos\frac{3A}{2}\cos\frac{3B}{2}\cos\frac{3C}{2}$$

Problema 13

Si A, B y C son los ángulos de un triángulo, halle el máximo valor de $F=\operatorname{sen}A+\operatorname{sen}B+\operatorname{sen}C$

Resolución

Considerando al ángulo A constante, por supuesto B y C varían

Luego

$$F=\operatorname{sen}A+2\operatorname{sen}\left(\frac{B+C}{2}\right)\cos\left(\frac{B-C}{2}\right)$$

$$F=\operatorname{sen}A+2\cos\frac{A}{2}.\cos\left(\frac{B-C}{2}\right)$$

para que la expresión F sea máxima se cumple

$$\cos\left(\frac{B-C}{2}\right)=1$$

es decir $B=C$

ahora considerando al ángulo B constante se obtiene $A=C$

Por consiguiente $A=B=C$

Luego la expresión $F=\operatorname{sen}A+\operatorname{sen}B+\operatorname{sen}C$ alcanzará su máximo valor cuando los ángulos sean iguales a 60°, así

$$F_{máx}=3\operatorname{sen}60° \qquad \therefore F_{máx}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

Problema 14

¿En qué tipo de triángulo ABC se cumple $\operatorname{sen}^2A+\operatorname{sen}^2B+\operatorname{sen}^2C=2$?

Resolución

Multiplicando por 2 a la condición

$$\underbrace{2\operatorname{sen}^2A}_{1-\cos2A}+\underbrace{2\operatorname{sen}^2B}_{1-\cos2B}+\underbrace{2\operatorname{sen}^2C}_{1-\cos2C}=2\times2$$

$3-\cos2A-\cos2B-\cos2C=4$

$\cos2A+\cos2B+\cos2C=-1$ ... *(i)*

recordando el teorema siguiente

si $A+B+C=180°$

$\Rightarrow \cos2A+\cos2B+\cos2C=-4\cos A\cos B\cos C-1$

en *(i)* se obtiene

$-4\cos A.\cos B.\cos C-\not{1}=-\not{1}$

$\cos A.\cos B\cos C=0$

entonces

$$\cos A=0 \;\vee\; \cos B=0 \;\vee\; \cos C=0$$

es decir

$$A=90° \;\vee\; B=90° \;\vee\; C=90°$$

en el triángulo ABC uno de sus ángulos es 90°.

$\therefore$ ABC es un triángulo rectángulo.

Problema 15

Transforme a producto

$W = \text{sen}A+\text{sen}B+\text{sen}C-\text{sen}(A+B+C)$

Resolución

Agrupando los términos y transformando a producto

$$W=\underbrace{\text{sen}A+\text{sen}B}_{2\text{sen}\left(\frac{A+B}{2}\right)\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)}-\underbrace{[\text{sen}(A+B+C)-\text{sen}C]}_{2\cos\left(\frac{A+B+2C}{2}\right)\text{sen}\left(\frac{A+B}{2}\right)}$$

factorizando lo común

$$W=-2\text{sen}\left(\frac{A+B}{2}\right)\left[\cos\left(\frac{A+B+2C}{2}\right)-\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)\right]$$

$$W=-2\text{sen}\left(\frac{A+B}{2}\right)\left[-2\text{sen}\left(\frac{A+C}{2}\right)\text{sen}\left(\frac{B+C}{2}\right)\right]$$

ordenando

$$W = 4\text{sen}\left(\frac{A+B}{2}\right)\text{sen}\left(\frac{A+C}{2}\right)\text{sen}\left(\frac{B+C}{2}\right)$$

Problema 16

$R = \text{sen}^2 35°+\cos 55°\cos 15°-\text{sen}^2 70°$

Resolución

Multiplicando por 2 para degradar y transformar

$$2R = \underbrace{2\text{sen}^2 35°}_{1-\cos 70°}+2\cos 55°\cos 15°-\underbrace{2\text{sen}^2 70°}_{1-\cos 140°}$$

$$2R = \cos 140°-\cos 70°+\underbrace{2\cos 55°\cos 15°}_{\cos(55°+15°)+\cos(55°-15°)}$$

$$2R = \cos 140°-\cancel{\cos 70°}+\cancel{\cos 70°}+\cos 40°$$

$$2R = \underbrace{\cos(180°-40°)}_{-\cos 40°}+\cos 40°$$

$\therefore R = 0$

Para la resolución de este problema se puede utilizar otra manera.

Otro método

Se sabe

$\text{sen}^2\alpha-\text{sen}^2\beta=\text{sen}(\alpha+\beta)\text{sen}(\alpha-\beta)$ ...(I)

a partir de la expresión

$R = \text{sen}^2 35°-\text{sen}^2 70°+\cos 55°\cos 15°$

De (I)

$R = \text{sen}(35°-70°)\text{sen}(35°+70°)+\cos 55°\cos 15°$

$R=\text{sen}(-35°)\text{sen}105° \quad +\text{sen}35°\text{sen}75°$

$R=-\text{sen}35°\text{sen}105°+\text{sen}35°\text{sen}75°$

Factorizando sen 35°, se tiene

$R = -\text{sen}35°(\text{sen}105°-\text{sen}75°)$; Recordar $\cos 90°=0$

$R = -\text{sen}35°(2\cos 90°\text{sen}15°)$

$\therefore R = 0$

Problema 17

Determine el valor de la siguiente expresión

$E = 4\text{sen}\,\theta\,\text{sen}4\theta\,\text{sen}6\theta+2\text{sen}\,\theta$, si $\theta=\frac{\pi}{30}$

Resolución

Factorizando la parte común $2\text{sen}\theta$

$E=2\text{sen}\theta(2\text{sen}6\theta\,\text{sen}4\theta+1)$

Transformando de producto a suma

$E=2\text{sen}\theta(\cos 2\theta-\cos 10\theta+1)$

sustituyendo el valor de $\theta=\frac{\pi}{30}=6°$

$E=2\text{sen}6°(\cos 12°-\cos 60°+1)$

$E=2\text{sen}6°\left(\cos 12°+\frac{1}{2}\right) = \cancel{2}\text{sen}6°\left(\frac{2\cos 12°+1}{\cancel{2}}\right)$

$E=\text{sen}6°(2\cos 12°+1)$

recordar $\text{sen}3x=\text{sen}x(2\cos 2x+1)$

luego $E=\text{sen}18°$

$$\therefore E = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$$

Problema 18

De la siguiente igualdad

$4\cos x\cos 3x+1 = \frac{\text{sen}(px)}{\text{sen}x}$,

¿Cuál es el valor de p?

Resolución

Multiplicando a ambos miembros por sen$x$

$$2\times\underbrace{2\cos x\,\text{sen}x}_{\text{sen}2x}.\cos 3x+\text{sen}x=\text{sen}(px)$$

$$\underbrace{2\text{sen}2x\cos 3x}_{\text{sen}5x-\cancel{\text{sen}x}}+\cancel{\text{sen}x} = \text{sen}(px)$$

$\Rightarrow \text{sen}5x=\text{sen}(px) \qquad \therefore p = 5$

Problema 19

Determine el valor de A+B en la igualdad siguiente

$$\csc 70°+\csc 50°+\csc 10° = A\cos 40° - B$$

Resolución

Sea $M=\csc 70°+\csc 50°+\csc 10°$

Transformando a senos

$$M=\frac{1}{\operatorname{sen}70°}+\frac{1}{\operatorname{sen}50°}+\frac{1}{\operatorname{sen}10°}$$

Efectuando y multiplicando por 2

$$M=\frac{2\operatorname{sen}50°\operatorname{sen}10°+2\operatorname{sen}70°\operatorname{sen}10°+2\operatorname{sen}70°\operatorname{sen}50°}{2\operatorname{sen}70°\operatorname{sen}50°\operatorname{sen}10°}$$

Trasformando a diferencias de cosenos

$$M=\frac{\cos 40°-\cancel{\cos 60°}+\cancel{\cos 60°}-\cos 80°+\cos 20°-\cos 120°}{2\operatorname{sen}70°\operatorname{sen}50°\operatorname{sen}10°}$$

$$M=\frac{\cos 40°-\overbrace{\cos 80°}^{-\cos 100°}+\cos 20°-\overbrace{\cos 120°}^{-1/2}}{\frac{1}{2}\times\underbrace{4\times\operatorname{sen}10°\operatorname{sen}(60°-10°)\operatorname{sen}(60°+10°)}_{\operatorname{sen}30°}}$$

$$M=\frac{\cos 40°+\overbrace{\cos 100°+\cos 20°}^{2\cos 60°\cos 40°}+\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}}$$

$$M=\frac{\cos 40°+\cancel{2}\frac{1}{\cancel{2}}\cos 40°+\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}}$$

$$M=\frac{2\cos 40°+\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}}$$

$M=8\cos 40°+2$

Reemplazando M

$A\cos 40°-B=8\cos 40°+2$

Comparando se obtiene $A=8 : B=-2$

$\therefore\ A+B=6$

Problema 20

Degrade $16\operatorname{sen}^5 x$

Resolución

$16\operatorname{sen}^5 x=(2)2\operatorname{sen}^2 x.4\operatorname{sen}^3 x$

Aplicando las identidades de arco doble y triple

$$\begin{cases}2\operatorname{sen}^2 x=1-\cos 2x\\ 4\operatorname{sen}^3 x=3\operatorname{sen}x-\operatorname{sen}3x\end{cases}$$

luego

$16\operatorname{sen}^5 x=2(1-\cos 2x)(3\operatorname{sen}x-\operatorname{sen}3x)$

$$16\operatorname{sen}^5 x=6\operatorname{sen}x-2\operatorname{sen}3x-3\times\underbrace{2\cos 2x\operatorname{sen}x}_{\operatorname{sen}3x-\operatorname{sen}x}+\underbrace{2\operatorname{sen}3x\cos 2x}_{\operatorname{sen}5x+\operatorname{sen}x}$$

$16\operatorname{sen}5x=6\operatorname{sen}x-2\operatorname{sen}3x-3\operatorname{sen}3x+3\operatorname{sen}x+\operatorname{sen}5x+\operatorname{sen}x$

$\therefore\ 16\operatorname{sen}5x=10\operatorname{sen}x-5\operatorname{sen}3x+\operatorname{sen}5x$

Problema 21

Si $\alpha\in[85°\ ;\ 135°\rangle$, calcule los valores de la siguiente expresión

$H=\operatorname{sen}(\alpha+35°)\cos(\alpha+5°)$

Resolución

Multiplicando por 2, tenemos

$2H=2\operatorname{sen}(\alpha+35°)\cos(\alpha+5°)$;

Transformando a suma

$2H=\operatorname{sen}(2\alpha+40°)+\operatorname{sen}30°$

$$2H=\operatorname{sen}(2\alpha+40°)+\frac{1}{2}$$

del dato $85°\leq\alpha<135°$

multiplicando por (2) $170°\leq 2\alpha<270°$

sumando 40° $210°\leq 2\alpha+40°<310°$

representando al intervalo de los arcos $(2\alpha+40°)$ en la C.T.

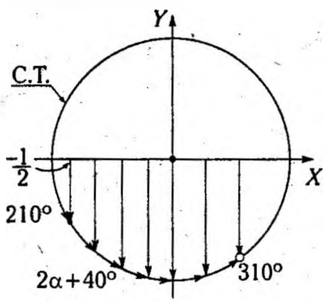


Figura 5.29

entonces $-1 \leq \operatorname{sen}(2\alpha + 40°) \leq -\frac{1}{2}$

sumando $\left(\frac{1}{2}\right)$

$$\underbrace{-\frac{1}{2} \leq \operatorname{sen}(2\alpha + 40°) + \frac{1}{2}}_{2H} \leq 0$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{4} \leq H \leq 0$$

$$\therefore H = \left[-\frac{1}{4}\,;0\right]$$

Problema 22

Halle el valor de θ en el intervalo $\langle 180°; 270°\rangle$ tal que $\tan\theta = \frac{1}{2}\sec 80° - 2\operatorname{sen}70°$

Resolución

$$\tan\theta = \frac{1}{2} \times \frac{1}{\cos 80°} - 2\operatorname{sen}70°$$

$$\tan\theta = \frac{1 - 2 \times 2\cos 80° \operatorname{sen}70°}{2\cos 80°}$$

$$\tan\theta = \frac{1 - 2(\operatorname{sen}150° - \operatorname{sen}10°)}{2\cos 80°}$$

$$\tan\theta = \frac{1 - 2\left(\frac{1}{2} - \operatorname{sen}10°\right)}{2\cos 80°} = \frac{\not{1} - \not{1} + 2\operatorname{sen}10°}{2\cos 80°}$$

$$\tan\theta = \frac{2\operatorname{sen}10°}{2\cos 80°} = 1$$

En la circunferencia trigonométrica

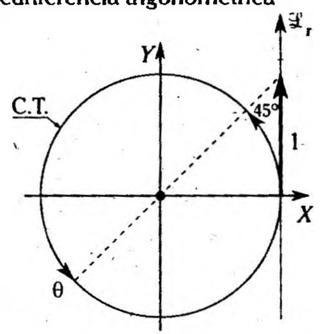


Figura 5.30

$$\Rightarrow \theta = 45° + 180° \qquad \therefore\ \theta = 225°$$

Problema 23

Indique el valor de x en la siguiente igualdad

$$\frac{\operatorname{sen}5\theta}{\operatorname{sen}\theta} = x^4 - 5x^2 + 5$$

Resolución

Sumemos 1 a cada miembro y operamos

$$\frac{\operatorname{sen}5\theta + \operatorname{sen}\theta}{\operatorname{sen}\theta} = x^4 - 5x^2 + 5 + 1$$

en el primer miembro transformando a producto

$$\frac{2\operatorname{sen}3\theta\cos 2\theta}{\operatorname{sen}\theta} = x^4 - 5x^2 + 5 + 1$$

$$\frac{2\not{\operatorname{sen}\theta}(2\cos 2\theta + 1)\cos 2\theta}{\not{\operatorname{sen}\theta}} = x^4 - 5x^2 + 5 + 1$$

$$4\cos^2 2\theta + 2\cos 2\theta = x^4 - 5x^2 + 5 + 1$$

Expresando en términos de $\operatorname{sen}\theta$

$$4(1 - 2\operatorname{sen}^2\theta)^2 + 2(1 - 2\operatorname{sen}^2\theta) = x^4 - 5x^2 + 6$$

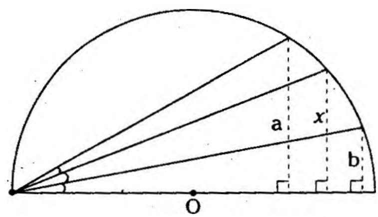
$$16\operatorname{sen}^4\theta - 20\operatorname{sen}^2\theta + 6 = x^4 - 5x^2 + 6$$

$$(2\operatorname{sen}\theta)^4 - 5(2\operatorname{sen}\theta)^2 + 6 = x^4 - 5x^2 + 6$$

de esta última igualdad identificamos que $x = 2\operatorname{sen}\theta$

Problema 24

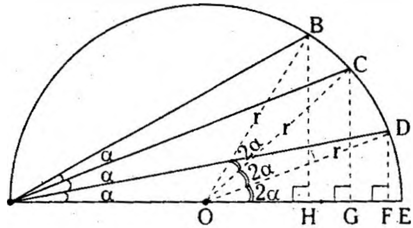
En el gráfico se muestra una semicircunferencia de centro O. Halle x en términos de a y b.



(a)

Resolución

Designamos al radio de la semicircunferencia como r y a los ángulos iguales como α



(b)

Figura 5.31

En triángulo OHB
$a = r\,\text{sen}6\alpha$ ... (1)
En triángulo OGC
$x = r\,\text{sen}4\alpha$ ... (2)
En triángulo OFD
$b = r\,\text{sen}2\alpha$ ... (3)

Sumando (1) y (3)

$a+b = r(\text{sen}6\alpha + \text{sen}2\alpha)$

expresando en producto al 2do. miembro

$a+b = 2r\,\text{sen}4\alpha\cos 2\alpha$ ...(4)

dividiendo (2) y (3)

$$\frac{x}{b} = \frac{r\,\text{sen}4\alpha}{r\,\text{sen}2\alpha} = 2\cos 2\alpha \quad ...(5)$$

reemplazando (3) y (5) en (4)

$$a+b = \underbrace{r\,\text{sen}4\alpha}_{x}.\underbrace{2\cos 2\alpha}_{\frac{x}{b}}$$

$\Rightarrow x^2 = (a+b)b$

$\therefore\ x = \sqrt{(a+b)b}$

Problema 25

Halle una relación entre α y β, tal que se verifique la siguiente relación $\text{sen}\alpha = \cos\beta$

Resolución

A partir de la condición

$\text{sen}\alpha = \cos\beta$

pasando todo a un solo miembro

$\text{sen}\alpha - \underbrace{\cos\beta} = 0$

$$\text{sen}\alpha - \text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) = 0$$

transformando a producto

$$2\,\text{sen}\left(\frac{\alpha - \left(\frac{\pi}{2} - \beta\right)}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha + \left(\frac{\pi}{2} - \beta\right)}{2}\right) = 0$$

reduciendo

$$2\,\text{sen}\left(\frac{\alpha + \beta - \frac{\pi}{2}}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha - \beta + \frac{\pi}{2}}{2}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \text{sen}\left(\frac{\alpha + \beta - \frac{\pi}{2}}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha - \beta + \frac{\pi}{2}}{2}\right) = 0$$

igualando cada factor a 0 tenemos

i) $\text{sen}\left(\frac{\alpha + \beta - \frac{\pi}{2}}{2}\right) = 0 \Rightarrow \frac{\alpha + \beta - \frac{\pi}{2}}{2} = K\pi\ ;\ K \in \mathbb{Z}$

de donde: $\alpha + \beta = (4K+1)\frac{\pi}{2}\ ;\ K \in \mathbb{Z}$

ii) $\cos\left(\frac{\alpha - \beta + \frac{\pi}{2}}{2}\right) = 0 \Rightarrow \frac{\alpha - \beta + \frac{\pi}{2}}{2} = (2n+1)\frac{\pi}{2}\ ;\ n \in \mathbb{Z}$

de donde: $\alpha - \beta = (4n+1)\frac{\pi}{2}\ ;\ n \in \mathbb{Z}$

La relación entre A y B estará dada por

$$\alpha + \beta = (4K+1)\frac{\pi}{2}\ \vee\ \alpha - \beta = (4n+1)\frac{\pi}{2}\ ;\ n\ ;\ K \in \mathbb{Z}$$

Teniendo en cuenta este problema, podemos concluir lo siguiente

> si $\text{sen}\alpha = \cos\beta \Rightarrow \alpha + \beta = (4K+1)\frac{\pi}{2}$
> $\vee\ \alpha - \beta = (4n+1)\frac{\pi}{2}\ ;\ n, K \in \mathbb{Z}$

luego podríamos resolver ciertas ecuaciones como por ejemplo

a) $\text{sen}7\alpha = \cos 5\alpha$

1er. caso

i) $7\alpha + 5\alpha = (4K+1)\frac{\pi}{2}$

$12\alpha = (4K+1)\frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow \alpha = (4K+1)\frac{\pi}{24}\ ;\ K \in \mathbb{Z}$

2do. caso

ii) $7\alpha - 5\alpha = (4n+1)\frac{\pi}{2}$

$2\alpha = (4n+1)\frac{\pi}{2}$

$\alpha = (4n+1)\frac{\pi}{4}\ ;\ n \in \mathbb{Z}$

luego $\alpha = \left\{(4K+1)\frac{\pi}{24}\ ;\ (4n+1)\frac{\pi}{4}\right\}$

de igual forma lo invitamos a demostrar la siguiente relación

> si $\tan\alpha = \cot\beta$
> $\Rightarrow \alpha + \beta = (2K+1)\frac{\pi}{2}\ ;\ K \in \mathbb{Z}$

Problema 26

Calcule el valor de $C=\tan^2\frac{\pi}{7}+\tan^2\frac{2\pi}{7}+\tan^2\frac{3\pi}{7}$

Resolución

Expresando en secantes y luego a cosenos $C=\sec^2\frac{\pi}{7}-1+\sec^2\frac{2\pi}{7}-1+\sec^2\frac{3\pi}{7}-1$

$$C=\frac{1}{\cos^2\frac{\pi}{7}}+\frac{1}{\cos^2\frac{2\pi}{7}}+\frac{1}{\cos^2\frac{3\pi}{7}}-3$$

efectuando

$$C=\frac{\cos^2\frac{2\pi}{7}\cos^2\frac{3\pi}{7}+\cos^2\frac{\pi}{7}\cos^2\frac{3\pi}{7}+\cos^2\frac{\pi}{7}\cos^2\frac{2\pi}{7}}{\cos^2\frac{\pi}{7}.\cos^2\frac{2\pi}{7}.\cos^2\frac{3\pi}{7}}-3$$

$$C=\frac{\left(2\cos^2\frac{2\pi}{7}\right)\left(2\cos^2\frac{3\pi}{7}\right)+\left(2\cos^2\frac{\pi}{7}\right)\left(2\cos^2\frac{3\pi}{7}\right)+\left(2\cos^2\frac{\pi}{7}\right)\left(2\cos^2\frac{2\pi}{7}\right)}{4\left(\cos\frac{\pi}{7}.\cos\frac{2\pi}{7}.\cos\frac{3\pi}{7}\right)^2}-3$$

$$C=\frac{\left(1+\cos\frac{4\pi}{7}\right)\left(1+\cos\frac{6\pi}{7}\right)+\left(1+\cos\frac{2\pi}{7}\right)\left(1+\cos\frac{6\pi}{7}\right)+\left(1+\cos\frac{2\pi}{7}\right)\left(1+\cos\frac{4\pi}{7}\right)}{4\left(\frac{1}{8}\right)^2}-3$$

Efectuando obtenemos

$$C=\frac{3+2\left(\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{6\pi}{7}\right)+\left(\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}\cos\frac{6\pi}{7}+\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{6\pi}{7}\right)}{\frac{1}{16}}-3$$

$$C=\frac{3+2\left(-\frac{1}{2}\right)+\left(-\frac{1}{2}\right)}{\frac{1}{16}}-3\ ;\ \cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}+\frac{4\pi}{7}.\cos\frac{6\pi}{7}+\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{6\pi}{7}=-\frac{1}{2}$$

$\therefore\ C=21$

Problema 27

Demuestre que $\sum_{K=1}^{4}\cos^4\left(\frac{K\pi}{9}\right)=\frac{19}{16}$

Resolución

Designando S al primer miembro y desarrollando para K = 1,2,3,4.

$S=\cos^4\left(\frac{\pi}{9}\right)+\cos^4\left(\frac{2\pi}{9}\right)+\cos^4\left(\frac{3\pi}{9}\right)+\cos^4\left(\frac{4\pi}{9}\right)$ recordando la identidad $8\cos^4x=3+4\cos2x+\cos4x$

luego

$$8\cos^4\frac{\pi}{9}=3+4\cos\frac{2\pi}{9}+\cos\frac{4\pi}{9}$$

$$8\cos^4\frac{2\pi}{9}=3+4\cos\frac{4\pi}{9}+\cos\frac{8\pi}{9}$$

$$8\cos^4\frac{3\pi}{9}=3+4\cos\frac{6\pi}{9}+\cos\frac{12\pi}{9}\ ;\cos\frac{12\pi}{9}=\cos\frac{6\pi}{9}$$

$$8\cos^4\frac{4\pi}{9}=3+4\cos\frac{8\pi}{9}+\cos\frac{16\pi}{9}\ ;\cos\frac{16\pi}{9}=\cos\frac{2\pi}{9}$$

sumando miembro a miembro se obtiene

$$8S=12+4\underbrace{\left(\cos\frac{2\pi}{9}+\cos\frac{4\pi}{9}+\cos\frac{6\pi}{9}+\cos\frac{8\pi}{9}\right)}_{-\frac{1}{2}}+\underbrace{\cos\frac{4\pi}{9}}_{-\cos\frac{5\pi}{9}}+\underbrace{\cos\frac{8\pi}{9}}_{-\cos\frac{\pi}{9}}+\underbrace{\cos\frac{12\pi}{9}}_{-\cos\frac{3\pi}{9}}+\underbrace{\cos\frac{16\pi}{9}}_{-\cos\frac{7\pi}{9}}$$

$$8S=12-2-\underbrace{\left(\cos\frac{\pi}{9}+\cos\frac{3\pi}{9}+\cos\frac{5\pi}{9}+\cos\frac{7\pi}{9}\right)}_{\frac{1}{2}}\qquad\therefore\ S=\frac{19}{16}$$

Problema 28

Halle el equivalente de la expresión siguiente $F=\cos^6\alpha+\cos^6(120°+\alpha)+\cos^6(120°-\alpha)$

Resolución

Para ello partimos de la siguiente degradación $32\cos^6\theta=\cos6\theta+6\cos4\theta+15\cos2\theta+10$

Entonces

$32\cos^6\alpha=\cos6\alpha+6\cos4\alpha+15\cos\alpha+10$ ... (*i*)

$32\cos^6(120°+\alpha)=\cos(720°+6\alpha)+6\cos(480°+4\alpha)+15\cos(240°+2\alpha)+10$ ...(*ii*)

$32\cos^6(120°-\alpha)=\cos(720°-6\alpha)+6\cos(480°+4\alpha)+15\cos(240°+2\alpha)+10$ ...(*iii*)

Sumando miembro a miembro las tres últimas identidades obtenemos

$$32(F)=\cos6\alpha+\cos(720°+6\alpha)+\cos(720°-6\alpha)+6[\underbrace{\cos4\alpha+\cos(480°+4\alpha)+\cos(480°-4\alpha)}_{0}]+15[\underbrace{\cos2\alpha+\cos(240°+2\alpha)+\cos(240°-2\alpha)}_{0}]+30$$

Reduciendo

$$32(F)=3\cos6\alpha+30\qquad\Rightarrow F=\frac{3\cos6\alpha+30}{32}$$

Finalmente

$$\boxed{\cos^6\alpha+\cos^6(120°+\alpha)+\cos^6(120°-\alpha)=\frac{3\cos6\alpha+30}{32}}$$

EJERCICIOS

I. Transforme cada suma o diferencia de los ejercicios del 1 al 10, en producto.

1. $\text{sen}9x + \text{sen}x$
2. $\cos7° - \cos51°$
3. $\text{sen}14x - \text{sen}10x$
4. $\cos\frac{\pi}{16} + \cos\frac{\pi}{8}$
5. $\text{sen}(50°+x)+\text{sen}(x+20°)$
6. $\cos(45° - 3x)+\cos(15°+3x)$
7. $\text{sen}\frac{\pi}{7} - \text{sen}\left(\frac{\pi}{7} - 2x\right)$
8. $\cos11° - \text{sen}81°$
9. $\text{sen}(30°+x)+\cos x$
10. $\cos(10°+2x) - \text{sen}6x$

II. Transforme cada producto de los ejercicios del 11 al 20 en suma o diferencias.

11. $2\text{sen}7x\cos2x$
12. $\cos(18° - x)\cos x$
13. $2\text{sen}27°\text{sen}1°$
14. $\cos4\alpha\,\text{sen}5\alpha$
15. $\text{sen}(30° - x)\text{sen}(30°+x)$
16. $\text{sen}\frac{\pi}{9}\cos\frac{4\pi}{9}$
17. $2\cos\left(\frac{3\pi}{4}+\theta\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)$
18. $\cos(\pi+1)\text{sen}(\pi-1)$
19. $\text{sen}\frac{9}{4}\text{sen}\frac{1}{4}$
20. $2\text{sen}\left(\frac{2\pi}{3} - x\right)\cos\left(\frac{\pi}{6}+x\right)$

RESPUESTAS

1. $2\text{sen}5x\cos4x$
2. $2\text{sen}29°\text{sen}22°$
3. $2\cos12x\,\text{sen}2x$
4. $2\cos\frac{3\pi}{32}\cos\frac{\pi}{32}$
5. $2\text{sen}(35°+x)\cos15°$
6. $\sqrt{3}\cos(15° - 3x)$
7. $2\text{sen}\,x\cos\left(\frac{\pi}{7}-x\right)$
8. $-2\text{sen}10°\text{sen}1°$
9. $\sqrt{3}\cos(x - 30°)$
10. $2\cos(40°+2x)\text{sen}(40° - 4x)$
11. $\text{sen}9x + \text{sen}5x$
12. $\frac{1}{2}\cos18°+\frac{1}{2}\cos(18°-2x)$
13. $\cos26° - \cos28°$
14. $\frac{1}{2}\text{sen}9\alpha+\frac{1}{2}\text{sen}\,\alpha$
15. $\frac{1}{2}\cos2x-\frac{1}{4}$
16. $\frac{1}{2}\text{sen}\frac{5\pi}{9}-\frac{\sqrt{3}}{4}$
17. $-1-\text{sen}2\theta$
18. $-\frac{1}{2}\text{sen}2$
19. $\frac{1}{2}\cos2-\frac{1}{2}\cos\left(\frac{5}{2}\right)$
20. $\frac{1}{2}+\cos2x$

Problemas Propuestos

1. Si la siguiente igualdad

$$\frac{2}{1+\cos x}+\frac{2}{\sec x-1}=p+q\cot^2 x$$

verifica una identidad, halle $p+q$.

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) $3\csc\frac{\pi}{6}$

2. Dé igualmente el valor de $a+b+c$ tál que se cumple

$$\frac{3\operatorname{sen}x+2\cos x}{-3\cos^3 x-2\operatorname{sen}^3 x+5(\operatorname{sen}x+\cos x)}=\frac{\sec^2 x}{a+b\tan^2 x+c\tan x}$$

A) −1 B) 1 C) 2
D) 3 E) 5

3. Simplifique la expresión siguiente

$$M=\sqrt{1+\frac{3-\sec^2 x-\csc^2 x}{\tan^4 x+\cot^2 x}}$$

si $x\in$ IVC

A) $-\operatorname{sen}x$ B) $\cos x$ C) $\sec x$
D) $-\csc x$ E) $-\tan x$

4. Halle $a+b+c$ de la siguiente identidad

$$\frac{\operatorname{sen}x\cos x}{\operatorname{sen}x+\cos x-1}=a\operatorname{sen}x+b\cos x+c$$

A) $\frac{1}{2}$ B) 1 C) 2
D) $\frac{3}{2}$ E) 3

5. Si se tiene $\frac{1+\operatorname{sen}t}{\cos t}=3$

halle el valor de $\cos t$

A) $\frac{4}{13}$ B) 0 C) $\frac{3}{5}$
D) $\frac{4}{5}$ E) $\frac{3}{8}$

6. Dado $\operatorname{sen}\theta\cos\theta=\frac{1}{3}$

calcule $W=\frac{\operatorname{sen}^4\theta+\cos^4\theta}{\operatorname{sen}^6\theta+\cos^6\theta}$

A) $\frac{8}{5}$ B) $\frac{7}{5}$ C) $\frac{7}{8}$
D) $\frac{11}{6}$ E) $\frac{7}{6}$

7. Calcule el valor de $\sec^4 x-\sec^2 x$

a partir de $\tan x-\tan^2 x=1$

A) 1 B) −1 C) 0
D) $\frac{1}{2}$ E) $-\frac{1}{2}$

8. Si $\theta\in$ IIC, reduzca la expresión

$$E=\tan\theta\sqrt{\frac{\csc\theta+\cot\theta}{\csc\theta-\cot\theta}}+\cot\theta\sqrt{\frac{\sec\theta+\tan\theta}{\sec\theta-\tan\theta}}$$

A) $\sec\theta+\csc\theta$
B) $\csc\theta-\sec\theta$
C) $\sec\theta-\csc\theta$
D) $\sec\theta+\tan\theta$
E) $\csc\theta+\cot\theta$

9. Siendo θ un ángulo agudo, se tiene la siguiente igualdad

$$\operatorname{sen}\theta+\frac{1-\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta\cos\theta}=(a^{-1}-a+(a^{-2}-1)^{1/2})^{-1}+a$$

Halle a en función de θ

A) $\operatorname{sen}\theta$ B) $\cos\theta$ C) $\tan\theta$
D) $\cot\theta$ E) $\sec\theta$

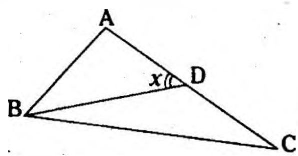
10. Si se cumple $sen^3\theta - cos^5\theta = 0$
obtenga $w = tan^{10}\theta + 2tan^8\theta + tan^6\theta$

A) $\frac{1}{4}$ B) $\frac{1}{2}$ C) 1
D) 2 E) 4

11. Calcule $tanx + cotx$
si $senx + cosx = senx\, cosx$

A) $-1+\sqrt{2}$ B) $-1-\sqrt{2}$ C) $-2+\sqrt{2}$
D) $2+\sqrt{2}$ E) $2\sqrt{2}$

12. De la figura adjunta, halle tan$x$.
Datos: AB=2, BC=3, m∢ABC=2θ
además: BD es bisectriz.



A) tanθ
B) $\frac{tan\theta + sec\theta}{2}$
C) 3tanθ
D) $\frac{cot\theta + csc\theta}{2}$
E) 5tanθ

13. Siendo x un arco comprendido en el intervalo $\left\langle \frac{5\pi}{6} ; \frac{5\pi}{4} \right\rangle$, reduzca

$$T = senx + \sqrt{1 + \frac{2(tanx - senx)}{tan^2x - secx + 1}}$$

A) sen$x$ B) cos$x$
C) 2sen$x$+cos$x$
D) –sen$x$ E) – cos$x$

14. Halle el valor de $cot\theta - tan\theta$ si se cumple
$sec^4\theta + csc^4\theta - 2sec^2\theta - 2csc^2\theta = 2$

A) $\sqrt{2}$ B) $-\sqrt{2}$
C) $\pm\sqrt{2}$
D) $1-\sqrt{2}$ E) $\pm\sqrt{\sqrt{6}-2}$

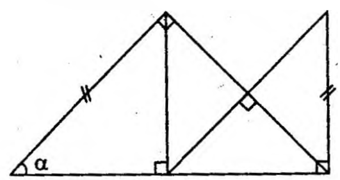
15. Siendo $asenx + bcosx = c$
además, $(a+b+c)(a+b-c) = 2ab$
halle el valor de la expresión $\frac{a^3}{senx} + \frac{b^3}{cosx}$

A) a^3 B) b^3 C) a^2b^2
D) c^3 E) abc

16. Dada la condición: $11senx + 60cosx = -61$; además x es un arco del tercer cuadrante, calcule $cscx + cotx$.

A) 1 B) –1 C) $-\frac{1}{11}$
D) $-\frac{71}{60}$ E) $\frac{11}{60}$

17. Del gráfico siguiente



Calcule $\frac{1 + sen^2\alpha + sen^3\alpha}{1 + cos^2\alpha + cot^4\alpha}$

A) 1 B) 2 C) $\frac{3}{2}$
D) $\frac{1}{3}$ E) $\frac{1}{2}$

18. Halle una relación entre m y n, independiente de x, según las condiciones:

$\sqrt{\tan x}-\sqrt{\cot x}=m$ ... *(i)*
$\text{sen}x\cos x=n$ ... *(ii)*

A) $n^2m+2m=1$ B) $m^2n^2+2m=1$
C) $m^2n^2+2n=1$
D) $m^2n+2n=1$ E) $m^2-n^2=mn$

19. Si $x-y=\frac{3\pi}{2}$, elimine las variables x e y de

$\frac{\text{sen}x}{\text{coty}}=p$ ... *(i)*

$\frac{\cos x}{\tan y}=q$ ... *(ii)*

A) $p^2-q^2=1$ B) $q^2-p^2=1$
C) $p^2+q^2=1$
D) $p^2+q^2=2pq$ E) $p^2-q^2=2pq$

20. Elimine la variable θ a partir de

$\sec\theta+\tan\theta=a$ ... (β)

$\sqrt{\sec\theta}+\sqrt{\tan\theta}=b$ ... (φ)

A) $a^4b^2+1=2b^2a^3$ B) $a^2b^4+1=2b^2a^3$
C) $2ba^2=a^2b^3+1$
D) $b^2a^3+1=2a^2b^3$ E) $a^2b^4+1=2b^3a^2$

21. Si se cumple:

$m^3\text{sen}x-n^3\cos x=\text{sen}\frac{\pi}{2}$ ...(1)

$m^3\csc x-n^3\sec x=\cos 2\pi$ ...(2)
halle una expresión independiente de x.

A) $(m^2-n^2)(m^4+n^4)=1$
B) $(m^2+n^2)(m^4-n^4)=1$
C) $(m^2+n^2)^2(m^3+n^3)=1$
D) $(m^2-n^2)^2(m^3-n^3)=1$
E) $(m^2+n^2)(m^2-n^2)^2=1$

22. De las expresiones

$\text{exsec}\theta+\text{vers}\theta=a$ ... (α)

$\text{vers}\theta.\sec\theta+1=b$ ...(v)

elimine θ

A) $b^2=1-ab$ B) $b^2=1+ab$
C) $a^2=1+ab$
D) $a^2=1-ab$ E) $b^2=1+2ab$

23. Si $\text{sen}^3x+\text{sen}x=1$, calcule el valor de $\csc^5x-\cot^2x-\csc^4x$

A) 0 B) 1 C) 2
D) 3 E) –1

24. Dada la igualdad $\cos x=\cot x-2\text{sen}x$

reduzca $M=\frac{\csc^2x-4\sec^2x}{5-2\csc x}$

A) $\csc x$ B) $\text{sen}x$ C) 1
D) $-\sec x$ E) –1

25. Si se verifica $(\cos x+\sec x)^2=2+3\cos x$
halle el valor de $P=27\text{sen}^2x+\sec^7x+\cos^5x$

A) 7 B) 18 C) 9
D) 15 E) 12

26. Si $a=1+\text{sen}^2x$ y $b=1+\cos^2x$
calcule

$M=\frac{2(a^3+b^3)+9b^2}{1+\cos^4x}$

A) 20 B) 24 C) 27
D) 29 E) 31

27. Si $\frac{(\text{vers}x)^2}{a}+\frac{(\text{cov}\,x)^2}{b}=2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$

halle
$k=(2\text{ex}\sec x)(a\tan x+b)+2a\tan x+b\tan^2x$
en términos de a y b.

A) $-a-2b$ B) $a+2b$ C) $a-2b$
D) $2b-a$ E) $a-b$

28. Halle senA, si se cumple
cosA=tanB
cosB=tanC
cosC=tanA

A) $\frac{(\sqrt{5}-1)}{2}$ B) $-\frac{(\sqrt{5}+1)}{4}$ C) $\pm\frac{(\sqrt{5}-1)}{4}$
D) $\pm\frac{(\sqrt{5}-1)}{2}$ E) $\pm\frac{(\sqrt{5}+1)}{2}$

29. Halle el valor de
$y=(\tan x-1)(\tan^2 x-\tan x+1)$
a partir de la siguiente condición
$\cos x+\operatorname{sen} x\cos x-1=0$

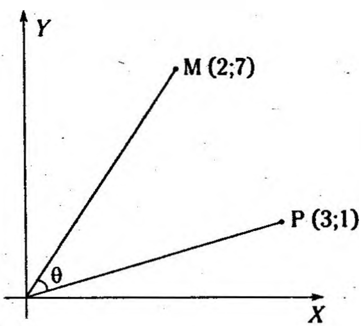
A) –4 B) –2 C) 0
D) 1 E) 2

30. Reduzca

$$L=\frac{64\cos^7 x-112\cos^5 x+60\cos^3 x-10\cos x}{\cos 2x\cos 5x}$$

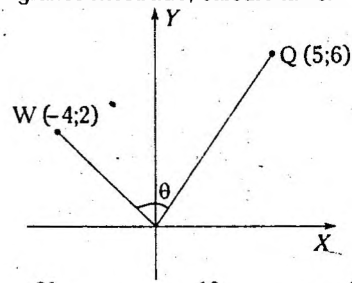
A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

31. En la siguiente figura, calcule tanθ



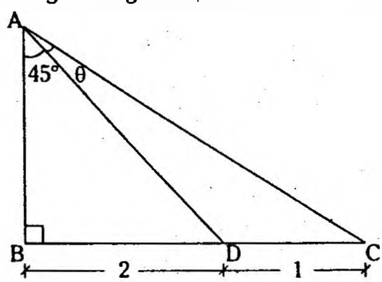
A) $\frac{15}{13}$ B) $\frac{16}{13}$ C) $\frac{17}{13}$
D) $\frac{18}{13}$ E) $\frac{19}{13}$

32. Del gráfico mostrado, calcule tan θ.



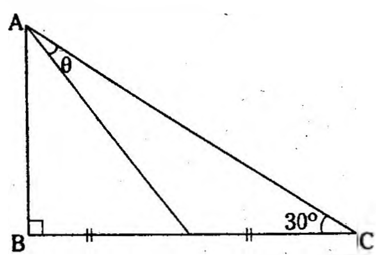
A) $-\frac{21}{4}$ B) $-\frac{19}{4}$ C) $-\frac{17}{4}$
D) $-\frac{15}{4}$ E) $-\frac{13}{4}$

33. Del siguiente gráfico, calcule cotθ.



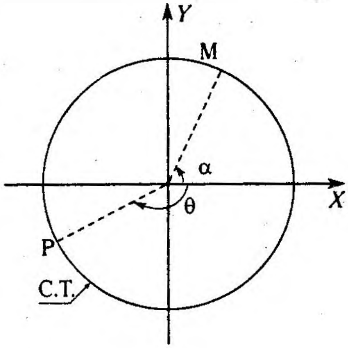
A) 5 B) 6 C) 7
D) 8 E) 9

34. A partir de la figura adjunta, obtenga el valor de tan θ.



A) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ B) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ C) $\frac{\sqrt{3}}{4}$
D) $\frac{\sqrt{3}}{5}$ E) $\frac{\sqrt{3}}{6}$

35. Sabiendo que la distancia entre M y P es 1,5µ, calcule $\cos(\alpha-\theta)$.



A) $-\frac{1}{16}$ B) $-\frac{1}{8}$ C) $-\frac{1}{6}$
D) $-\frac{1}{4}$ E) $-\frac{1}{2}$

En los problemas 36, 37 y 38, determine el valor de θ.

36. $\sqrt{2}\text{sen}2^\circ+\cos47^\circ=\cos\theta$; si: $0<\theta<90^\circ$

A) 40° B) 41° C) 42°
D) 43° E) 44°

37. $\cos1^\circ-2\text{sen}31^\circ=\sqrt{3}\text{sen}\theta$; si: $-90^\circ<\theta<0$

A) –2° B) –1° C) –3°
D) –5° E) –7°

38. $(\cos9^\circ-\text{sen}9^\circ)(\cos9^\circ+\text{sen}9^\circ)^{-1}=\tan\theta$

θ : agudo

A) 30° B) 32° C) 34°
D) 36° E) 38°

39. Si $\cos(2y+x)=3\cos x$

calcule $\dfrac{\cot(x+y)}{\tan y}$

A) –4 B) –3 C) –2
D) –1 E) 1

40. Simplifique la expresión

$$\frac{\text{sen}(A+B)\tan(A-B)}{\cos^2A-\cos^2B}$$

A) sen(A–B) B) cos(A–B) C) tan(A–B)
D) –sec(A–B) E) –csc(A–B)

41. Calcule el valor de $A=\dfrac{\tan14^\circ}{\tan52^\circ-\tan38^\circ}$

A) $\frac{1}{8}$ B) $\frac{1}{6}$ C) $\frac{1}{4}$
D) $\frac{1}{2}$ E) 1

42. Luego de simplificar la siguiente expresión

$$W=\frac{\cos(A+B)+\text{sen}(A-B)}{(\cos A+\text{sen}A)(\cos B-\text{sen}B)}$$

se obtendrá el valor de

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 6

43. Si $\tan4x=0{,}1$, determine el valor de

$$N=\frac{1}{\tan3x+\tan x}-\frac{1}{\cot3x+\cot x}$$

A) 6 B) 8 C) 10
D) 12 E) 14

44. Si $\alpha-\beta=\dfrac{\pi}{12}$, obtenga el valor de

$$N=(\text{sen}\alpha+\cos\alpha)(\text{sen}\beta+\cos\beta)-\text{sen}(\alpha+\beta)$$

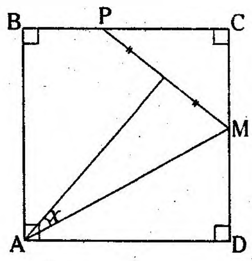
A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{4}$ C) $\frac{\sqrt{3}}{2}$
D) $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ E) $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

45. Calcule el valor de $\cot\left(\dfrac{5\pi}{21}+x\right)$ sabiendo que

$$\sqrt{3}\tan\left(\frac{3\pi}{7}-x\right)-6=0$$

A) $\frac{\sqrt{3}}{9}$ B) $\frac{2\sqrt{3}}{9}$ C) $\frac{4\sqrt{3}}{9}$
D) $\frac{5\sqrt{3}}{9}$ E) $\sqrt{3}$

46. Si ABCD es un cuadrado, además, BC=4BP y CM=MD, entonces el valor de tan$x$ es



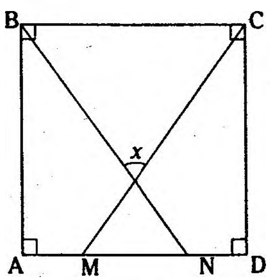
A) $\frac{7}{8}$ B) $\frac{7}{12}$ C) $\frac{7}{16}$

D) $\frac{7}{24}$ E) $\frac{7}{26}$

47. Si ABCD es un cuadrado, donde

$$AM = \frac{MN}{3} = \frac{ND}{2}$$

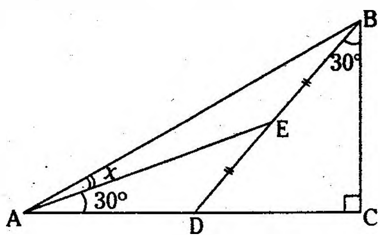
calcule $\sqrt[3]{\tan x}$



A) $\frac{3}{5}$ B) $\frac{3}{7}$ C) $\frac{3}{2}$

D) $\frac{2}{5}$ E) $\frac{2}{3}$

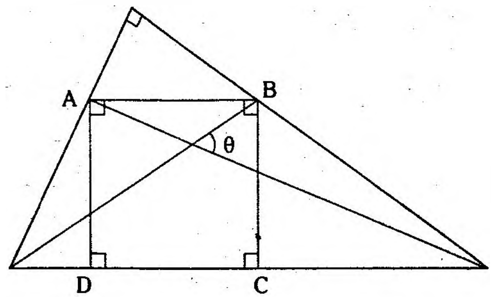
48. Del gráfico, ¿cuál es el valor de la cot$x$?



A) $\frac{\sqrt{2}}{3}$ B) $\frac{\sqrt{3}}{5}$ C) $\frac{\sqrt{3}}{7}$

D) $\frac{\sqrt{3}}{9}$ E) $3\sqrt{3}$

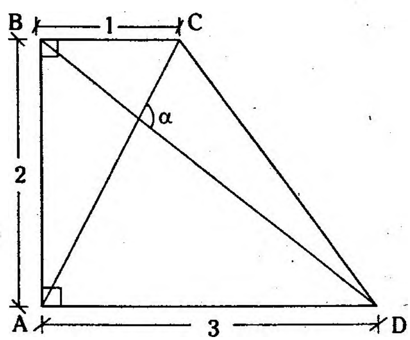
49. Si ABCD es un cuadrado, halle el máximo valor de tanθ.



A) $\frac{3}{4}$ B) $\frac{4}{3}$ C) $\frac{5}{4}$

D) $\frac{4}{5}$ E) 1

50. Del siguiente gráfico, halle el valor de $\sec^2\alpha + \csc^2\alpha$.



A) $\frac{4225}{64}$ B) $\frac{4235}{64}$ C) $\frac{435}{7}$

D) $\frac{445}{8}$ E) $\frac{25}{8}$

51. A partir de un triángulo ABC, obtenga K.

$$K = \frac{\cos A}{\operatorname{sen}B\operatorname{sen}C} + \frac{\cos B}{\operatorname{sen}A\operatorname{sen}C} + \frac{\cos C}{\operatorname{sen}A\operatorname{sen}B}$$

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

52. En un triángulo ABC se cumple
$\tan A + \tan B - \tan C = 0$
Determine el valor de $\tan A . \tan B$

A) 1 B) 2 C) 4
D) 6 E) 8

53. Si $x+y+z = 2\pi$
además, $\cos x = -\cos y \cos z$
¿A qué es igual $\cot y \cot z$?

A) $\frac{1}{6}$ B) $\frac{1}{4}$ C) $\frac{1}{2}$
D) 1 E) 2

54. Sabiendo que: $\tan(\alpha+\theta) - K\tan(\theta-\alpha) = 0$

calcule $\dfrac{\operatorname{sen}2\theta}{\operatorname{sen}2\alpha}$

A) $\frac{K+1}{2}$ B) $\frac{K-1}{2}$ C) $\frac{K+1}{K-1}$
D) $\frac{K}{2}$ E) $K+1$

55. Simplifique la siguiente expresión

$$E = \frac{3\cos^2 2\theta - \operatorname{sen}^2 2\theta}{\operatorname{sen}(60^\circ+2\theta)\operatorname{sen}(60^\circ-2\theta)}$$

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

56. Simplifique

$$K = \frac{(\tan 3x - \tan 2x)(1+\tan 2x \tan x)}{1+\tan 3x \tan 2x}$$

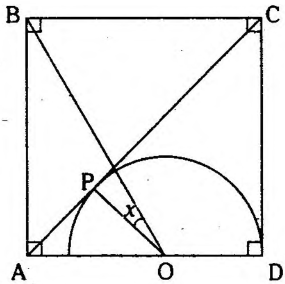
A) $\tan x \sec x$ B) $\tan x \sec 2x$ C) $\cot x \sec x$
D) $\cot x \sec 2x$ E) $\tan x \cos x$

57. Si $\frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{\pi}{2}$ y $\frac{3\pi}{4} < \beta < \pi$, reduzca la siguiente expresión

$$A = \frac{\cos\alpha\cos\beta(\tan\beta+\tan\alpha)}{\sqrt{1-\cos^2(\alpha+\beta)}}$$

A) –2 B) –1 C) 1
D) 2 E) 3

58. Del cuadrado ABCD mostrado, obtenga $7\tan x+1$, sabiendo que P es punto de tangencia y O: centro.



A) $\frac{2\sqrt{2}-1}{7}$ B) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ C) $\frac{\sqrt{3}}{2}$
D) $2\sqrt{2}$ E) $\sqrt{2}$

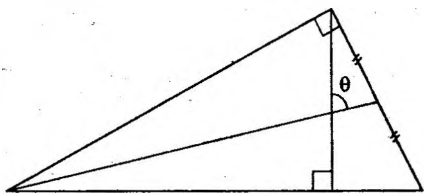
59. Si $x \in \mathbb{R}$, calcule el mínimo valor de
$W = \operatorname{sen}(\operatorname{sen}x) - \sqrt{3}\cos(\operatorname{sen}x)$

A) $2\operatorname{sen}\left(1-\frac{\pi}{3}\right)$
B) sen1
C) sen2
D) $2\operatorname{sen}\left(2-\frac{\pi}{3}\right)$
E) –2

60. Siendo A, B y C ángulos internos de un triángulo ABC se cumple
$\tan A(\tan B - n) + \tan B(\tan C - n) + \tan C(\tan A - n) = 0$
determine el equivalente de
$M = \csc^2 A + \csc^2 B + \csc^2 C$

A) $n^2 - 1$ B) n^2 C) n^2+1
D) n^2+2 E) n^2+3

61. Del gráfico adjunto ¿cuál es el valor mínimo de $\tan\theta$?



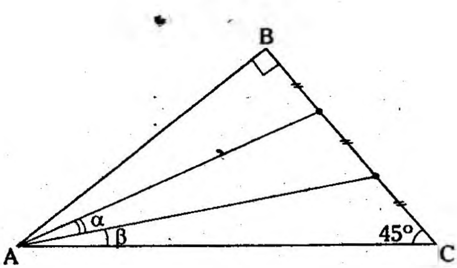
A) $\sqrt{3}$ B) $2\sqrt{2}$ C) $3\sqrt{3}$
D) $4\sqrt{3}$ E) $5\sqrt{3}$

62. Si $\alpha + \beta + \theta = 0$, obtenga el valor de P siendo
$P = \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\theta - 2\cos\alpha\cos\beta\cos\theta$

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

63. El gráfico muestra un triángulo ABC isósceles. Calcule

$$R = \tan\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)\tan\left(\frac{\pi}{4} - \beta\right)$$



A) $\frac{1}{6}$ B) $\frac{5}{6}$ C) $\frac{7}{6}$
D) $\frac{11}{6}$ E) $\frac{13}{6}$

64. Si $15\operatorname{sen}x - 8\cos x = M$, calcule el máximo valor de M, además $x \in \left[\frac{56\pi}{45}; \frac{373\pi}{180}\right]$

(considerar $\cot\frac{7\pi}{90} = 4$)

A) $17(\sqrt{6} - \sqrt{8})$ B) $\sqrt{6} - \sqrt{8}$
C) $\frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}$
D) $17\left(\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}\right)$ E) $17\left(\frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}\right)$

65. Calcule
$E = (\tan 3\alpha - \tan 3\theta)/\tan 3\theta \tan 3\alpha$
siendo
$\tan^2\theta + \tan^2\alpha = 3\tan^2\theta\tan^2\alpha + 8\tan\theta\tan\alpha + 3$

A) −1 B) 0 C) 1
D) 2 E) $\sqrt{2}$

66. Si se verifica la igualdad
$2\csc\frac{\theta}{2} + 4\cot\frac{\theta}{4} = 7\tan\frac{\theta}{4}$
calcule $P = \cot\left(\frac{\pi+\theta}{4}\right) + \tan\left(\frac{5\pi+\theta}{4}\right)$

A) 21 B) 22 C) 11
D) $10\sqrt{3} - 1$ E) $10\sqrt{3} + 1$

67. Si $\tan x \tan y = \sqrt{2} - 1$

reduzca $E = \dfrac{1 + \tan^2(x+y).\tan^2(x-y)}{\left(\dfrac{\tan x}{\tan y} + \dfrac{\tan y}{\tan x}\right)^2}$

A) 1 B) 2 C) 1/2
D) 1/3 E) 1/4

68. Siendo
$C=\cos 8°\sec 36°\sec 46°$
$V=\tan 28°(24\tan 46°-\tan 36°)$
Calcule $7C+V$

A) 8 B) 25,5 C) 25
D) 13 E) 24

69. Sabiendo que:
$\alpha+\beta+\theta=\pi$; $\cos\alpha=\cos\beta\cos\theta$
calcule el valor de
$E=\text{sen}(\alpha-\beta)\sec\alpha\sec\beta+\tan(\alpha+\beta)$

A) –1 B) 0 C) 1
D) ±1 E) 2

70. En un triángulo ABC, se trazan las medianas AP; BN y CM; siendo G baricentro de dicho triángulo, se tiene que $m\sphericalangle MGA=\alpha$, $m\sphericalangle CGN=\theta$ y $m\sphericalangle PGB=\beta$. Determine el equivalente de $\cot A+\cot B+\cot G$.

A) $\tan\alpha\tan\beta\tan\theta$
B) $\cot\alpha+\cot\beta+\cot\theta$
C) $\tan\alpha+\cot\beta+\tan\theta$
D) $\cot\alpha+\tan\beta+\cot\theta$
E) $\cot\alpha.\cot\beta\cot\theta$

71. En un triángulo ABC, se cumple
$\cot(A+B)+\cot(B+C)+\cot(C+A)=-\sqrt{3}$
determine $\tan A\tan B+\tan B\tan C+\tan A\tan C$

A) 6 B) 9 C) 12
D) 15 E) 18

72. Si $(\tan^2 4a-\tan^2 a)\dfrac{\csc 5a}{1+\tan^2 4a}=A\sec^2 a\,\text{sen}3a$
calcule A.

A) $\frac{1}{4}$ B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{1}{3}$
D) 1 E) 2

73. Se tienen $x;y;z$ proporcionales a $\tan(\theta+\alpha)$; $\tan(\theta+\beta)$; $\tan(\theta+\gamma)$, respectivamente.
Determine el valor de la expresión

$$E=\left(\frac{x+y}{x-y}\right)\text{sen}^2(\alpha-\beta)+\left(\frac{y+z}{y-z}\right)\text{sen}^2(\beta-\gamma)+\left(\frac{z+x}{z-x}\right)\text{sen}^2(\gamma-\alpha)$$

A) –2 B) –1 C) 0
D) 1 E) 2

Del 74 al 78 verifique cada una de las siguientes identidades:

74. $\text{sen}(180°+x)\cos(90°+x)+\text{sen}(270°+x)(-\cos x)=1$

75. $\dfrac{\text{sen}(270°+x)\tan(90°+x)}{\cos(x-180°)\cot(360°-x)}=1$

76. $\sec(x-180°)\csc(540°+x)=\tan x+\cot x$

77. $\text{sen}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\text{sen}(x-3\pi)-\cos\left(x-\frac{3\pi}{2}\right)\cos(x-10\pi)=\text{sen}2x$

78. $\tan\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\text{sen}(x-13\pi)-2\cot(n\pi-x)\cos\left(x-\frac{17\pi}{2}\right)=3\cos x$; $n\in\mathbb{Z}$

79. Calcule el valor de la expresión

$$E=\frac{2\,\text{sen}\left(\frac{3\pi}{2}-\theta\right)\cos(5\pi-\theta)}{\tan\left(\frac{17\pi}{2}+\theta\right)}$$

sabiendo que $\tan\theta=-\frac{1}{2}$

A) $\frac{4}{5}$ B) $\frac{8}{5}$ C) $\frac{5}{4}$
D) $\frac{5}{8}$ E) $-\frac{3}{5}$

80. Si A y B son ángulos suplementarios, reduzca la siguiente expresión

$$M=\frac{\text{sen}(A+2B)+\cos(2A+B)}{\cos(360^\circ-A)+\cos(270^\circ+B)}$$

A) –1 B) 1 C) 2
D) 0 E) –2

81. Si $x-y=\frac{13\pi}{2}$, calcule el valor de

$$E=\text{sen}(y-x)+\sec(\tan y)-\sec(\cot x)$$

A) –2 B) –1 C) 0
D) 1 E) 2

82. Calcule P

para $\alpha=120^\circ$, si

$$P=\frac{\text{sen}(180^\circ+\alpha)\cos(\alpha-90^\circ)\tan(1260^\circ+\alpha)}{\cos(270^\circ-\alpha)\text{sen}(\alpha-540^\circ)\tan(450^\circ+\alpha)}$$

A) –3 B) 0 C) 3
D) 5 E) 7

83. Simplifique la siguiente expresión

$$F=\frac{\cos(43\pi+\theta)\cos(\theta-58\pi)+\cos\left(\frac{91\pi}{2}+\theta\right)\cos\left(\frac{57\pi}{2}+\theta\right)}{\cot(\theta-15\pi)\cot\left(\frac{45\pi}{2}-\theta\right)}$$

A) –1/2 B) –1 C) 1/2
D) 1 E) 2

84. Simplifique la siguiente expresión

$$R=\frac{\text{sen}(-21\pi+\theta)\tan(102\pi+\theta)}{\cos\left(\frac{-17\pi}{2}+\theta\right)\cot\left(\theta-\frac{55\pi}{2}\right)}-\frac{\sec(1001\pi-\theta)}{\csc\left(\frac{999\pi}{2}+\theta\right)}$$

A) 3 B) 2 C) 1
D) –2 E) –3

85. Simplifique la siguiente expresión

$$K=\frac{\text{sen}(210^\circ-x)+\cos(300^\circ-x)+\tan(330^\circ+x)}{\csc(x-120^\circ)\cos(240^\circ+x)}$$

A) –1 B) –2 C) –tan$x$
D) –cot$x$ E) –2sen$x$

86. Si $\theta\in\langle\pi;2\pi\rangle$,
además se cumple

$$\tan\left(\frac{341\pi}{2}+\theta\right)=\cot\theta$$

halle el valor de

$$\sec\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)$$

A) $\sqrt{2}$ B) $-\sqrt{2}$ C) 2
D) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ E) –2

87. Reduzca la siguiente expresión

$$M=\frac{\tan(\pi-b)\text{sen}\left(\frac{3\pi}{2}-a\right)}{\cos(3\pi+a)\cot\left(b-\frac{3\pi}{2}\right)}+\frac{\text{sen}\left(c-\frac{\pi}{2}\right)\cot\left(\frac{5\pi}{2}-a\right)}{\cos(\pi+c).\tan(7\pi+a)}$$

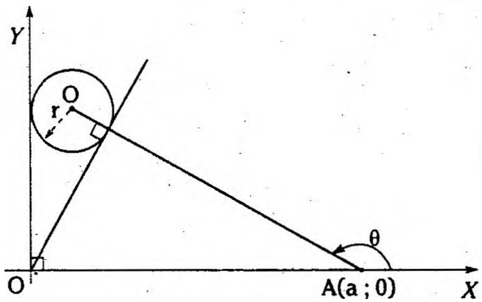
A) 2 B) 1 C) –1
D) 0 E) –2

88. Siendo
$x-y=2n;\ n\in\mathbb{Z}$
reduzca la siguiente expresión

$$M=\text{sen}\pi x-\text{sen}\pi y+\text{sen}\pi(x-y)$$

A) 0 B) 1 C) sen$x$
D) sen$y$ E) 2sen$x$

89. Del gráfico mostrado, halle $\frac{r}{a}$ en términos de θ.

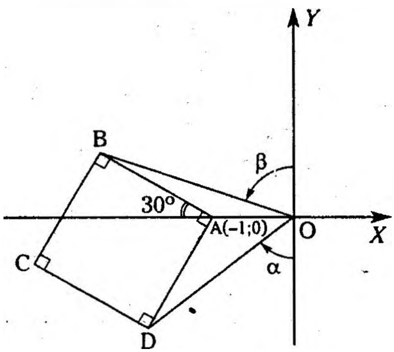


A) $1+\tan\theta$
B) $\operatorname{sen}\theta\cos\theta$
C) $1+\cos\theta$
D) $1-\cos\theta$
E) $1+\operatorname{sen}\theta$

90. Del gráfico, calcule

$$K=\frac{\sqrt{3}\tan\alpha+1}{\sqrt{3}-\tan\beta}$$

siendo ABCD un cuadrado.



A) -1 B) 1
C) 3
D) $\sqrt{3}$ E) -2

91. Simplifique la siguiente expresión

$$M=\frac{\operatorname{sen}(210^\circ-x)+\tan(330^\circ+x)-\cot(300^\circ-x)}{\cos(240^\circ+x)}$$

A) $-\frac{1}{2}$ B) $\sqrt{3}$
C) $\frac{1}{2}$
D) -1 E) 1

92. Reduzca la expresión siguiente

$$M=\frac{\tan 1994^\circ-\cot 824^\circ}{2\cot 76^\circ-\tan(-14^\circ)}$$

A) 1/3 B) 2/5
C) 5/2
D) 2/3 E) 2

93. Siendo A y B ángulos complementarios, halle el equivalente de la expresión

$$R=\frac{\cos(3B+5A)\cot(4B+2A)}{2\cot\left(\frac{A+3B}{2}\right)\cos\left(\frac{B-A}{2}\right)}$$

A) $\cos(A+B)$ B) $2\cos(45^\circ-A)$
C) $-\cos(45^\circ+A)$
D) $\operatorname{sen}(45^\circ+A)$ E) $1/2\operatorname{sen}(45^\circ+B)$

94. Reduzca

$$P=\frac{\tan\left(k\pi-\frac{\pi}{7}\right)}{\cot\left(\frac{33\pi}{14}\right)}+\frac{\operatorname{cov}\left[(20k+3)\frac{\pi}{10}\right]}{\operatorname{vers}\left[(5k-4)\frac{\pi}{5}\right]}$$

donde $n\in\mathbb{Z}$

A) $-\frac{2\sqrt{5}}{5}$ B) 0 C) $\left\{\frac{2\sqrt{5}}{5};0\right\}$

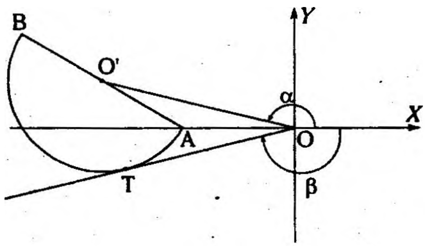
D) $\left\{-\frac{2\sqrt{5}}{5};0\right\}$ E) $\left\{0\ ;\ \frac{\sqrt{5}}{5}\right\}$

95. Si los ángulos internos de un triángulo ABC están en progresión aritmética (A<B<C), reduzca

$$\frac{\text{sen}(A+2C+3B)}{\text{sen}(B-C)}+\frac{\cos(B+2A+3C)}{\cos(B-C)}$$

A) senC B) cosB
C) sen(B – C)
D) 1 E) 0

96. De la figura OA = O'A = O'B. Halle
K = sen(2α – β) + senβ



A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{1}{2}$ C) –1

D) $-\frac{1}{2}$ E) 1

97. Reduzca

$$\text{Log}_2\left[\frac{\text{sen}[(n+1)\pi+x]\cos[(n-1)\pi-x]}{\tan\left[(n+1)\frac{\pi}{2}+x\right]\cot\left[(n-1)\frac{\pi}{2}-x\right]}\right]$$

sabiendo que x es ángulo agudo y además se cumple

$$\text{sen}\,x-\cos\left[\frac{115\pi}{8}\right]=0\ ;\ n\in\mathbb{Z}$$

A) $-\frac{3}{2}$ B) $\frac{3}{2}$ C) $-\frac{3}{2}$ ó $\frac{3}{2}$

D) $\frac{1}{2}$ E) $-\frac{1}{2}$

98. Si

$x-y=m\pi\ ;\ m\in\mathbb{Z}$

$z-w=n\pi\ ;\ n\in\mathbb{Z}$

reduzca $k=\frac{\cos(y+w)-\cos(x+z)}{\cos(y+z)}$

A) $(-1)^m+(-1)^n$ B) $(-1)^m-(-1)^n$
C) $(-1)^n-(-1)^m$
D) $(-1)^{n+m}$ E) 0

99. Halle

$$k=\frac{\text{sen}^3\left(\theta-15\frac{\pi}{2}\right)-\cos^3\left(-\theta-233\frac{\pi}{2}\right)}{\text{sen}(61\pi-\theta)+\text{sen}\left(33\frac{\pi}{2}+\theta\right)}$$

si $\text{sen}\theta=-\frac{1}{2}$; θ ∈ IIIC

A) $\frac{4-\sqrt{3}}{4}$ B) $\frac{4-\sqrt{3}}{5}$ C) $\frac{\sqrt{3}+4}{4}$

D) $\frac{\sqrt{3}}{4}$ E) 1

100. Si $f(x)=a\,\text{vers}x-b\,\text{cov}x+b-a$, halle

$$\frac{f(n\pi-x)}{f\left(n\frac{\pi}{2}-x\right)}\ ;\ n\text{ impar}$$

A) $\tan\left(x+\arctan\frac{a}{b}\right)$

B) $\tan\left(x-\arctan\frac{a}{b}\right)$

C) $\frac{a-b}{a+b}$

D) $\pm\tan\left(x+\arctan\frac{a}{b}\right)$

E) $\frac{a+b}{a-b}$

101. Halle el valor de la siguiente expresión

$$E=\frac{\operatorname{sen}\left(k\pi-\frac{\pi}{6}\right)\tan\left[(2k+1)\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}\right]}{\cos\left(k\pi+\frac{\pi}{6}\right)\cot\left[(2k-1)\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}\right]}$$

donde k=0 ; ± 1 ; ± 2 . . .

A) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ B) $-\sqrt{3}$ C) $\sqrt{3}$
D) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ E) 2

102. Si se cumple

$\cos\alpha+\operatorname{sen}721°<0$

$\operatorname{sen}\alpha-\cos 423°>0$

halle los valores de α , si α∈ <90° ; 180°>

A) <91° ; 153°> B) <92° ; 150°>
C) <91° ; 150°>
D) <93° ; 153°> E) <91° ; 143°>

103. Halle el equivalente de

$$E=\frac{\tan\left(\frac{\pi}{7}\right)+\tan\left(\frac{2\pi}{7}\right)+\tan\left(\frac{3\pi}{7}\right)+\ldots(8\text{ términos})}{\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)+\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)+\cos\left(\frac{3\pi}{5}\right)+\ldots(5\text{ términos})}$$

A) 1 B) $\tan\left(\frac{\pi}{7}\right)$ C) $-\tan\left(\frac{\pi}{7}\right)$
D) –1 E) $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{7}\right)$

104. Si $a+b=k\pi$; $k\in\mathbb{Z}$

calcule el valor de

M=tan(a+m)tan(b+n)–tan(a–n)tan(b–m)

A) 1 B) –1 C) 1/2
D) 0 E) 2

105. Simplifique

$P=4(\operatorname{sen}^4A-\operatorname{sen}^4B+\operatorname{sen}^2B-\operatorname{sen}^2A)+\cos 4B-\cos^2 2A$

A) $\cos^2 2B$ B) $-\operatorname{sen}^2 2B$ C) $-\tan^2 2B$
D) $\sec^2 2A$ E) $\tan^2 2A$

106. Calcule el valor de

$$M=\frac{\tan 1°}{(1-\tan^2 1°)(1-\tan^2 2°)(1-\tan^2 4°)}$$

A) 1/6 B) 1/58 C) 1/57
D) 1/56 E) 56

107. Simplifique $E=\sqrt{(1-\tan^2 3)(\cot^2 3-1)}$

A) 2cot6 B) tan6 C) sec6
D) 3sen12 E) –2cot6

108. Si $0<x<\pi/4$, entonces reduzca la siguiente expresión

$$Y=\frac{\sqrt{1+\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}+\sqrt{1-\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}}{\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{8}+\frac{x}{2}\right)}$$

A) $2\sqrt{2}$ B) $-2\sqrt{2}$ C) 1
D) 3 E) 2

109. Halle la variación de la siguiente expresión:

$$Y=\frac{\operatorname{sen}2x-\tan x}{1-\cos 2x}+\frac{1-\cos 2x}{\operatorname{sen}2x-\tan x}$$

A) $\mathbb{R}$ B) $\langle-\infty\,;2\rangle$
C) $\mathbb{R}-\langle-1\,;1\rangle$
D) $\mathbb{R}-\langle-2\,;2\rangle$ E) $\langle-\infty\,;-1\rangle\cup\langle 2\,;+\infty\rangle$

110. Si $\tan 2\theta=\frac{1}{4}$, calcule

$M=15\sec 4\theta+8\csc 4\theta$

A) 34 B) 26 C) 28
D) 30 E) 32

111. Calcule el valor de

$$Q=\frac{\tan^2 34°+\tan^2 56°-2}{\tan^2 22°}$$

A) 3 B) 4 C) –4
D) –3 E) 1

112. Si $\tan 2x = \dfrac{2n\sqrt{1-n^2}}{1-2n^2}$, halle sen$x$ en términos de n.

A) –n B) n C) 2n
D) $\sqrt{n^2-1}$ E) $\sqrt{1-n^2}$

113. Reduzca

$$H = \frac{\sec^2 x}{\sec 2x} + \frac{\sec^3 x}{\sec 3x} - \frac{8\tan x}{\tan 2x}$$

A) –5 B) –2 C) 3
D) 4 E) 5

114. Si $\sec x - \csc x = a$, halle K en términos de a, si $K = a^2\cos 4x - 8\text{sen}2x$

A) $16-a^2$ B) a^2+16 C) a^2-8
D) $11+a^2$ E) $2a^2+1$

115. Halle los valores de la siguiente expresión

$$P = \cos x.\cot\frac{x}{2} - 2\cos x.\cos^2\frac{x}{2}\cot x$$

A) $[-1\,;\,1/2]$ B) $[-1/2\,;\,0\rangle$
C) $\left\langle -\frac{1}{2}\,;\,1\right\rangle$
D) $\left[-\frac{1}{2}\,;\,\frac{1}{2}\right]$ E) $\langle 0\,;\,1\rangle$

116. Reduzca

$$Q = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{50}}}$$

A) $-\text{sen}\,\pi/100$ B) $\text{sen}\,\pi/400$
C) $\text{sen}\,\pi/100$
D) $-\cos 200/\pi$ E) $\cos \pi/200$

117. Calcule T+A (sin calculadora)
$T=\cot^2 85° + \cot^2 5° + \tan^2 40°$
$A=\tan^2 50° - 4\tan^2 80° - 4\tan^2 10°$

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

118. Dada la relación
$$(1-K)\tan^2\frac{a}{2} = (1+K)\tan^2\frac{b}{2}$$
calcule
$$T = (1+K\cos a)(1-K\cos b)+K^2$$

A) 0 B) 1 C) 2
D) 3 E) 4

119. Halle el máximo valor de

$$A = \text{sen}\left(\frac{\cot\frac{x}{2} - \tan\frac{x}{2}}{\cot\frac{x}{2} + \tan\frac{x}{2}}\right) + \cos(\cos x)$$

A) Amáx = $\sqrt{2}$
B) Amáx = 2
C) Amáx = $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$
D) Amáx = $\sqrt{2}+\sqrt{3}$
E) Amáx = 1

120. Si
$$\cos(2x_1) - \cos(2x_2) = a$$
$$\cos(6x_1) - \cos(6x_2) = b$$
halle
$$R = \cos(4x_1)+\cos(4x_2)+2\cos(2x_1)\cos(2x_2)$$

A) $\dfrac{a+3b}{4}$ B) $\dfrac{b+3a}{4b}$ C) $\dfrac{b-3a}{4a}$
D) $\dfrac{b-a}{2a}$ E) $\dfrac{a+b}{4b}$

121. Si la siguiente igualdad
$$\text{sen}^8 x + \cos^8 x = \frac{A + B\cos 4x + C\cos 8x}{D}$$
es una identidad; calcule el valor de A+B+C+D

A) 64 B) 128 C) 32
D) 100 E) 1

122. Simplifique la siguiente expresión
$$M = 3\tan^2 2\theta.\tan 6\theta + 3\tan 2\theta - \tan^3 2\theta$$

A) $2\tan 3\theta$ B) $\tan 6\theta$ C) $3\tan^2 3\theta$
D) $\tan^2 3\theta$ E) $3\tan 3\theta$

123. Calcule el mínimo valor de

$$Y = \csc^3 x\,\text{sen}3x - \sec^3 x.\cos 3x$$

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

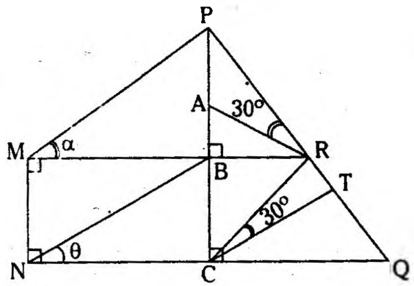
124. Calcule

$$A = \cot 70^\circ(3\cos 20^\circ - 2\text{sen}20^\circ\cos 50^\circ)$$

A) 1 B) $\sqrt[4]{3}$ C) $\sqrt{3}$
D) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ E) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

125. En el gráfico mostrado AB=BC y $\overline{NB}//\overline{CT}$.

Calcule $M=\sqrt{\dfrac{\tan\alpha}{\tan 3\theta}+\dfrac{\cot\alpha}{\cot 3\theta}+2}$



A) 1 B) 2 C) 3
D) $\dfrac{1}{2}$ E) $\dfrac{3}{2}$

126. Si se verifica

$$\cos\alpha = \cos\beta\cos\phi = \cos\gamma\cos\theta \quad .... (1)$$

$$\text{sen}\,\alpha = 2\,\text{sen}\frac{\phi}{2}\text{sen}\frac{\theta}{2} \quad ... (2)$$

determine el valor de

$$\tan^2\frac{\alpha}{2}\cot^2\frac{\beta}{2}\cot^2\frac{\gamma}{2}.$$

A) 1 B) 2 C) 4
D) 16 E) $\dfrac{1}{4}$

127. Reduzca la siguiente expresión

$$y = \frac{\tan x\sec 2x - \csc 2x + \cot 2x}{\tan 2x - \tan x}$$

A) $2\text{sen}^2 x$ B) $2\text{sen}x$ C) $2\cos^2 x$
D) $\tan^2 x$ E) $\tan x\,\text{sen}x$

128. Si $n \in \mathbb{Z}^+$, calcule la suma del máximo y mínimo valor de la expresión siguiente

$$R = \sum_{i=2}^{n}(\text{sen}^{2i} x + \cos^{2i} x)$$

A) $n+n^{-1}$ B) $n-2^{1-n}$ C) $n+12^{-n}$
D) $n-2^{-n}$ E) $n+3-2^{2-n}$

129. Si

$$\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}\,\text{sen}\,x - \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}\,\cos x = \sec\frac{\pi}{3}$$

halle

$k=\cot x - \tan x$

A) $\sqrt{2}+1$ B) $2(\sqrt{2}+1)$ C) $\sqrt{2}-1$
D) $2(\sqrt{2}-1)$ E) $\sqrt{2}+2$

130. Calcule el valor de E

$$E=\frac{\text{vers}2x}{\text{sen}^3 x}+\frac{\text{vers}2^2x}{\text{sen}^3 2x}+\frac{\text{vers}2^3x}{\text{sen}^3 2^2x}+....+\frac{\text{vers}2^n x}{\text{sen}^3 2^{n-1}x}$$

A) $2\left(\cot\dfrac{x}{2}-\cot 2^{n-1}x\right)$

B) $2\left(\tan\dfrac{x}{2}+\tan 2^n x\right)$

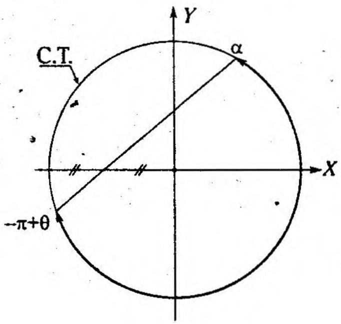
C) $2\left(\cot\dfrac{x}{2}+\cot 2^{n-1}x\right)$

D) $\cot\dfrac{x}{2}+\cot 2^n x$

E) $\dfrac{1}{2}\left(\tan\dfrac{x}{2}+\cot 2^{n-1}x\right)$

131. Calcule $N=\dfrac{\operatorname{sen}\frac{3\alpha}{2}.\cos\frac{\theta}{2}.\operatorname{sen}\theta}{\cos\frac{3\theta}{2}.\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}.\operatorname{sen}\alpha}$

a partir de



A) 1 B) −1 C) 2
D) −2 E) 1/2

132. Dado $\operatorname{sen}4\theta=n$; $n\in\left\langle 0;\frac{1}{2}\right\rangle$, ¿cuál será el producto de valores de $\tan\theta$?

A) −1 B) 1 C) 0
D) $\frac{1}{2}$ E) 2

133. De la ecuación

$$\tan\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=3\tan 3x$$

x_1, x_2, x_3, x_4 representan sus soluciones, entonces el valor de
$\tan 2x_1+\tan 2x_2+\tan 2x_3+\tan 2x_4$ es

A) 2/3 B) 1/3 C) 2
D) $\frac{4}{3}$ E) 4

134. Del sistema de ecuaciones:
$x\operatorname{sen}a+y\operatorname{sen}2a+z\operatorname{sen}3a=\operatorname{sen}4a$
$x\operatorname{sen}b+y\operatorname{sen}2b+z\operatorname{sen}3b=\operatorname{sen}4b$
$x\operatorname{sen}c+y\operatorname{sen}2c+z\operatorname{sen}3c=\operatorname{sen}4c$

Determine z

A) cosa+cosb+cosc
B) sena+senb+senc
C) 2(cosa+cosb+cosc)
D) 2(sena+senb+senc)
E) sen2a+sen2b+sen2c

135. Si $A=1+\tan\theta$; $B=\operatorname{sen}2x+\cos 2x$; $C=\cos^2x$, halle los valores que puede tomar
$\tan^2\theta+2\tan\theta$; si A=B+C.

A) $\left[0;\frac{5+\sqrt{13}}{2}\right]$ B) $\left[-1;\frac{5+\sqrt{13}}{2}\right]$
C) $\left[-1;\frac{5}{2}\right]$
D) $\left[-1;\frac{5}{2}\right\rangle$ E) $\left[-1;\frac{5+\sqrt{13}}{2}\right\rangle$

136. Exprese como producto
I. 1− cos2 − cos4+cos6

A) 4cos3sen2cos1
B) 4sen3cos2cos1
C) − 4cos3sen2cos1
D) − 4cos3sen2sen1
E) − 4cos3cos2cos1

II. sen2−sen4+sen6

A) 4sen4cos3sec1
B) sen4cos3sec1
C) sen4cos3cos1
D) cos4cos3cos1
E) sen4sen3cos1

137. Indique el valor de

$$M=\frac{(\cos x+\cos 5x)(\cos 4x+\cos 6x)}{\sqrt{2}\cos x\cos 2x\cos 5x}$$

Cuando $x=\frac{\pi}{12}$

A) 2 B) 3 C) 4
D) 5 E) 6

138. Siendo

$\cos 4x = -p$

exprese en términos de p lo siguiente:

$$N = \frac{\text{sen}3x - \text{sen}5x - 2\text{sen}x}{4\,\text{sen}\,x}$$

A) $\frac{1+p}{2}$ B) $\frac{1-p}{2}$
C) $\frac{p-1}{2}$
D) $\frac{-(1+p)}{2}$ E) $\frac{1+p}{4}$

139. Exprese como un monomio

$K = \sqrt{3}\csc 20° - 2$

A) cos40° B) 4sen40°
C) 4sen70°
D) 3cos40° E) 4cos40°

140. En la siguiente igualdad

$$4(\cos 2x + \cos 6x)(\cos 6x + \cos 8x) = 1 + \frac{\text{sen}(Ax)}{\text{sen}x}$$

¿cuál es el valor de A para que sea una identidad?

A) 13 B) 14 C) 15
D) 16 E) 17

141. Halle los valores de

$$f = \frac{\text{sen}5x + \text{sen}3x}{2\text{sen}x\cos x(\cos^2 x - \text{sen}^2 x)} \quad \forall x \in \left\langle \frac{\pi}{2} ; \pi \right\rangle$$

A) $\langle -4 ; 0\rangle - \{-2\sqrt{2}\}$
B) $\langle -4 ; 0\rangle - \left\{-\frac{2}{3}\sqrt{2}\right\}$
C) $\langle -2\sqrt{2} ; 0\rangle$
D) $\langle -4 ; -2\sqrt{2}\rangle$
E) $-4 ; 0\rangle - \{\sqrt{2}\}$

142. Transforme a producto $E = \cos^2 3° - \text{sen}^2 2°$

A) cos5°cos2° B) cos5°cos3°
C) cos5°cos1°
D) sen5°cos1° E) sen5°sen1°

143. Si $\frac{\cos 5x}{\cos 3x} = p$, obtenga el valor de $\frac{\cot 4x}{\tan x}$ en términos de p.

A) $\frac{1+p}{1-p}$ B) $\frac{1-p}{1+p}$ C) $\frac{1-2p}{1+p}$
D) $\frac{1-p}{1+2p}$ E) $\frac{1-2p}{1+2p}$

144. En la siguiente igualdad
sen(cot5)+sen(tan5) = 2senAcosB,
determine el valor de A/B.

A) csc10 B) csc80
C) sec20
D) sec20+1 E) sec10

145. Simplifique la siguiente expresión

$$M = \frac{\cos 3A + \text{sen}5A\,\text{sen}x - \cos 7A}{-\text{sen}3A + \cos 5A\,\text{sen}x - \text{sen}7A}$$

A) tan5A B) cot5A C) tan3A
D) cot3A E) sen5A

146. Determine el valor de
$E = 1 + 2\text{sen}16° + 4\cos 23°\text{sen}7°$

A) 2 B) 3 C) 4
D) 4 E) $\frac{6}{5}$

147. Halle el mínimo valor de

$$A = \text{sen}\frac{3\theta}{4}\text{sen}\frac{\theta}{4} + \cos^2\frac{\theta}{2} \;;\; \forall \theta \in \mathbb{R}$$

A) −2 B) −1 C) 0
D) 1 E) 2

148. Sabiendo que $\tan 4\theta = K\tan 3\theta$; $(K \neq 1)$
calcule en términos de K la expresión:
$M = \cos 2\theta + \cos 4\theta + \cos 6\theta$

A) $\frac{1}{K-1}$ B) $\frac{1}{K+1}$ C) $\frac{4}{K+1}$
D) $\frac{2}{K+1}$ E) $\frac{2}{K-1}$

149. Calcule la suma del máximo y mínimo valor de la siguiente expresión:

$$W = \text{sen}\left(2x - \frac{\pi}{9}\right)\text{sen}\left(\frac{2\pi}{9} + 2x\right)$$

A) 0 B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{3}{4}$

D) $\frac{1}{4}$ E) $\frac{2}{3}$

150. Determine el intervalo de M definido como

$$M = \cos 2x\cos x - \frac{1}{2}\cos x$$

para todo $x \in \left\langle \frac{\pi}{3} ; \frac{2\pi}{3} \right]$

A) $\left\langle -\frac{1}{4} ; \frac{1}{2} \right\rangle$ B) $\left[-\frac{1}{4} ; \frac{1}{2} \right\rangle$

C) $\left\langle -\frac{1}{4} ; -\frac{1}{12} \right]$

D) $\left\langle -\frac{1}{2} ; \frac{1}{2} \right]$ E) $\left\langle -\frac{1}{4} ; 0 \right\rangle$

151. Si en un triángulo ABC se cumple

$$\tan B = \frac{\cos(B - C)}{\text{sen}\,A + \text{sen}(C - B)}$$

¿Cuál es la medida del ángulo A?

A) 45° B) 60° C) 75°

D) 90° E) 105°

152. Halle el valor de la siguiente expresión

$$R = \frac{3\text{sen}\frac{\pi}{9} - 2\cos\frac{\pi}{9}\text{sen}\frac{2\pi}{9}}{\tan\frac{\pi}{9}}$$

A) $\frac{1}{4}$ B) $\frac{1}{2}$ C) $-\frac{1}{4}$

D) $-\frac{1}{2}$ E) $\frac{3}{8}$

153. En qué tipo de triángulo ABC se cumple

$$2\tan\left(\frac{A}{2}\right) = \frac{\text{sen}A}{\text{sen}B\text{sen}C}$$

A) Rectángulo isósceles
B) Rectángulo
C) Isósceles
D) Acutángulo
E) Obtusángulo

154. Si $A+B+C = \pi$, simplifique

$$L = \frac{\text{sen}A\sec A/2 + (\text{sen}B + \text{sen}C)\tan(A/2)}{\text{sen}B - \text{sen}C}$$

A) $\cot\left(\frac{B-C}{2}\right)$ B) $\cot\left(\frac{B-C}{3}\right)$

C) $\cot\left(\frac{B-C}{4}\right)$

D) $\cot\left(\frac{B+C}{4}\right)$ E) $\cot\left(\frac{B+C}{2}\right)$

155. Dado $x+y+z=\pi$, además

$4\text{sen}^2 x = \cos y + \cos z$

entonces el valor de $\tan\frac{y}{2}\ \tan\frac{z}{2}$

A) $\frac{3+4\cos x}{5+4\cos x}$ B) $\frac{3-4\cos x}{5+4\cos x}$

C) $\frac{4+3\cos x}{4+5\cos x}$

D) $\frac{4-3\cos x}{5+4\cos x}$ E) $\frac{4-3\cos x}{4-5\cos x}$

156. Determine el mínimo valor de

$$R = \text{sen}^2\frac{A}{2} + \text{sen}^2\frac{B}{2} + \text{sen}^2\frac{C}{2}$$

Si A,B y C son las medidas de los ángulos internos de un triángulo ABC.

A) $\frac{3}{8}$ B) $\frac{1}{8}$

C) $\frac{4}{3}$

D) $\frac{3}{4}$ E) $\frac{5}{4}$

157. En un triángulo ABC, halle la expresión L en términos de B:

$$L=\left\{\frac{\cos A+\cos B+\cos C-1}{\cos\left(\frac{A-C}{2}\right)-\operatorname{sen}\frac{B}{2}}\right\}\left(2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{C}{2}\right)$$

A) $-2\operatorname{sen}\frac{B}{2}$ B) $4\operatorname{sen}\frac{B}{2}$

C) $4\cos\frac{B}{2}$

D) $2\operatorname{sen}\frac{B}{2}$ E) $\operatorname{sen}\frac{B}{2}$

158. Si en un triángulo ABC se cumple

sen2A+sen2B+sen2C<4cosAcosBsenC ...(I)

sen2A+sen2B+ $\sqrt{3}$ cos(2B+C) = 0 ...(II)

entonces la medida del ángulo C es

A) 60° B) 90°

C) 120°

D) 150° E) 160°

159. Si $x-y+z=360°$ exprese en producto la siguiente expresión

$$\operatorname{sen}2x-\operatorname{sen}2y+\operatorname{sen}2z$$

A) $2\operatorname{sen}x\operatorname{sen}y\operatorname{sen}z$

B) $-2\operatorname{sen}x\operatorname{sen}y\operatorname{sen}z$

C) $-4\operatorname{sen}x\operatorname{sen}y\operatorname{sen}z$

D) $4\operatorname{sen}x\operatorname{sen}y\operatorname{sen}z$

E) $\operatorname{sen}x\operatorname{sen}y\operatorname{sen}z$

160. Simplifique:

$$W=\operatorname{sen}\frac{\pi}{13}+2\operatorname{sen}\frac{2\pi}{13}+3\operatorname{sen}\frac{3\pi}{13}+\ldots+12\operatorname{sen}\frac{12\pi}{13}$$

A) 13cot(π/26) B) 13/2

C) 13tan(π/26)

D) $\frac{13}{4}\tan(\pi/26)$ E) $\frac{13}{2}\cot(\pi/26)$

161. Halle la ecuación cuyas raíces sean:

$\operatorname{sen}^2\frac{\pi}{7}$, $\operatorname{sen}^2\frac{2\pi}{7}$, $\operatorname{sen}^2\frac{3\pi}{7}$

A) $64x^3-112x^2-56x-7=0$

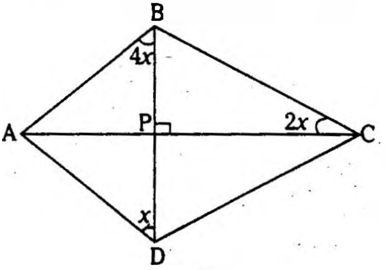
B) $64x^3+112x^2-56x-7=0$

C) $64x^3-112x^2+56x-7=0$

D) $64x^3-112x^2+56x+7=0$

E) $64x^3-112x^2+56x-17=0$

162. Halle PD en el gráfico adjunto, si PC = 4



A) 4tanxtan2xtan4x

B) 4tanxcot2xtan4x

C) 4tan2xtan4xcotx

D) 4tan2xcot4xcotx

E) 4cot2xcot4xcotx

163. Si A,B,C y D son ángulos de un cuadrilátero, simplifique y exprese en producto lo siguiente:

$$\frac{\tan A+\tan B+\tan C+\tan D}{\cot A+\cot B+\cot C+\cot D}$$

A) cotAcotBcotCcotD

B) tanAtanBtanCtanD

C) tanAtanBcotCcotD

D) cotAcotBtanCtanD

E) 2cotAcotBcotCcotD

164. Reduzca la sumatoria

T = sen$x$ − sen$2x$ + sen$3x$ − sen$4x$ + ... + sennx; (n: impar)

A) $2\operatorname{sen}\frac{x}{2}\ \csc x\cos\frac{nx}{2}\operatorname{sen}(n+1)\frac{x}{2}$

B) $2\cos\frac{x}{2}\ \csc x\cos\frac{nx}{2}\operatorname{sen}(n+1)\frac{x}{2}$

C) $2\tan\frac{x}{2}\ \csc x\cos\frac{nx}{2}\operatorname{sen}(n+1)\frac{x}{2}$

D) $2\operatorname{sen}\frac{x}{2}\ \csc x\operatorname{sen}\frac{nx}{2}\operatorname{sen}(n+1)\frac{x}{2}$

E) $2\operatorname{sen}\frac{x}{2}\ \sec x\operatorname{sen}\frac{nx}{2}\operatorname{sen}(n+1)\frac{x}{2}$

165. Halle la suma de diagonales trazadas desde un mismo vértice de un polígono regular de n lados, inscritos en una circunferencia de radio r.

A) $2r\,\text{sen}\left[(n-3)\frac{\pi}{2n}\right]\csc\frac{\pi}{2n}$

B) $r\,\text{sen}\left[(n-2)\frac{\pi}{2n}\right]\csc\frac{\pi}{2n}$

C) $2r\,\text{sen}\left[(n-3)\frac{\pi}{2n}\right]\sec\frac{\pi}{2n}$

D) $r\cos\left[(n-3)\frac{\pi}{2n}\right]\csc\frac{\pi}{2n}$

E) $2r\,\text{sen}\left[(n-4)\frac{\pi}{2n}\right]\csc\frac{\pi}{2n}$

166. Transforme a producto la siguiente expresión

$$\text{sen}A+\text{sen}B+\text{sen}C+\text{sen}D$$

siendo A,B,C y D ángulos de un cuadrilátero inscriptible; además A y B son ángulos opuestos.

A) $4\,\text{sen}\left(\frac{A+B}{2}\right)\text{sen}\left(\frac{B+D}{2}\right)\text{sen}\left(\frac{B+C}{2}\right)$

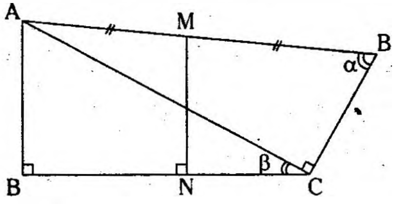
B) $4\,\text{sen}\left(\frac{A-B}{2}\right)\text{sen}\left(\frac{B-D}{2}\right)\text{sen}\left(\frac{B-C}{2}\right)$

C) $4\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)\cos\left(\frac{B+D}{2}\right)\cos\left(\frac{B+C}{2}\right)$

D) $4\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)\cos\left(\frac{B-D}{2}\right)\cos\left(\frac{B-C}{2}\right)$

E) $4\,\text{sen}\left(\frac{A+B}{2}\right)\cos\left(\frac{B+D}{2}\right)\text{sen}\left(\frac{B+C}{2}\right)$

167. En el siguiente gráfico, MN = 1/2 y AB = 3



Halle el valor de la expresión

$$\frac{\cos\beta+2\sqrt{2}\,\text{sen}\beta}{\cos(\alpha-2\beta)}$$

A) 1 B) $\frac{1}{2}$ C) 2

D) $\frac{1}{3}$ E) 3

168. La siguiente sumatoria

$S=|\text{sen}x|+\text{sen}x+|\cos 2x|+\cos 2x+|\text{sen}3x|+$

$\text{sen}3x+\ ...\ +\text{sen}37x+\cos 38x+|\cos 38x|$

equivale a $m\csc\frac{\pi}{38}-n$

cuando $x=\pi/38$.

Calcule m+n.

A) 0 B) 1 C) 2

D) 4 E) 3

169. Halle los valores de R en el recorrido $\left[0;\ \frac{2\pi}{9}\right]$ siendo R la expresión siguiente

$R=\tan x+\tan 2x+\cot x\tan 2x\tan 3x$

A) $\langle-\infty;-\sqrt{3}]\cup[1;+\infty\rangle$

B) $\langle-\infty;-3\sqrt{3}]\cup\langle 0;+\infty\rangle$

C) $\langle-\infty;-2\rangle\cup\langle 1;+\infty\rangle$

D) $\langle-\infty;-1]\cup[3\sqrt{3};+\infty\rangle$

E) $\langle-\infty;0]\cup[3\sqrt{3};+\infty\rangle$

170. Determine el intervalo de valores de M siendo

$$M=\left(\frac{3-\tan x}{3-\tan^2 x}\right)\cot x\tan 3x\ ,\ \text{para } \tan x>0$$

A) $\langle-\infty;-3/2]\cup[\sqrt{13}/6;+\infty\rangle$

B) $\mathbb{R}-\langle-3/2;3/2\rangle$

C) $\langle-\infty;3/2-\sqrt{13}/6]\cup[\sqrt{13}/6+3/2;+\infty\rangle$

D) $\mathbb{R}-\{\pm\sqrt{3}/2\}$

E) $\left\langle-\infty;\frac{9-\sqrt{78}}{6}\right\rangle\cup\left[\frac{9+\sqrt{78}}{6};+\infty\right\rangle-\left\{\frac{\sqrt{3}-3}{8}\right\}$

Colección **Trigonometría**

1	E	18	D	35	B	52	B	69	B
2	D	19	C	36	D	53	C	70	B
3	A	20	B	37	B	54	C	71	B
4	D	21	E	38	D	55	D	72	D
5	C	22	B	39	C	56	B	73	C
6	E	23	B	40	D	57	B	74	*
7	B	24	E	41	D	58	D	75	*
8	C	25	B	42	A	59	E	76	*
9	A	26	C	43	C	60	C	77	*
10	C	27	A	44	E	61	B	78	*
11	B	28	D	45	D	62	A	79	A
12	C	29	D	46	C	63	C	80	A
13	E	30	B	47	C	64	E	81	B
14	E	31	E	48	E	65	B	82	C
15	D	32	C	49	B	66	B	83	B
16	C	33	A	50	A	67	E	84	D
17	A	34	D	51	B	68	C	85	A

* ***Demostración***

Claves

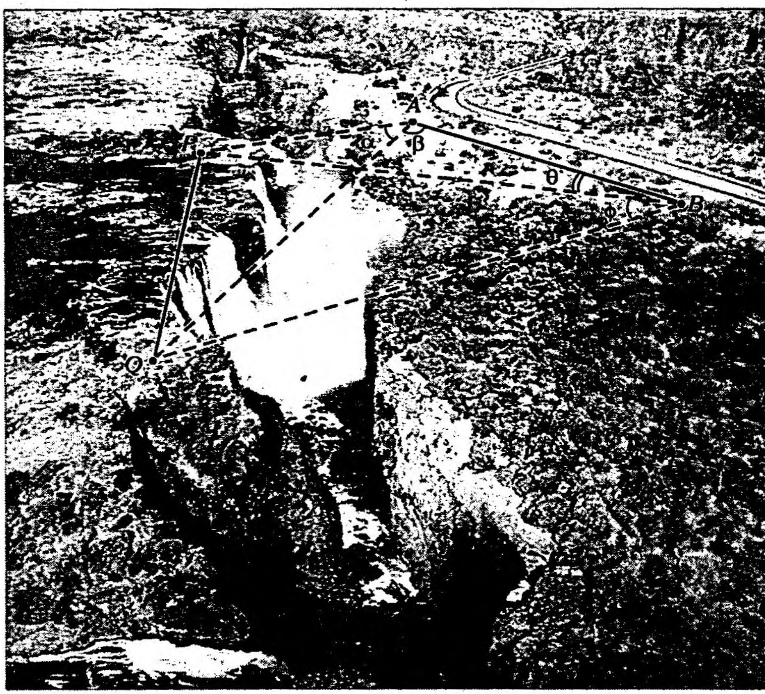
86	B	103	C	120	D	137	A	154	C
87	A	104	D	121	B	138	C	155	A
88	A	105	B	122	B	139	E	156	D
89	C	106	D	123	D	140	C	157	D
90	B	107	E	124	D	141	A	158	C
91	E	108	E	125	B	142	C	159	D
92	D	109	D	126	A	143	A	160	E
93	D	110	A	127	A	144	E	161	C
94	D	111	B	128	B	145	A	162	C
95	E	112	B	129	B	146	A	163	B
96	E	113	B	130	A	147	C	164	D
97	A	114	C	131	A	148	A	165	A
98	C	115	D	132	B	149	B	166	A
99	A	116	E	133	D	150	D	167	E
100	D	117	D	134	C	151	D	168	D
101	C	118	B	135	B	152	D	169	B
102	A	119	A	136	D-B	153	C	170	E

Claves

CAPÍTULO

VI

Relaciones fundamentales en el triángulo oblicuángulo



Distancia entre puntos inaccesibles

En topografía es usual determinar distancias en forma indirecta, así dados los puntos A y B, desde los cuales sean visibles tanto P como Q, si conocemos la distancia AB los ángulos α, β, θ y ϕ; mediante la aplicación de ley de senos y cosenos, se determina la distancia PQ.

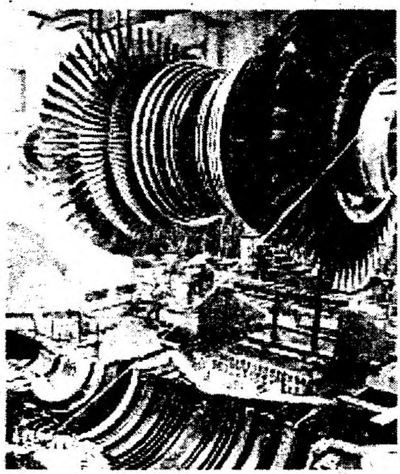
TRIGONOMETRÍA

TURBINA DE VAPOR

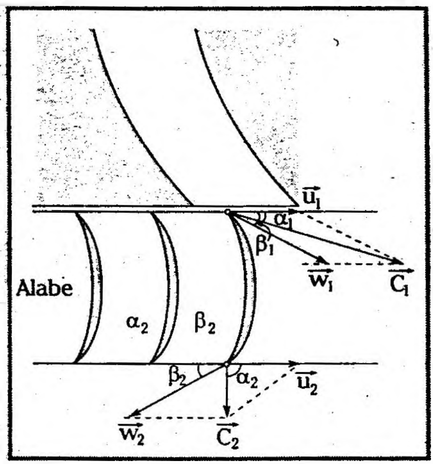
Describamos una turbina de vapor cuya función es transformar la energía del tipo térmico en energía mecánica.
La energía térmica se origina por el cambio de estado del vapor al entrar y salir de la turbina.

Una turbina de vapor de acción consta de las siguientes partes:

- Un distribuidor fijo compuesto por una o varias toberas.
- Una corona móvil compuesta por alabes



Ahora ilustraremos los cambios de velocidades que el vapor experimenta en la corona móvil.



El vapor sale de la tobera y penetra entre los alabes de la corona móvil con una velocidad C_1.

La velocidad tangencial o periférica es u_1 y por lo tanto la velocidad relativa del vapor a la entrada es W_1, que es la que observaría un espectador que se moviese arrastrado por los alabes de la turbina.

La velocidad relativa del vapor a la entrada se calcula de la siguiente manera:

$$W_1 = \sqrt{u_1^2 + C_1^2 - 2u_1C_1\cos\alpha_1} = \frac{C_1\operatorname{sen}\alpha_1}{\operatorname{sen}\beta_1}$$

Donde

- u_1; u_2 : velocidad axial
- C_1; C_2: velocidad absoluta del vapor
- W_1; W_2: velocidad relativa del vapor

Relaciones fundamentales en el triángulo oblicuángulo

OBJETIVOS

- Comprender otras alternativas de resolución de triángulos, usando leyes trigonométricas.
- Conocer las técnicas y relaciones para cálculos de elementos auxiliares, distancia entre puntos notables y área en el triángulo oblicuángulo.

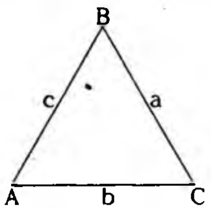
INTRODUCCIÓN

En el presente capítulo se aplicará el teorema de los senos para resolver triángulos oblicuángulos de los que se conocen las medidas de dos ángulos y un lado, o las medidas de dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos. Luego emplearemos la ley de los cosenos para resolver triángulos oblicuángulos en otras circunstancias. De la misma forma estudiaremos la ley de proyecciones y la ley de tangentes, así como sus diversas aplicaciones en los diversos campos de la ingeniería.

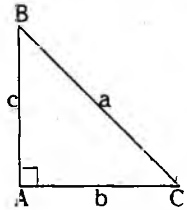
En el desarrollo del capítulo se presentan las leyes fundamentales para resolver cualquier triángulo. Se recomienda al lector que antes de aplicar dichas leyes debe dibujar el triángulo donde ilustre los datos y la incógnita para analizar cuál de las leyes se debe aplicar.

Posteriormente, desarrollaremos en forma analítica el cálculo de los otros elementos de un triángulo, como la bisectriz, mediana, alturas, inradios, exradios, área, etc. Finalmente explicaremos fórmulas para el cálculo del área de una región cuadrangular.

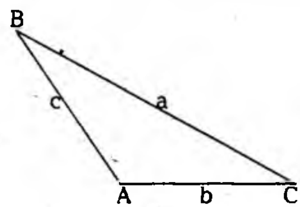
Los elementos fundamentales de un triángulo se denotan convencionalmente con **A**, **B** y **C** a los ángulos; **a**, **b** y c a las longitudes de los lados. Los triángulos oblicuángulos u oblicuos pueden tener o no un ángulo obtuso; es decir un triángulo oblicuángulo puede ser acutángulo u obtusángulo (véase figura 6.1).



Triángulo Acutángulo
A, B, C, <90°
(*a*)



Triángulo Rectángulo
A=90°
(*b*)



Triángulo Obtusángulo
A>90°
(*c*)

Figura 6.1

¿Qué significa resolver un triángulo?

Significa calcular las longitudes de sus lados y la medida de sus ángulos. Para esto necesitamos conocer por lo menos la longitud de un lado junto con otras dos cantidades ya sean dos ángulos o los otros dos lados o bien un ángulo y un lado. Así, hay cuatro posibilidades por considerar.

CASO I : Se conoce un lado y dos ángulos.
CASO II : Se conoce dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos.
CASO III : Se conoce dos lados y el ángulo entre ellos.
CASO IV : Se conoce tres lados.

TEOREMAS TRIGONOMÉTRICOS

La ley de senos se usa para resolver los triángulos de los casos I y II.
La ley de cosenos se usa para resolver los triángulos de los casos III y IV.

Teorema de los senos (ley de senos)

En todo triángulo, los lados son proporcionales a los senos de los ángulos opuestos.

$$\frac{a}{\text{sen}A}=\frac{b}{\text{sen}B}=\frac{c}{\text{sen}C}$$

Demostración

Consideraremos un triángulo acutángulo (figura 6.2(a)) y obtusángulo (figura 6.2(b)) por ser la primera demostración, y veremos que las conclusiones son las mismas.

De la figura 6.2(a) y 6.2(b) en el triángulo rectángulo CDO, se tiene

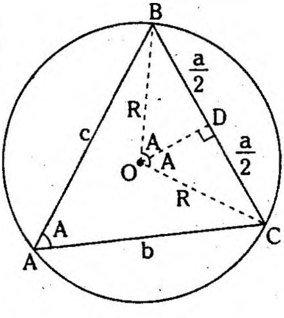
$$\text{sen}A=\frac{\frac{a}{2}}{R} \qquad \text{entonces} \quad 2R=\frac{a}{\text{sen}A}$$

bajo procedimientos similares, obtendremos los siguientes resultados

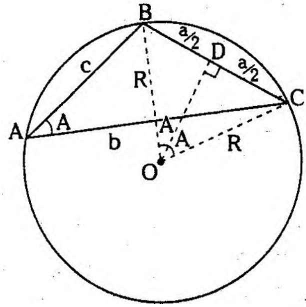
$$2R=\frac{b}{\text{sen}B} \quad \text{y} \quad 2R=\frac{c}{\text{sen}C}$$

Por lo tanto

$$\boxed{\frac{a}{\text{sen}A}=\frac{b}{\text{sen}B}=\frac{c}{\text{sen}C}=2R}$$



(a)



(b)

Figura 6.2

Por lo cual queda demostrado dicho teorema.
Queda para el lector verificar que dicho teorema también es válido para un triángulo rectángulo.

Observación

Cada lado se puede expresar como el diámetro de la circunferencia circunscrita al triángulo, multiplicado por el seno del ángulo que se opone a dicho lado, así tenemos

$a = 2R\text{sen}A \quad b = 2R\text{sen}B \quad c = 2R\text{sen}C$

Se conoce un Lado y dos Ángulos

Ejemplo 1

Resuelva el triángulo ABC, si $m\measuredangle A = 120^\circ$, $m\measuredangle C = 45^\circ$ y $a = 4$

Resolución

La figura 6.3 muestra el triángulo que queremos resolver.
La $m\measuredangle B$ la calculamos así
$m\measuredangle B = 180^\circ - (120^\circ + 45^\circ)$
$m\measuredangle B = 15^\circ$

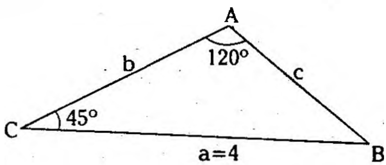


Figura 6.3

Utilizamos la ley de senos para el cálculo de los lados b y c

$$\frac{b}{\text{sen}B} = \frac{4}{\text{sen}120^\circ} \Rightarrow b = \frac{4\text{sen}B}{\text{sen}120^\circ}$$

$$\Rightarrow b = \frac{4\text{sen}15^\circ}{\text{sen}60^\circ}$$

$$\Rightarrow b = \frac{\frac{4(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{4}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$\therefore b = \frac{6\sqrt{2}-2\sqrt{6}}{3}$$

$$\frac{c}{\text{sen}45^\circ} = \frac{4}{\text{sen}120^\circ} \Rightarrow c = \frac{4\text{sen}45^\circ}{\text{sen}120^\circ}$$

$$\Rightarrow c = \frac{4 \times \frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$\Rightarrow c = \frac{4\sqrt{6}}{3}$$

Ejemplo 2

En el gráfico adjunto, calcule la distancia desde un punto B de la orilla de un río, a un árbol A que queda en la otra orilla. Dado en la orilla una base BC y desde cada extremo de la base se dirige, con el teodolito, una visual a la base del árbol y otra al otro extremo de dicha base. Datos: BC=30m, $m\measuredangle ABC = 60^\circ$ y $m\measuredangle BCA = 45^\circ$

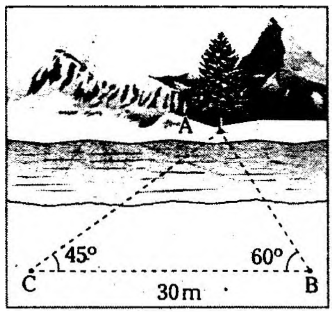


Figura 6.4

Resolución

En la figura 6.4 ya se indican los datos, luego por la ley de senos

$$\frac{AB}{\text{sen}45^\circ} = \frac{BC}{\text{sen}75^\circ}$$

despejando la incógnita

$$AB = \frac{BC \times \text{sen}45^\circ}{\text{sen}75^\circ}$$

sustituyendo valores

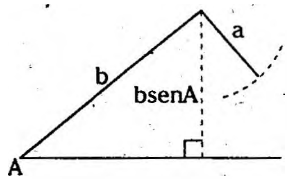
$$AB = \frac{30 \times \frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}} = \frac{60}{\sqrt{3}+1}$$

$$\therefore \quad AB = \frac{60}{\sqrt{3}+1} \times \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}-1} = 30(\sqrt{3}-1)\text{m}$$

El caso ambiguo

El caso II (LLA) que se aplica a triángulos donde dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos se conocen, se llama **caso ambiguo** porque la información disponible puede dar lugar a un triángulo, a dos triángulos o a ningún triángulo. Supongamos que nos dan los lados a y b y m∢A; con esto mostraremos, en las siguientes figuras, las cuatro posibilidades que hay.

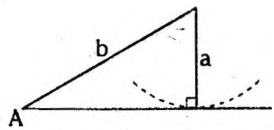
1[ra] Posibilidad



Ninguna solución,
si $a < b\operatorname{sen}A$

(a)

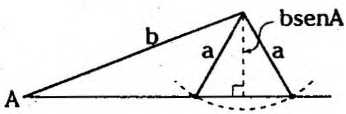
2[da] posibilidad



Una solución, se ha formado un triángulo rectángulo de hipotenusa b ya que $a = b\operatorname{sen}A$

(b)

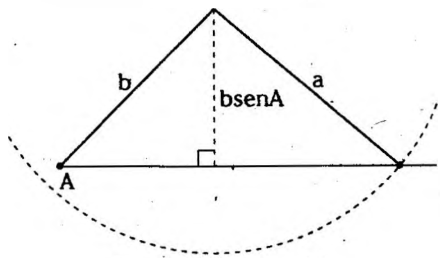
3[ra] Posibilidad



Dos soluciones,
si $a > b\operatorname{sen}A \wedge a < b$

(c)

4[ta] Posibilidad



Una solución, si $a \geq b$

(d)

Figura 6.5

Se conocen dos Lados y el Ángulo Opuesto a uno de ellos

Ejemplo 3

Tenemos un triángulo ABC en el cual se da $a=2$, $b=4$ y $m∢A = 60°$.
Resuelva el triángulo.

Resolución

Aquí se presenta la primera posibilidad del caso ambiguo.

De la ley de senos

$$\frac{a}{\operatorname{sen}A} = \frac{b}{\operatorname{sen}B}$$

Despejando senB y evaluando

$$\operatorname{sen}B = \frac{b\operatorname{sen}A}{a} = \frac{4\operatorname{sen}60°}{2} = \frac{4 \times \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \sqrt{3} \approx 1,73$$

Como ningún ángulo tiene el seno mayor que uno, en este ejemplo no hay solución. Es decir, es imposible construir un triángulo con los datos de este ejemplo (Véase figura 6.6).

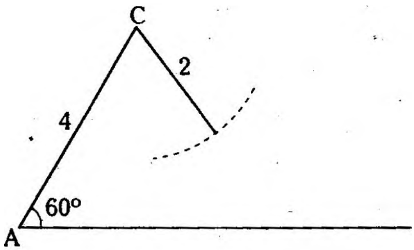


Figura 6.6

Ejemplo 4

Resuelva el triángulo ABC, si a=4, b=6 y $m\sphericalangle A = 30^{\circ}$.

Resolución

Aquí se presenta la 3[ra] Posibilidad (2 Soluciones)

1ra solución

De la ley de senos

$$\frac{a}{\operatorname{sen}A}=\frac{b}{\operatorname{sen}B}\Rightarrow \operatorname{sen}B=\frac{b\operatorname{sen}A}{a}=\frac{6\operatorname{sen}30^{\circ}}{4}$$

$$=\frac{6\times\frac{1}{2}}{4}=\frac{3}{4}$$

En un triángulo, un ángulo interior puede ser agudo, recto u obtuso.

Si es agudo u obtuso el seno es positivo y menor a uno; si es recto el seno es igual a uno.

Como

$\operatorname{sen}B=\frac{3}{4}=0{,}75\Rightarrow B=48^{\circ}30'$ o $B=131^{\circ}30'$

(usando calculadora)

Por lo tanto, se pueden construir dos triángulos con los datos del ejemplo 4 (Véase la figura 6.7).

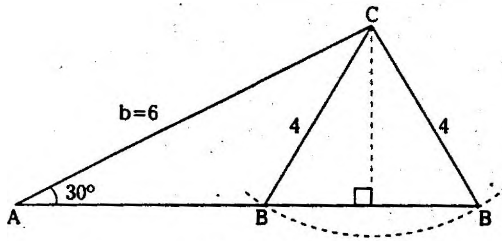


Figura 6.7

Así la resolución puede ser

Si $B=48^{\circ}30'$

$$\Rightarrow C=180^{\circ}-(30^{\circ}+48^{\circ}30')$$

$\therefore\ C=101^{\circ}30'$

De la ley de senos

$$c=\frac{a\operatorname{sen}C}{\operatorname{sen}30^{\circ}}$$

$$c=\frac{4\operatorname{sen}101^{\circ}30'}{0{,}5}=\frac{4\times0{,}9799}{0{,}5}$$

$\therefore\ c=7{,}84$

2da. Solución

Si $B=131^{\circ}30'$

$$\Rightarrow C=180^{\circ}-(30^{\circ}+131^{\circ}30')$$

$\therefore\ C=28^{\circ}30'$

De la ley de senos

$$c=\frac{a\operatorname{sen}C}{\operatorname{sen}30^{\circ}}$$

$$c=\frac{4\times\operatorname{sen}28^{\circ}30'}{0{,}5}=\frac{4\times0{,}4772}{0{,}5}$$

$\therefore\ c=3{,}82$

Teorema de los cosenos (ley de cosenos)

En todo triángulo, el cuadrado de un lado es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos, menos el doble producto de estos lados por el coseno del ángulo que forman

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$$
$$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$$
$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$$

Demostración

En la figura 6.8 se ha trazado la altura AD sobre la prolongación de CB.

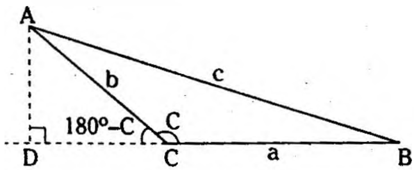


Figura 6.8

En el triángulo rectángulo ADC, por resolución de triángulos rectángulos tenemos

$$AD=b\,\mathrm{sen}(180°-C) \text{ y}$$
$$DC=b\cos(180°-C)$$
$$\Rightarrow AD=b\,\mathrm{sen}C \text{ y}$$
$$DC=-b\cos C$$

Por el teorema de Pitágoras aplicado al triángulo rectángulo ADB tenemos:

$$AB^2=AD^2+DB^2 \Rightarrow c^2=(b\,\mathrm{sen}C)^2+(-b\cos C+a)^2$$

$$\Rightarrow c^2=b^2\mathrm{sen}^2C+(a-b\cos C)^2$$

$$\Rightarrow c^2=b^2\mathrm{sen}^2C+a^2-2ab\cos C+b^2\cos^2C$$

$$\Rightarrow c^2=b^2\underbrace{(\mathrm{sen}^2C+\cos^2C)}_{1}+a^2-2ab\cos C$$

$$\therefore c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$$

Del mismo modo se demuestra los otros dos teoremas

Consecuencia: El coseno de un ángulo se puede expresar en función de los lados, así:

$$\boxed{\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}}\ ,\quad \boxed{\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}}\ ,$$

$$\boxed{\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}}$$

Uso de la Ley de Cosenos para resolver un Triángulo LAL

Ejemplo 5

En el triángulo ABC, $a=24$, $c=32$ y $m\measuredangle B=120°$ Resuelva el triángulo.

Resolución

Vea la figura 6.9, la ley de cosenos permite encontrar fácilmente el lado b.

$$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$$

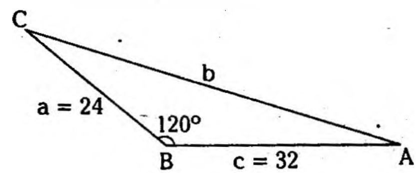


Figura 6.9

Sustituyendo valores:

$$b^2=24^2+32^2-2\times24\times32\times\underbrace{\cos120°}_{-1/2}$$

$$b^2=2368$$

$$\therefore b=48{,}67$$

Para calcular la medida del ángulo A, utilizamos la ley de senos así

$$\frac{b}{\mathrm{sen}120°}=\frac{a}{\mathrm{sen}A}\Rightarrow \mathrm{sen}A=\frac{a\,\mathrm{sen}120°}{b}=\frac{24\times\frac{\sqrt{3}}{2}}{48{,}67}$$

$$\Rightarrow \mathrm{sen}A=0{,}4270....$$

Como el ángulo A es agudo ya que B es obtuso, entonces con el uso de calculadora tenemos

$$A=25°15'$$

Hallando la m ∢C

$C = 180° - (A+B) = 180° - (25°15' + 120°)$;

entonces: $C = 34°45'$

Uso de la Ley de Cosenos para resolver un Triángulo

Ejemplo 6

Un jardín triangular tiene lados que miden 12 m, 15 m y 10 m. Obtenga los ángulos del jardín.

Resolución

Con los datos del ejemplo se tiene la figura 6.10 que representa al jardín donde α, β y θ son los ángulos correspondientes al jardín.

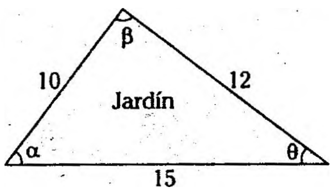


Figura 6.10

De la ley de cosenos

- $12^2 = 10^2 + 15^2 - 2(10)(15)\cos\alpha$

$$\Rightarrow \cos\alpha = \frac{10^2 + 15^2 - 12^2}{2\times10\times15} = \frac{181}{300} \approx 0,6033$$

- $15^2 = 10^2 + 12^2 - 2\times10\times12\times\cos\beta$

$$\Rightarrow \cos\beta = \frac{10^2 + 12^2 - 15^2}{2\times10\times12} = \frac{19}{240} \approx 0,0792$$

Observación

Con respecto a los ángulos interiores de un triángulo, si el coseno de uno de ellos es positivo y menor a uno este será agudo; y si el coseno es negativo y mayor a −1 este será obtuso y finalmente si el coseno es igual a cero este será recto.

Como $\cos\alpha \approx 0,6033$ y $\cos\beta \approx 0,0792$

$\alpha \approx 52,89°$ $\beta \approx 85,46°$

Hallando θ:

$$\theta = 180° - (\alpha + \beta) = 41,65°$$

Teorema de tangentes (ley de tangentes)

En todo triángulo, la diferencia de dos lados es a su suma, como la tangente de la semidiferencia de los ángulos opuestos a estos lados es a la tangente de la semisuma de estos ángulos.

$$\frac{a-b}{a+b} = \frac{\tan\left(\frac{A-B}{2}\right)}{\tan\left(\frac{A+B}{2}\right)} ; \quad \frac{a-c}{a+c} = \frac{\tan\left(\frac{A-C}{2}\right)}{\tan\left(\frac{A+C}{2}\right)} ;$$

$$\frac{b-c}{b+c} = \frac{\tan\left(\frac{B-C}{2}\right)}{\tan\left(\frac{B+C}{2}\right)}$$

A continuación presentamos una forma de demostración.

De la ley de senos

$$\frac{a}{\text{sen}A} = \frac{b}{\text{sen}B} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{\text{sen}A}{\text{sen}B}$$

por propiedad de proporciones

$$\Rightarrow \frac{a-b}{a+b} = \frac{\text{sen}A - \text{sen}B}{\text{sen}A + \text{sen}B}$$

por transformaciones trigonométricas

$$\Rightarrow \frac{a-b}{a+b} = \frac{2\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)\text{sen}\left(\frac{A-B}{2}\right)}{2\text{sen}\left(\frac{A+B}{2}\right)\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)}$$

$$\Rightarrow \frac{a-b}{a+b} = \cot\left(\frac{A+B}{2}\right)\tan\left(\frac{A-B}{2}\right); \text{ pero}$$

$$\cot\left(\frac{A+B}{2}\right) = \frac{1}{\tan\left(\frac{A+B}{2}\right)}$$

$$\therefore \frac{a-b}{a+b} = \frac{\tan\left(\frac{A-B}{2}\right)}{\tan\left(\frac{A+B}{2}\right)} ;$$

esto es lo que se buscaba demostrar.

De la ley de senos, si utilizamos $\frac{a}{\text{sen}A}=\frac{c}{\text{sen}C}$ y $\frac{b}{\text{sen}B}=\frac{c}{\text{sen}C}$

y realizamos un procedimiento similar al anterior, obtendremos las otras dos expresiones restantes del Teorema de tangentes.

Teorema de las proyecciones (ley de las proyecciones)

En todo triángulo, se cumple que un lado cualquiera es igual a la suma de sus otros dos lados multiplicados cada uno por los cosenos de los ángulos adyacentes a dicho lado.

$$a = b\cos C + c\cos B$$
$$b = a\cos C + c\cos A$$
$$c = a\cos B + b\cos A$$

Demostración

En la figura 6.11 se ha trazado la altura BD. Asimismo en el triángulo rectángulo ADB y BDC, tenemos

$AD = c\cos A$ y $DC = a\cos C$

Pero $AC = AD + DC \Rightarrow AC = c\cos A + a\cos C$

$\therefore b = a\cos C + c\cos A$

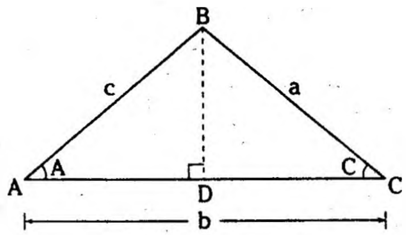


Figura 6.11

En el triángulo ABC, si trazamos las otras dos alturas correspondientes a los lados AB y BC, obtendremos las otras dos relaciones restantes del teorema.

Observación

Como ya se planteó al inicio de este capítulo, cuando se dan tres elementos cualesquiera de un triángulo, siempre que al menos uno de ellos sea un lado, los teoremas que hemos demostrado nos permiten hallar los valores numéricos de los elementos no conocidos del triángulo; pues en cualquier ecuación que relacione cuatro cantidades donde tres de ellas sean las conocidas, podrá hallarse la cuarta. Así por ejemplo, si c, a y B son dados, podemos calcular b con la fórmula:

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos B$$

y si B, C y b son conocidos, hallamos c por medio de la fórmula $\frac{c}{\text{sen}C}=\frac{b}{\text{sen}B}$

RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE LOS SEMIÁNGULOS DE UN TRIÁNGULO EN FUNCIÓN DEL SEMIPERÍMETRO Y LADOS

En un triángulo ABC, se desea calcular las razones trigonométricas de los semiángulos $\frac{A}{2}$, $\frac{B}{2}$ y $\frac{C}{2}$

Para A/2:

En un triángulo ABC, el ángulo interior A debe verificar $0 < A < 180°$, entonces $0 < \frac{A}{2} < 90°$.

Utilizando identidades del arco mitad tenemos

$$\text{sen}\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos A}{2}} \quad ...(1)$$

De la ley de cosenos tenemos

$$\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} \quad ...(2)$$

Reemplazando (2) en (1) tenemos

$$\text{sen}\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{1-\left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)}{2}}$$

$$\text{sen}\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{a^2-(b^2+c^2-2bc)}{4bc}} = \sqrt{\frac{a^2-(b-c)^2}{4bc}}$$

$$\text{sen}\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(a+b-c)(a-b+c)}{4bc}} \quad ...(3)$$

Asumimos que el perímetro del triángulo ABC sea $2p=a+b+c$.

Despejando $a+b=2p-c$; $a+c=2p-b$ y reemplazando en (3) obtenemos

$$\text{sen}\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(2p-2c)(2p-2b)}{4bc}} = \sqrt{\frac{2(p-c)2(p-b)}{4bc}}$$

$$\therefore \text{sen}\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}$$

Análogamente utilizando la identidad

$$\cos\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos A}{2}} \quad \text{y}$$

$$\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}, \text{ se obtiene}$$

$$\cos\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}$$

como $\tan\frac{A}{2} = \frac{\text{sen}\frac{A}{2}}{\cos\frac{A}{2}} = \frac{\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}}{\sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}}$

$$\therefore \tan\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}$$

Fórmulas de las razones trigonométricas de los semiángulos de un triángulo ABC

$$\text{sen}\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}} \; ; \; \cos\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}} \; ; \; \tan\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}$$

$$\text{sen}\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{ac}} \; ; \; \cos\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{p(p-b)}{ac}} \; ; \; \tan\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{p(p-b)}}$$

$$\text{sen}\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{ab}} \; ; \; \cos\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{p(p-c)}{ab}} \; ; \; \tan\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{p(p-c)}}$$

donde $p = \frac{a+b+c}{2}$, es el semiperímetro del triángulo ABC.

Ejemplo 7
Si los lados de un triángulo ABC son

$$a=10;\ b=9\ \text{ y }\ c=13$$

Calcule

$$\operatorname{sen}\frac{A}{2}\ \text{ y }\ \cos\frac{A}{2}.$$

Resolución
Hallando el semiperímetro

$$p=\frac{a+b+c}{2}=\frac{10+9+13}{2}=16$$

Como

- $$\operatorname{sen}\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}=\sqrt{\frac{(16-9)(16-13)}{9\times 13}}$$

$$\operatorname{sen}\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{7\times 3}{117}}=\sqrt{\frac{21}{117}}$$

Además

- $$\cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}=\sqrt{\frac{16(16-10)}{9\times 13}}$$

$$\cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{16\times 6}{9\times 13}}=\sqrt{\frac{32}{39}}$$

A continuación se desarrollará una serie de ejemplos que tiene como objetivo deducir las diversas fórmulas que sirven para calcular semiperímetro, alturas, áreas, inradios, exradios, medianas y bisectrices correspondientes a un triángulo ABC.

Ejemplo 8
Exprese el semiperímetro de un triángulo ABC en función de los semiángulos y el radio R de la circunferencia circunscrita.

Resolución
De la ley de senos

$$\frac{a}{\operatorname{sen}A}=\frac{b}{\operatorname{sen}B}=\frac{c}{\operatorname{sen}C}=2R$$

Por propiedad de proporciones

$$\frac{a+b+c}{\operatorname{sen}A+\operatorname{sen}B+\operatorname{sen}C}=2R$$

De donde

$$a+b+c=2R(\operatorname{sen}A+\operatorname{sen}B+\operatorname{sen}C)$$

Utilizando

$$2p=a+b+c:\ 2p=2R(\operatorname{sen}A+\operatorname{sen}B+\operatorname{sen}C)$$

Simplificando

$$p=R(\operatorname{sen}A+\operatorname{sen}B+\operatorname{sen}C)\ \ldots (1)$$

Del capítulo Transformaciones trigonométricas se dedujo que si $A+B+C=180°$, se cumple

$$\operatorname{sen}A+\operatorname{sen}B+\operatorname{sen}C=4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}\ \ldots (2)$$

Reemplazando (2) en (1) tenemos

$$p=R\left(4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}\right)$$

$$\therefore\ \boxed{p=4R\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}$$

Fórmula que relaciona el semiperímetro, circunradio y semiángulos de un triángulo ABC.

Ejemplo 9
Exprese cada altura de un triángulo en función del radio R del círculo circunscrito y de los ángulos.

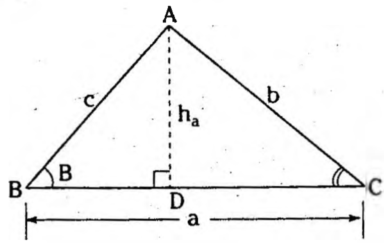


Figura 6.12

Resolución

Sea h_a la altura correspondiente al lado **a** (véase la figura 6.12). Entonces del triángulo rectángulo ADB tenemos:

$$h_a = c\operatorname{sen}B \ ... \ (1)$$

De la ley de senos se deduce

$$c = 2R\operatorname{sen}C \ ... \ (2)$$

Reemplazamos (2) en (1), obteniendo

$$\boxed{h_a = 2R\operatorname{sen}B\operatorname{sen}C}$$

Análogamente se obtienen

$$\boxed{h_b = 2R\operatorname{sen}A\operatorname{sen}C} \text{ y } \boxed{h_c = 2R\operatorname{sen}A\operatorname{sen}B}$$

Ejemplo 10

Halle el radio r, del círculo inscrito en un triángulo en función de los ángulos y el radio del círculo circunscrito.

Resolución

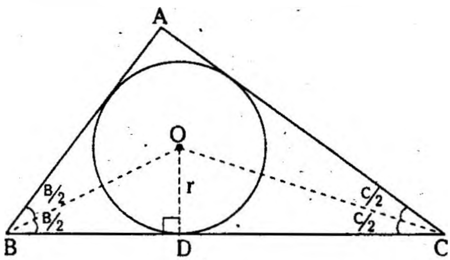


Figura 6.13

De la figura 6.13 de los triángulos rectángulos ODB y ODC se obtienen

$$BD = r\cot\frac{B}{2} \quad y \quad DC = r\cot\frac{C}{2}$$

como

$$BC = BD + DC \Rightarrow BC = r\cot\frac{B}{2} + r\cot\frac{C}{2}$$

$$\Rightarrow a = r\left[\cot\frac{B}{2} + \cot\frac{C}{2}\right]$$

Expresando, en senos y cosenos, luego efectuando

$$\Rightarrow 2R\operatorname{sen}A = r\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{B}{2}+\frac{C}{2}\right)}{\operatorname{sen}\frac{B}{2}\operatorname{sen}\frac{C}{2}}$$

$$\Rightarrow 2R\left(2\operatorname{sen}\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}\right) = \frac{r\cos\frac{A}{2}}{\operatorname{sen}\frac{B}{2}\operatorname{sen}\frac{C}{2}}$$

$$\therefore \boxed{r = 4R\operatorname{sen}\frac{A}{2}\operatorname{sen}\frac{B}{2}\operatorname{sen}\frac{C}{2}}$$

Fórmula que relaciona al inradio, circunradio y ángulos de un triángulo.

Ejemplo 11

Exprese el semiperímetro de un triángulo ABC en términos del inradio y los semiángulos. (Véase figura 6.14)

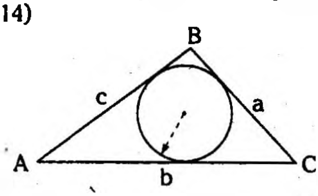


Figura 6.14

Resolución

Del ejemplo (1) $\quad p = 4R\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$

Del ejemplo (10) $\quad r = 4R\operatorname{sen}\frac{A}{2}\operatorname{sen}\frac{B}{2}\operatorname{sen}\frac{C}{2}$

Dividiendo ambos miembros

$$\frac{p}{r} = \frac{4R\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}{4R\operatorname{sen}\frac{A}{2}\operatorname{sen}\frac{B}{2}\operatorname{sen}\frac{C}{2}}$$

Simplificando $\frac{p}{r} = \cot\frac{A}{2}\cot\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2}$

Por lo tanto $\boxed{p = r\cot\frac{A}{2}\cot\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2}}$

Fórmula que relaciona el semiperímetro, el inradio y semiángulos de un triángulo ABC.

Ejemplo 12
Exprese cada uno de los radios de los círculos exinscritos de un triángulo, en función de los ángulos y del radio del círculo circunscrito.

Resolución
De la figura 6.15(a), r_a es el ex radio relativo al lado a de un triángulo ABC. Asimismo de los triángulos rectángulos BDO y CDO obtenemos

$$BD = r_a \tan\frac{B}{2} \quad y \quad DC = r_a \tan\frac{C}{2}$$

Además

$$BC = BD + DC$$

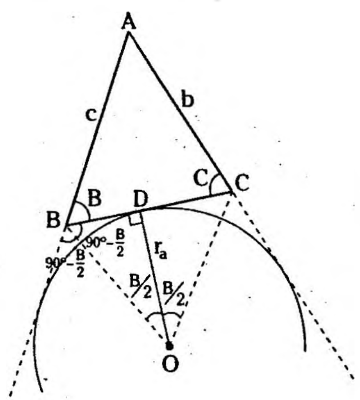
$$\Rightarrow a = r_a \tan\frac{B}{2} + r_a \tan\frac{C}{2}$$

$$\Rightarrow 2R\text{sen}A = r_a\left(\tan\frac{B}{2} + \tan\frac{C}{2}\right)$$

$$\Rightarrow 2R\left(2\text{sen}\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}\right) = r_a \frac{\text{sen}\left(\frac{B}{2}+\frac{C}{2}\right)}{\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}$$

$$4R\text{sen}\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2} = r_a \frac{\cos\frac{A}{2}}{\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}$$

$$\therefore \boxed{r_a = 4R\text{sen}\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}$$



(a)

Análogamente

$$\boxed{r_b = 4R\cos\frac{A}{2}\text{sen}\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}} \quad y$$

$$\boxed{r_c = 4R\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\text{sen}\frac{C}{2}}$$

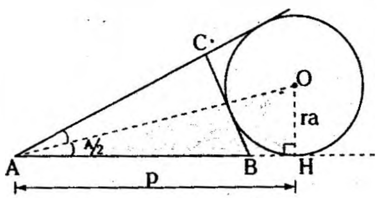
Si generamos el cociente entre r_a y p obtenemos

$$\frac{r_a}{p} = \frac{4R\text{sen}\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}{4R\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}$$

$$\frac{r_a}{p} = \tan\frac{A}{2}$$

$$\therefore \boxed{r_a = p\tan\frac{A}{2}}$$

Otra manera de obtener esta fórmula



(b)
Figura 6.15

En el triángulo rectángulo AHO figura 6.15(b) se sabe que AH=p, luego $r_a = p\tan\frac{A}{2}$
Análogamente

$$\boxed{r_b = p\tan\frac{A}{2}} \quad y \quad \boxed{r_c = p\tan\frac{C}{2}}$$

Como ejercicio para el lector, se deja para demostrar que el inradio **r** de un triángulo ABC, puede ser expresado como:

$$\boxed{r = (p-a)\tan\frac{A}{2}} \; ; \; \boxed{r = (p-b)\tan\frac{B}{2}}$$

$$o \quad \boxed{r = (p-c)\tan\frac{C}{2}}$$

Ejemplo 13

Exprese $4m_a^2$ en términos de los lados **b**, **c** y el ángulo A, en un triángulo ABC, si m_a es la mediana relativa al lado a.

Resolución

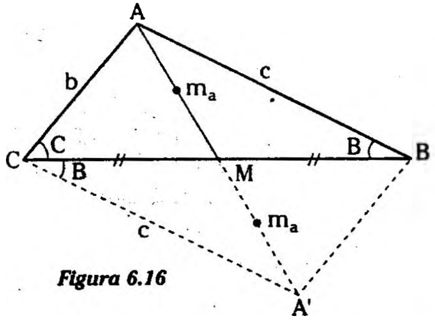


Figura 6.16

En la figura 6.16; $\mathbf{m_a}$ es la mediana relativa al lado a del ΔABC. Asimismo se ha prolongado $\overline{AM}$ hasta un punto A' de tal manera que

$$AM = MA'$$

En consecuencia, el cuadrilátero ABA'C es un paralelogramo, entonces

$$m\measuredangle A'CB = m\measuredangle ABC \wedge AB = CA' = c$$

En el Δ ACA', aplicamos la ley de cosenos

$$(2m_a)^2 = b^2 + c^2 - 2\times b\times c\times\cos(B+C);$$

pero cos (B+C) = –cosA ya que A+B+C = 180°

$$4m_a^2 = b^2 + c^2 - 2bc[-\cos A]$$

$$\therefore \boxed{4m_a^2 = b^2+c^2+2bc\cos A}$$

Análogamente y para las medianas relativas al lado b y c respectivamente

$$\boxed{4m_b^2 = a^2+c^2+2ac\cos B} \quad y$$

$$\boxed{4m_c^2 = a^2+b^2+2ab\cos C}$$

Observación

Del ejemplo (13) $4m_a^2=b^2 + c^2 + 2bc\cos A$

De la ley de cosenos $a^2=b^2 + c^2-2bc\cos A$

Sumando $4m_a^2 + a^2 = 2b^2 + 2c^2$

Por lo tanto: $m_a^2 = \dfrac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4}$

Fórmula que relaciona la mediana relativa al lado a, con los lados del ΔABC

Análogamente

$$m_b^2 = \frac{2a^2+2c^2-b^2}{4}$$

$$m_c^2 = \frac{2a^2+2b^2-c^2}{4}$$

Ejemplo 14

Exprese la bisectriz interior relativo al lado a en función de los lados b, c y el ángulo A de un triángulo ABC.

Resolución

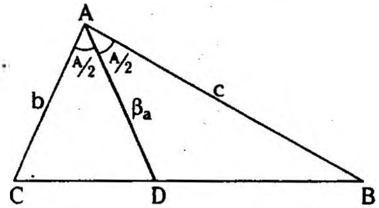


Figura 6.17

En la figura 6.17 se tiene que β_a es la bisectriz interior relativa al lado a. Además, el área de la región triangular ABC puede expresarse como la suma de las regiones triangulares ACD y ADB, es decir

$$\underbrace{S\Delta ABC} = \underbrace{S\Delta CAD} + \underbrace{S\Delta DAB}$$

$$\Rightarrow \frac{bc}{2}\operatorname{sen}A = \frac{b\beta_a}{2}\operatorname{sen}\frac{A}{2} + \frac{\beta_a c}{2}\operatorname{sen}\frac{A}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{bc}{2}\times 2\cancel{\operatorname{sen}\frac{A}{2}}\cos\frac{A}{2} = \frac{\beta_a}{2}\cancel{\operatorname{sen}\frac{A}{2}}(b+c)$$

$$\Rightarrow\ 2bc\cos\frac{A}{2} = \beta_a(b+c)$$

$$\therefore\ \boxed{\beta_a = \frac{2bc}{b+c}\cos\frac{A}{2}}$$

Análogamente, para las bisectrices interiores relativo a los lados b y c respectivamente

$$\boxed{\beta_b = \frac{2ac}{a+c}\cos\frac{B}{2}} \quad y \quad \boxed{\beta_c = \frac{2ab}{a+b}\cos\frac{C}{2}}$$

Ejemplo 15

Exprese la bisectriz exterior relativa al lado a (β_a'), en función de los lados b y c y el ángulo A de un triángulo ABC.

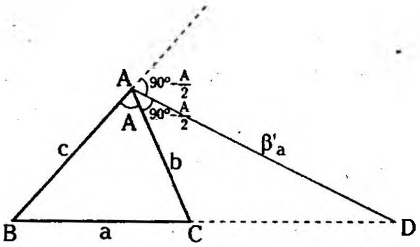


Figura 6.18

Resolución

En la figura 6.18, β_a' es la bisectriz exterior relativa al lado a.

Además $m\measuredangle BAD = 90° + \frac{A}{2}$

Además

$$\underbrace{S_{\Delta ABC}} = \underbrace{S_{\Delta BAD}} - \underbrace{S_{\Delta CAD}}$$

$$\Rightarrow \frac{bc}{2}\text{sen}A = \frac{c\beta'_a}{2}\text{sen}\left(90 + \frac{A}{2}\right) - \frac{b\beta'_a}{2}\text{sen}\left(90° - \frac{A}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{bc}{2}\times 2\text{sen}\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2} = \frac{c\beta_a'}{2}\cos\frac{A}{2} - \frac{b\beta_a'}{2}\cos\frac{A}{2}$$

$$\Rightarrow bc\,\text{sen}\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2} = \frac{\beta_a'}{2}\cos\frac{A}{2}(c-b)$$

$$\Rightarrow bc\,\text{sen}\frac{A}{2} = \frac{\beta_a'}{2}(c-b)$$

$$\therefore\ \boxed{\beta_a' = \frac{2bc}{c-b}\text{sen}\frac{A}{2};} \quad \text{si } c > b$$

Análogamente, para las bisectrices exteriores relativo a los lados b y c respectivamente:

$$\boxed{\beta_b' = \frac{2ac}{a-c}\text{sen}\frac{B}{2}} \quad y \quad \boxed{\beta_c' = \frac{2ba}{b-a}\text{sen}\frac{C}{2}}$$

si $a > c$ si $b > a$

Observación

Tenga en cuenta en la aplicación de las fórmulas planteadas en el ejemplo 15, que de las diferencias de lados que aparecen en el denominador de los segundos miembros, se debe tomar el valor absoluto, pues su signo sólo indica el lado por el cual la bisectriz corta el lado opuesto al ángulo correspondiente. Entonces, las fórmulas del ejercicio 12 también pueden expresarse de la siguiente manera:

$$\beta'_a = \frac{2bc}{|b-c|}\text{sen}\frac{A}{2}\ ;\quad \beta'_b = \frac{2ac}{|a-c|}\text{sen}\frac{B}{2}\ ;$$

$$\beta'_c = \frac{2ab}{|a-b|}\text{sen}\frac{C}{2}$$

Área de una Región Triangular

El área S de la región triangular ABC se expresará en términos de sus elementos, como son, las medidas de los ángulos, la longitud de sus lados, el circunradio, el inradio, el semiperímetro y otros.

A partir del triángulo ABC de lados respectivos a, b y c (vea la figura 6.12).

Podemos obtener

$$\boxed{S = \frac{bc}{2}\text{sen}A} \quad ...(1)$$

Así como también

$$\boxed{S = \frac{ab}{2}\text{sen}C} \quad ...(2) \qquad \boxed{S = \frac{ac}{2}\text{sen}B} \quad ...(3)$$

De la ley de senos se deduce

b=2R senB; c=2R senC (R: circunradio)

Reemplazando en (1)

$$S=\frac{(2R\operatorname{sen}B)(2R\operatorname{sen}C)\operatorname{sen}A}{2}$$

Simplificando se obtiene

$$\boxed{S=2R^2\operatorname{sen}A\operatorname{sen}B\operatorname{sen}C}\quad ...(4)$$

Igualdad que relaciona el área, circunradio y los ángulos del triángulo ABC.

Pero también de la ley de senos se deduce que

$$\operatorname{sen}A=\frac{a}{2R};\ \operatorname{sen}B\frac{b}{2R};\ \operatorname{sen}C\frac{C}{2R}$$

Reemplazando en (4)

$$S=2R^2\left(\frac{a}{2R}\right)\left(\frac{b}{2R}\right)\left(\frac{c}{2R}\right)$$

Simplificando se obtiene

$$\boxed{S=\left(\frac{abc}{4R}\right)}...(5)$$

Igualdad que relaciona las longitudes de los lados a, b, c y el circunradio con el área.

También a partir de (1) tenemos $S=\frac{bc}{2}\operatorname{sen}A$

pero $\operatorname{sen}A=\ 2\operatorname{sen}\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}$, entonces

$$S=\frac{bc}{2}\times 2\operatorname{sen}\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}=bc\operatorname{sen}\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}$$

como

$$\operatorname{sen}\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}\ \text{ y }\ \cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}},$$

entonces

$$S=bc\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}\sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}$$

$$\therefore\ \boxed{S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}...(6)$$

Esta igualdad relaciona el área, el semiperímetro y los lados del triángulo.

- Por geometría elemental, el área S de un triángulo ABC puede ser

$$\boxed{S=pr}...(7)$$

donde p es el semiperímetro y r es el inradio del triángulo ABC.

Como

$$p=r\cot\frac{A}{2}\cot\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2},$$

(revise el ejemplo 11)

$$\Rightarrow S=\left(r\cot\frac{A}{2}\cot\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2}\right)r$$

Simplificando se obtiene

$$\boxed{S=r^2\cot\frac{A}{2}\cot\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2}}\ ...(8)$$

Igualdad que relaciona el área, inradio y semiángulos de un triángulo ABC

Como

$$p=r\cot\frac{A}{2}\cot\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2}$$

Entonces

$$p=r\times\frac{1}{\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}}$$

Despejando

$$r=p\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}$$

Como

$$S=pr$$

Entonces

$$S=p\times\left(p\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}\right)$$

Simplificando se obtiene

$$\boxed{S = p^2 \tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}} \quad ...(9)$$

Igualdad que relaciona el área, semiperímetro y semiángulos del triángulo ABC.

Además del ejemplo 12, se sabe que

$r = (p-a)\tan\frac{A}{2}$ r: inradio
p: semiperímetro

$r = (p-b)\tan\frac{B}{2}$ a, b y c: las longitudes de los lados

$r = (p-c)\tan\frac{C}{2}$ A, B y C: la medida de los ángulos

Si reemplazamos estas igualdades en (7)

S=pr, obtenemos

$$\boxed{S = p(p-a)\tan\frac{A}{2}} \quad ...(10)$$

$$\boxed{S = p(p-b)\tan\frac{B}{2}} \quad ...(11)$$

$$\boxed{S = p(p-c)\tan\frac{C}{2}} \quad ...(12)$$

Las igualdades (10), (11) y (12) relacionan el área, el semiperímetro, la longitud de un lado y el ángulo opuesto respectivo.

Pero también del ejemplo 12 tenemos que

$$r_a = p\tan\frac{A}{2};\ r_b = p\tan\frac{B}{2};\ r_c = p\tan\frac{C}{2}$$

r_a: exradio relativo al lado a
r_b: exradio relativo al lado b
r_c: exradio relativo al lado c
p: semiperímetro

De (10)

$$S = p(p-a)\tan\frac{A}{2}$$

$$\Rightarrow S = \underbrace{p\tan\frac{A}{2}}_{r_a}(p-a)$$

Simplificando se obtiene

$$\boxed{S = r_a(p-a)} \quad ...(13)$$

De forma análoga

De (11)

$$S = p(p-b)\tan\frac{B}{2}$$

$$S = \underbrace{p\tan\frac{B}{2}}_{r_b}(p-b)$$

De donde obtenemos

$$\boxed{S = r_b(p-b)} \quad ...(14)$$

De (12) se obtiene

$$\boxed{S = r_c(p-c)} \quad ...(15)$$

Las igualdades (13), (14) y (15) relacionan el área, el semiperímetro, un lado y su exradio respectivo.

Vistas las igualdades (7), (13), (14) y (15)

$S = rp$
$S = r_a(p-a)$
$S = r_b(p-b)$
$S = r_c(p-c)$

Multiplicando miembro a miembro obtenemos

$$S^4 = rr_ar_br_c\,\underbrace{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$S^4 = rr_a\,r_b\,r_c \times \quad S^2$$

$$\Rightarrow S^2 = rr_ar_br_c$$

Despejando S obtenemos

$$\boxed{S=\sqrt{r r_a r_b r_c}} \quad ...(16)$$

Esta igualdad relaciona el área, el inradio y los tres exradios de dicho triángulo.

De la figura 6.12 se puede verificar

$$S=\frac{h_a.a}{2};\ S=\frac{h_b.b}{2};\ S=\frac{h_c.c}{2}$$

h_a: altura relativa al lado a
h_b: altura relativa al lado b
h_c: altura relativa al lado c
R: circunradio del triángulo ABC

Como $a=2R\,\mathrm{sen}A$
$b=2R\mathrm{sen}B$
$c=2R\mathrm{sen}C$

$$\Rightarrow S=\frac{h_a a}{2}=\frac{h_a}{2}(2R\mathrm{sen}A)$$

Reduciendo obtenemos

$$\boxed{S=h_a\,R\,\mathrm{sen}A} \quad ...(17)$$

De igual manera

$$\Rightarrow S=\frac{h_b b}{2}=\frac{h_b}{2}(2R\mathrm{sen}B)$$

De donde

$$\boxed{S=h_b\,R\,\mathrm{sen}B} \quad ...(18)$$

De forma análoga, usted puede obtener

$$\boxed{S=h_c\,R\,\mathrm{sen}C} \quad ...(19)$$

Las igualdades (17), (18) y (19) relacionan el área, el circunradio, la altura relativa a un lado, así como el ángulo que se opone al lado en mención. Finalmente si multiplicamos las igualdades (17), (18) y (19) miembro a miembro obtenemos

$$S^3=(h_a R\mathrm{sen}A)(h_b R\mathrm{sen}B)(h_c R\mathrm{sen}C)$$

el cual se puede reescribir como

$$S^3=h_a h_b h_c\,R^3\,\mathrm{sen}A\,\mathrm{sen}B\,\mathrm{sen}C$$

multiplicamos por 2

$$2S^3=h_a h_b h_c R\,\underbrace{2R^2\mathrm{sen}A\mathrm{sen}B\mathrm{sen}C}_{S\text{ (De la igualdad 4)}}$$

$$\Rightarrow 2S^3=h_a h_b h_c R\,S$$

Reduciendo y despejando S^2 obtenemos

$$S^2=\frac{h_a h_b h_c R}{2}$$

$$S=\frac{\sqrt{h_a h_b h_c R}}{\sqrt{2}}$$

$$S=\sqrt{h_a h_b h_c R}\underbrace{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}_{\mathrm{sen}45^\circ}$$

De donde obtenemos

$$\boxed{S=\sqrt{h_a h_b h_c R}\ \mathrm{sen}45^\circ} \quad ...(20)$$

Esta igualdad relaciona el área las tres alturas respectivas a cada uno de los lados así como el circunradio del triángulo ABC.

Área de una Región Cuadrangular

El área de una región cuadrangular cualquiera se expresará en función de sus diagonales y del ángulo que estas diagonales forman.

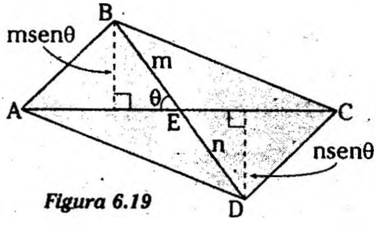


Figura 6.19

En la figura 6.19 se tiene un cuadrilátero ABCD donde se ha asumido la medida del ángulo que forman sus diagonales.

En la diagonal BD, sean BE = m y ED = n, entonces determinamos las alturas de los triángulos ABC y ADC como $m\,\text{sen}\theta$ y $n\,\text{sen}\theta$ respectivamente; luego para el área de la región cuadrangular ABCD:

$$S_{ABCD} = S_{ABC} + S_{ADC}$$

$$S_{ABCD} = \frac{AC(m\,\text{sen}\theta)}{2} + \frac{AC(n\,\text{sen}\theta)}{2}$$

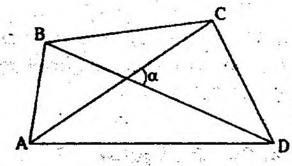
$$S_{ABCD} = \frac{AC\,(m+n)\text{sen}\theta}{2}$$

pero $m+n=BD$

$$\therefore S_{ABCD} = \frac{(AC)(BD)}{2}\text{sen}\theta$$

Teorema

El área de una región cuadrangular es igual al semiproducto de las diagonales multiplicado por el seno del ángulo que éstas forman.



$$S = \frac{AC \times BD}{2}\text{sen}\alpha$$

Ejemplo 1

Las diagonales de un paralelogramo miden 5 cm y 6 cm y se cortan formando un ángulo θ. Si el área de su región es 7,5 cm^2 ¿cuál es el valor de θ?

Resolución

Aplicando el teorema anterior, tenemos

$$7{,}5\text{ cm}^2 = \frac{(5\text{cm})(6\text{cm})}{2}\text{sen}\theta$$

Reduciendo se obtiene

$$\text{sen}\,\theta = \frac{1}{2}$$

$\therefore\ \theta = 30°$ ó $150°$

Ejemplo 2

Calcule el área de una región cuadrangular en función de sus lados y la suma de dos ángulos opuestos.

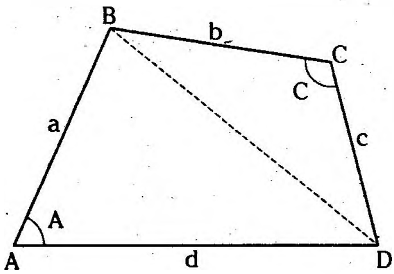


Figura 6.20

Resolución

En la figura 6.20 se tiene el cuadrilátero ABCD de lados a, b, c, d y ángulos A, B, C y D.

Aplicando la ley de cosenos a los triángulos BAD y BCD tenemos

$$BD^2 = a^2 + d^2 - 2ad\cos A$$
$$BD^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos C$$

Igualando los dos valores de BD^2 hallados, tenemos

$$a^2 + d^2 - 2ad\cos A = b^2 + c^2 - 2bc\cos C$$

$$a^2 + d^2 - b^2 - c^2 = 2ad\cos A - 2bc\cos C \quad \dots (1)$$

Sea S el área de la región cuadrangular ABCD,

entonces

$$S = \frac{ad\ \text{sen}A}{2} + \frac{bc\ \text{sen}C}{2}$$

$$\Rightarrow\ 4S = 2ad\,\text{sen}A + 2bc\,\text{sen}C \quad \dots (2)$$

Sumando los cuadrados de (1) y (2)

$$(a^2+d^2-b^2-c^2)^2+(4S)^2=(2ad\cos A-2bc\cos C)^2+(2ad\,\text{sen}A+2bc\,\text{sen}C)^2$$

$$(a^2+d^2-b^2-c^2)^2+16S^2=4a^2d^2+4b^2c^2-8abcd\underline{(\cos A\cos C-\text{sen}A\,\text{sen}C)}$$

$$(a^2+d^2-b^2-c^2)^2+16S^2=4a^2d^2+4b^2c^2-8abcd\cos(A+C) \quad \dots (3)$$

Asumimos que $A+C=2\phi$, entonces

$$\cos(A+C)=\cos 2\phi=2\cos^2\phi-1 \quad \dots (4)$$

Reemplazando (4) en (3) tenemos

$$(a^2+d^2-b^2-c^2)^2+16S^2=4a^2d^2+4b^2c^2-8abcd(2\cos^2\phi-1)$$

$$(a^2+d^2-b^2-c^2)^2+16S^2=4(ad+bc)^2-16abcd\cos^2\phi$$

$$16S^2=\underline{4(ad+bc)^2-(a^2+d^2-b^2-c^2)^2}-16abcd\cos^2\phi$$

↓ diferencia de cuadrados

$$16S^2=(2ad+2bc+a^2+d^2-b^2-c^2)(2ad+2bc-a^2-d^2+b^2+c^2)-16abcd\cos^2\phi$$

$$16S^2=\left(\underline{(a+d)^2-(b-c)^2}\right)\left(\underline{(b+c)^2-(a-d)^2}\right)-16abcd\cos^2\phi$$

$$16S^2=(a+d+b-c)(a+d-b+c)(b+c+a-d)(b+c-a+d)-16abcd\cos^2\phi$$

Sea

$2p=a+b+c+d$, el perímetro de cuadrilátero ABCD entonces

$$16S^2=(2p-2c)(2p-2b)(2p-2d)(2p-2a)-16abcd\cos^2\phi$$

$$S^2=(p-c)(p-b)(p-d)(p-a)-abcd\cos^2\phi$$

Ordenando y despejando S $\boxed{S=\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)-abcd\cos^2\phi}}$

Fórmula que relaciona el área, perímetro, lados y suma de dos ángulos opuestos de un cuadrilátero ABCD

donde $\phi=\dfrac{A+C}{2}$ ó $\phi=\dfrac{B+D}{2}$

Casos particulares

De la fórmula anterior

Para un cuadrilátero inscrito o inscriptible ABCD,(véase figura 6.21) la suma de dos ángulos opuestos es 180°, entonces $\phi = 90°$, por lo tanto el área respectiva será:

$$S=\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$$

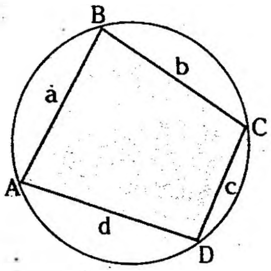


Figura 6.21



Brahmagupta, matemático hindú, generalizó la fórmula de Herón para calcular el área de un cuadrilátero, el cual lleva su nombre y está dado por $S=\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$. Donde a,b,c,d son los lados del cuadrilátero y p el semiperímetro, pero esta fórmula quedó limitada ya que solo se podía calcular para cuadriláteros inscriptibles.

Para un cuadrilátero circunscriptible ABCD (véase figura 6.22) se cumple el teorema de Pithot, es decir

$$a+c = b+d;$$

entonces

$$p = a+c \quad ó \quad p = b+d$$

en consecuencia

$$a = p-c;\ b = p-d;$$
$$c = p-a;\ d = p-b;$$

por lo tanto, el área respectiva al cuadrilátero será

$$S = \sqrt{abcd - abcd\cos^2\phi}$$

reduciendo

$$S = \sqrt{abcd}\,\mathrm{sen}\phi$$

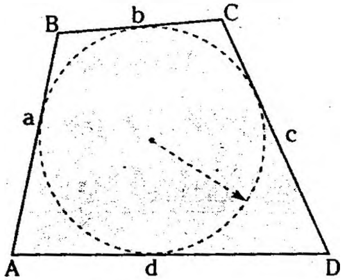


Figura 6.22

Para un cuadrilátero inscriptible y circunscrito a la vez (bicéntrico) (véase figura 6.23) se tiene que

$\phi = 90°$ y $(p-a)(p-b)(p-c)(p-d) = abcd$

Entonces, el área respectiva al cuadrilátero es

$$S = \sqrt{abcd}$$

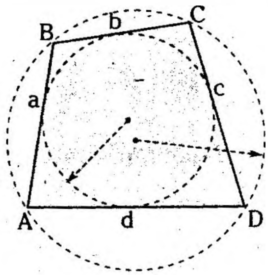
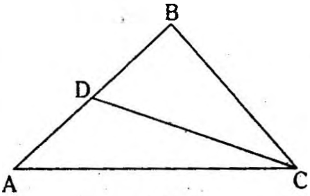


Figura 6.23

Problemas Resueltos

Problema 1

En la figura 6.24(a), calcule $m\sphericalangle DBC$; si $m\sphericalangle DAC = 2m\sphericalangle DCA = 40°$ y $BC = \sqrt{3}AD$



(a)

Resolución

Del enunciado obtenemos

$$m\sphericalangle DAC = 40°$$

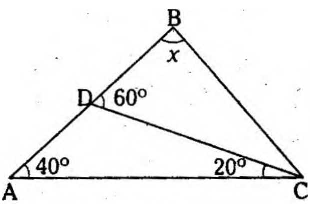
y $$m\sphericalangle DCA = 20°$$

Por geometría elemental

$$m\sphericalangle BDC = 60°$$

Sea

$x = m\sphericalangle DBC$ (véase figura 6.24(b))



(b)

Figura 6.24

En la figura, aplicamos ley de senos a los triángulos DBC y ADC

$$\frac{BC}{\text{sen}60°} = \frac{DC}{\text{sen}x} \quad \ldots (\alpha)$$

$$\frac{AD}{\text{sen}20°} = \frac{DC}{\text{sen}40°} \quad \ldots (\beta)$$

dividiendo α y β obtenemos

$$\frac{BC\,\text{sen}20°}{AD\,\text{sen}60°} = \frac{\text{sen}40°}{\text{sen}x} \quad \ldots (\gamma)$$

como se tiene

$$BC = \sqrt{3}\,AD,$$

entonces

$$\frac{BC}{AD} = \sqrt{3} \text{ y } \text{sen}60° = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

reemplazando en (γ) tenemos

$$\frac{\sqrt{3}\,\text{sen}20°}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\text{sen}40°}{\text{sen}x}$$

$$\Rightarrow 2\text{sen}20° = \frac{2\text{sen}20°\cos 20°}{\text{sen}x}$$

$$\Rightarrow \text{sen}x = \cos 20°$$

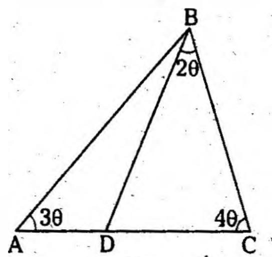
$$\Rightarrow \text{sen}x = \text{sen}70°$$

En la figura, x puede ser agudo u obtuso, por lo tanto

$$x = 70° \quad ó \quad x = 110°$$

Problema 2

De la figura mostrada, calcule θ si $AC = BD$



(a)

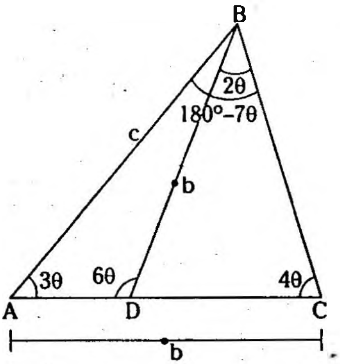
Resolución

Aplicamos ley de senos a los triángulos ABD y ABC (véase figura 6.25(b))

- $\dfrac{b}{\text{sen}3\theta}=\dfrac{c}{\text{sen}6\theta}$ ...(1)

- $\dfrac{b}{\text{sen}(180° - 7\theta)}=\dfrac{c}{\text{sen}4\theta}$

- $\dfrac{b}{\text{sen}7\theta}=\dfrac{c}{\text{sen}4\theta}$ ...(2)



(b)

Figura 6.25

Dividiendo (1) y (2) obtenemos

$$\frac{\text{sen}7\theta}{\text{sen}3\theta}=\frac{\text{sen}4\theta}{\text{sen}6\theta}$$

$$\Rightarrow \frac{\text{sen}7\theta}{\text{sen}3\theta}=\frac{\text{sen}4\theta}{2\text{sen}3\theta\cos3\theta}$$

$$\Rightarrow 2\text{sen}7\theta\cos3\theta=\text{sen}4\theta$$

$$\Rightarrow \text{sen}10\theta+\text{sen}4\theta=\text{sen}4\theta$$

$$\Rightarrow \text{sen}10\theta=0$$

$$\Rightarrow 10\theta=0°,\ 180°,\ 360°, ...$$

$$\Rightarrow \theta=0°,\ 18°,\ 36°,...$$

Para que el triángulo de la figura 6.25(a) exista el único valor que toma θ es $18°$

Problema 3

En un triángulo oblicuángulo $(A\neq B\neq C)$ ABC, obtenga el equivalente de la siguiente expresión

$$E=\frac{b\cos B+c\cos C}{\cos(B-C)}+\frac{a\cos A+c\cos C}{\cos(A-C)}+\frac{a\cos A+b\cos B}{\cos(A-B)}$$

Resolución

De la ley de senos

$a=2R\text{sen}A,\ b=2R\text{sen}B\ \text{ y }\ c=2R\text{sen}C$

Reemplazando en la expresión E obtenemos

$$E=\frac{R(\text{sen}2B+\text{sen}2C)}{\cos(B-C)}+\frac{R(\text{sen}2A+\text{sen}2C)}{\cos(A-C)}+\frac{R(\text{sen}2A+\text{sen}2B)}{\cos(A-B)}$$

$$E=\frac{R\times2\text{sen}(B+C)\cos(B-C)}{\cos(B-C)}+\frac{R\times2\text{sen}(A+C)\cos(A-C)}{\cos(A-C)}+\frac{R\times2\text{sen}(A+B)\cos(A-B)}{\cos(A-B)}$$

$$E=2R\text{sen}(B+C)+2R\text{sen}(A+C)+2R\text{sen}(A+B)$$

$$E=2R\text{sen}A+2R\text{sen}B+2R\text{sen}C$$

$$E=a+b+c$$

Problema 4

Calcule los ángulos de un triángulo ABC si

$$\frac{\text{sen}(B+C)}{a}=\frac{\cos(A+C)}{b}\ \text{ y}$$

$$C-A=25°$$

Resolución

Como

$A+B+C=180°\Rightarrow \text{sen}(B+C)=\text{sen}A$ y

$\cos(A+C)=-\cos B$

Reemplazando en la igualdad

$$\frac{\text{sen}A}{a}=\frac{-\cos B}{b}$$

Reemplazando

$a=2R\text{sen}A$ y $b=2R\text{sen}B$,

obtenemos

$$\frac{\text{sen}A}{2R\text{sen}A}=\frac{-\cos B}{2R\text{sen}B} \Rightarrow \tan B=-1$$

$\therefore B = 135°$

Como

$A+B+C = 180°$,

entonces $A+C = 45°$ ... (1)

Además por dato

$C-A = 25°$ ... (2)

De (1) y (2)

$C=35°$ y $A=10°$

Problema 5

En un triángulo ABC, calcule el exradio relativo al lado a, si

$$(0,5)a\,\text{sen}\left(\frac{B-C}{2}\right)=\sqrt{2}\left(\frac{b-c}{2}\right)\text{sen}\frac{A}{2};$$

además el perímetro de dicho triángulo es 12 m..

Resolución

Utilizamos la expresión del exradio relativo al lado a, esto es

$$r_a=p\tan\frac{A}{2}$$

Por dato: $2p=12m \Rightarrow p=6m$

$$\therefore r_a=6\tan\frac{A}{2} \;...(1)$$

Para calcular r_a sólo la medida del ángulo A o en su defecto $\tan\frac{A}{2}$; para tal simplificamos la expresión dada

$$\frac{1}{2}\times 2R\text{sen}A\times\text{sen}\left(\frac{B-C}{2}\right)=\sqrt{2}\left(\frac{2R\text{sen}B-2R\text{sen}C}{2}\right)\text{sen}\frac{A}{2}$$

$$\cancel{R}\times 2\cancel{\text{sen}}\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}\text{sen}\left(\frac{B-C}{2}\right)=\sqrt{2}\cancel{R}\underline{(\text{sen}B-\text{sen}C)}\cancel{\text{sen}}\frac{A}{2}$$

$$\cancel{2}\text{sen}\left(\frac{B+C}{2}\right)\cancel{\text{sen}}\left(\frac{B-C}{2}\right)=\sqrt{2}\times\cancel{2}\cancel{\text{sen}}\left(\frac{B-C}{2}\right)\cos\left(\frac{B+C}{2}\right)$$

$$\tan\left(\frac{B+C}{2}\right)=\sqrt{2}$$

$$\cot\frac{A}{2}=\sqrt{2}$$

$$\therefore \tan\frac{A}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Sustituyendo valores en (1)

$$r_a=(6m)\times\frac{\sqrt{2}}{2}=3\sqrt{2}\text{ m}$$

Problema 6

Resuelva el triángulo ABC

si $a=2\sqrt{6}$, $c=6-2\sqrt{3}$ y $B=75°$

Resolución

Estamos en el caso LAL

Por ley de cosenos hallamos el lado b

$$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$$

$$b^2=(2\sqrt{6})^2+(6-2\sqrt{3})^2-2(2\sqrt{6})(6-2\sqrt{3})\underline{\cos 75°}$$

$$b^2=24+48-24\sqrt{3}-\cancel{4}\sqrt{6}\times 2\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{\cancel{4}};$$

ya que $\cos 75°=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

$b^2=24 \Rightarrow b=2\sqrt{6}$, como $a=2\sqrt{6}$

entonces $a=b$ y $m\sphericalangle A=m\sphericalangle B$

$\therefore m\sphericalangle A=75°$ y $m\sphericalangle C=180°-(75°+75°)=30°$

Problema 7

En un triángulo ABC cualquiera se tiene $m\sphericalangle A = 45°$, $b = 20\sqrt{2}$ m y la diferencia de los otros dos lados es 16 (a>c). Calcule los lados desconocidos del triángulo.

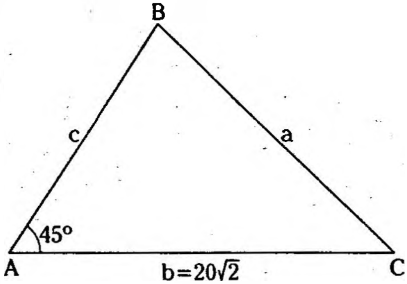


Figura 6.26

Resolución

Teniendo en cuenta las condiciones del problema, se tiene la figura 6.26.

De la ley de cosenos, tenemos

$$a^2 = c^2 + (20\sqrt{2})^2 - 2(20\sqrt{2})c\cos 45°$$

$$a^2 = c^2 + 800 - 40c \ ...\ (1)$$

Pero $a - c = 16 \Rightarrow a = 16 + c \ ...\ (2)$

(2) en (1):

$$(16+c)^2 = c^2 + 800 - 40c$$

$$256 + \cancel{c^2} + 32c = \cancel{c^2} + 800 - 40c$$

$$\Rightarrow 72c = 544 \quad \therefore\ c = \frac{68}{9}\ \text{m}$$

Sustituyendo en (2): $a = \dfrac{212}{9}$ m

Problema 8

Si en un triángulo ABC se cumple $a^2 + c^2 = b^2 - ac$. Calcule $m\sphericalangle B$

Resolución

De la igualdad $\quad b^2 = a^2 + c^2 + ac \quad ...\ (1)$

De la ley de cosenos $\quad b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B \quad ...\ (2)$

Restando (1) y (2) $\quad 0 = ac + 2ac\cos B$

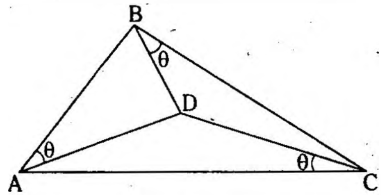
Despejando cos B $\quad \cos B = -\dfrac{1}{2}$

Por lo tanto B es obtuso e igual a 120°

Problema 9

En la figura 6.27(a) al punto D se le conoce como punto de Brocard. Demuestre

$$\cot A + \cot B + \cot C = \cot\theta$$

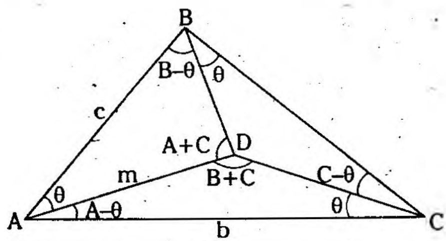


(a)

Resolución

En la figura 6.27(b) por propiedades geométricas se han obtenido las medidas de los ángulos CAD, ADB, ABD, BCD y CDA.

Además, se ha asumido que AD=m, por ser lado común de los triángulos ABD y ADC.



(b)

Figura 6.27

Aplicando la ley de senos a estos triángulos respectivamente tenemos

$$\frac{m}{\text{sen}(B-\theta)} = \frac{c}{\text{sen}(A+C)} \quad ...(1),$$

$$\text{y} \quad \frac{m}{\text{sen}\theta} = \frac{b}{\text{sen}(B+C)} \quad ...(2)$$

Dividiendo (1) y (2), obtenemos

$$\frac{\operatorname{sen}\theta}{\operatorname{sen}(B-\theta)}=\frac{c\operatorname{sen}(B+C)}{b\operatorname{sen}(A+C)} \quad ...(3)$$

pero $A+B+C=180^{\circ} \Rightarrow \begin{matrix}\operatorname{sen}(B+C)=\operatorname{sen}A \\ \operatorname{sen}(A+C)=\operatorname{sen}B\end{matrix}$

Sustituyendo en (3)

$$\frac{\operatorname{sen}\theta}{\operatorname{sen}(B-\theta)}=\frac{c\operatorname{sen}A}{b\operatorname{sen}B}$$

$$\frac{b}{c\operatorname{sen}A}=\frac{\operatorname{sen}(B-\theta)}{\operatorname{sen}B\operatorname{sen}\theta}$$

$$\frac{2R\overbrace{\operatorname{sen}B}^{\operatorname{sen}(A+C)}}{2R\operatorname{sen}C\operatorname{sen}A}=\frac{\operatorname{sen}(B-\theta)}{\operatorname{sen}B\operatorname{sen}\theta}$$

Desarrollando los senos de suma y diferencia de dos ángulos.

$$\frac{\operatorname{sen}A\cos C+\cos A\operatorname{sen}C}{\operatorname{sen}A\operatorname{sen}C}=\frac{\operatorname{sen}B\cos\theta-\cos B\operatorname{sen}\theta}{\operatorname{sen}B\operatorname{sen}\theta}$$

$$\frac{\operatorname{sen}A\cos C}{\operatorname{sen}A\operatorname{sen}C}+\frac{\cos A\operatorname{sen}C}{\operatorname{sen}A\operatorname{sen}C}=\frac{\operatorname{sen}B\cos\theta}{\operatorname{sen}B\operatorname{sen}\theta}-\frac{\cos B\operatorname{sen}\theta}{\operatorname{sen}B\operatorname{sen}\theta}$$

$$\Rightarrow \cot C+\cot A=\cot\theta-\cot B$$

$$\therefore\ \cot A+\cot B+\cot C=\cot\theta$$

Problema 10

En un triángulo ABC, se tiene que

$a=5b$ y $C=120^{\circ}$

Calcule $\csc^2(A-B)$

Resolución

Como

$A+B+C=180^{\circ}$ y $C=120^{\circ}$,

entonces $A+B=60^{\circ}$

Por ley de tangentes

$$\frac{a-b}{a+b}=\frac{\tan\left(\frac{A-B}{2}\right)}{\tan\left(\frac{A+B}{2}\right)} \quad ...(\alpha)$$

pero

$a=5b$ y $\frac{A+B}{2}=30^{\circ}$,

entonces, sustituyendo valores en (α)

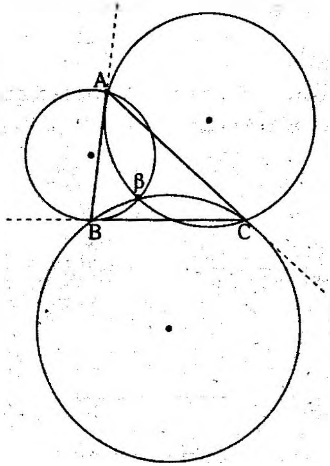
$$\frac{5b-b}{5b+b}=\frac{\tan\left(\frac{A-B}{2}\right)}{\tan 30^{\circ}}$$

$$\frac{4b}{6b}=\frac{\tan\left(\frac{A-B}{2}\right)}{\frac{\sqrt{3}}{3}} \quad \therefore \tan\left(\frac{A-B}{2}\right)=\frac{2\sqrt{3}}{9}$$

Nota Histórica

Henri Brocard (francés, 1845 – 1922) contribuye en la Matemática, con la geometría del triángulo entre los años 1870 – 1890 con muchos problemas y artículos en los periódicos matemáticos de ese tiempo.

Para dibujar el punto de Brocard, trace un triángulo ABC, luego trace una circunferencia que pasa por A y B tangente a BC, además trace una circunferencia que pasa A y C tangente a AB, finalmente trace la circunferencia que pasa por B y C tangente a AC, entonces las tres circunferencias se intersectan en un punto β llamado el primer punto de Brocard.



De las identidades pitagóricas:
$\csc^2(A-B)=1+\cot^2(A-B)$, calculamos $\tan(A-B)$ de la siguiente manera

$$\tan(A-B)=\frac{2\tan\left(\frac{A-B}{2}\right)}{1-\tan^2\left(\frac{A-B}{2}\right)}$$

por identidad de tangente de arco doble

$$\tan(A-B)=\frac{2\times\frac{2\sqrt{3}}{9}}{1-\left(\frac{2\sqrt{3}}{9}\right)^2}$$

reemplazando $\tan\left(\frac{A-B}{2}\right)=\frac{2\sqrt{3}}{9}$

$$\tan(A-B)=\frac{12\sqrt{3}}{23}$$

$$\therefore\ \cot^2(A-B)=\frac{529}{432}$$

Finalmente $\csc^2(A-B)=1+\frac{529}{432}=\frac{961}{432}$

Problema 11

En un triángulo ABC el ángulo C mide 60° y los lados a y b miden $a=2\sqrt{3}+\sqrt{2}$ y $b=2\sqrt{3}-\sqrt{2}$
Calcule la medida del ángulo A.

Resolución

En la figura 6.28 se tienen esquematizados los datos del problema.

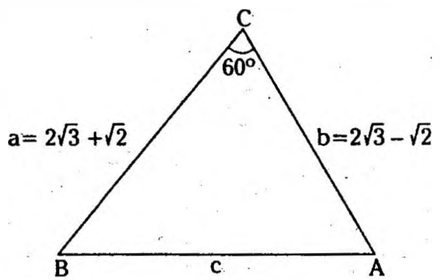


Figura 6.28

Entonces
$A+B=120^\circ \Rightarrow B=120^\circ-A$
De la ley de tangentes

$$\frac{a-b}{a+b}=\frac{\tan\left(\frac{A-B}{2}\right)}{\tan\left(\frac{A+B}{2}\right)}$$

Reemplazando datos

$$\frac{2\sqrt{3}+\sqrt{2}-(2\sqrt{3}-\sqrt{2})}{2\sqrt{3}+\sqrt{2}+2\sqrt{3}-\sqrt{2}}=\frac{\tan\left(\frac{A-B}{2}\right)}{\tan 60^\circ}$$

$$\frac{2\sqrt{2}}{4\sqrt{3}}=\frac{\tan\left(\frac{A-B}{2}\right)}{\sqrt{3}}\Rightarrow\tan\left(\frac{A-B}{2}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Pero $B=\frac{2\pi}{3}-A$, entonces

$$\tan\left(\frac{A-\frac{2\pi}{3}+A}{2}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow\tan\left(A-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow A-\frac{\pi}{3}=\arctan\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$\Rightarrow A=\frac{\pi}{3}+\arctan\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

buscando su equivalente

$$\Rightarrow A=\arctan(\sqrt{3})+\arctan\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

Por propiedad

$$A=\arctan\left(\frac{\sqrt{3}+\frac{\sqrt{2}}{2}}{1-\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{2}}{2}}\right)+\pi$$

$$A=\arctan(-4\sqrt{2}-3\sqrt{3})+\pi$$

$$\therefore\ A=\pi-\arctan(4\sqrt{2}+3\sqrt{3})$$

Luego la medida del ángulo

$$A:\ \frac{\pi}{3}+\arctan\frac{\sqrt{2}}{2}\quad ó\quad \pi-\arctan(4\sqrt{2}+3\sqrt{3})$$

Problema 12

Siendo θ un ángulo cualquiera, entonces halle un equivalente para la expresión $a\cos(\theta - B) + b\cos(\theta + A)$ en un triángulo ABC.

Resolución

Sea K la expresión a simplificar

$$K = a\cos(\theta - B) + b\cos(\theta + A) = a[\cos\theta\cos B + \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}B] + b\,[(\cos\theta\cos A - \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}A)]$$

$$K = a\cos\theta\cos B + a\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}B + b\cos\theta\cos A - b\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}A$$

$$K = \cos\theta(a\cos B + b\cos A) + \operatorname{sen}\theta(a\operatorname{sen}B - b\operatorname{sen}A) \qquad \ldots (1)$$

De la ley de senos $\dfrac{a}{\operatorname{sen}A} = \dfrac{b}{\operatorname{sen}B}$, entonces $a\operatorname{sen}B = b\operatorname{sen}A$

Además de la ley de proyecciones tenemos $c = a\cos B + b\cos A$,

reemplazando en (1)

$$K = \cos\theta(c) + \operatorname{sen}\theta(0)$$

$$\therefore\ K = c\cos\theta$$

Luego $a\cos(\theta - B) + b\cos(\theta + A) = c\cos\theta$

Problema 13

En un triángulo ABC, si $\cos C = 0{,}1$. Calcule el valor de $E = 1 - \dfrac{c\cos A + c\cos B}{a + b}$

Resolución

$$E = \frac{a + b - c\cos A - c\cos B}{a + b}$$

$$E = \frac{a - c\cos A + b - c\cos B}{a + b} \qquad \ldots (1)$$

De la ley de proyecciones $a - c\cos A = a\cos C$ y $b - c\cos B = b\cos C$, reemplazando en (1) tenemos

$$E = \frac{a\cos C + b\cos C}{a + b} = \frac{(a+b)\cos C}{(a+b)} = \cos C = 0{,}1$$

Problema 14

En un triángulo ABC, se tiene como datos el lado a, la mediana relativa a dicho lado m_a y el área correspondiente a dicho triángulo es S. Exprese $\cot A$ en términos de los datos.

Resolución

Del teorema de la mediana

$$4m_a^2=b^2+c^2+2bc\cos A \quad ...(1)$$

De la ley de cosenos

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A \quad ...(2)$$

Restando (1) y (2), tenemos

$$4m_a^2-a^2=4bc\cos A \quad ...(3)$$

Como S es el área correspondiente al Δ ABC, tenemos

$$S=\frac{bc}{2}\text{sen}A \Rightarrow bc=\frac{2S}{\text{sen}A} \quad ...(4)$$

Reemplazando (4) en (3)

$$4m_a^2-a^2=4\left(\frac{2S}{\text{sen}A}\right)\cos A$$

$$4m_a^2-a^2=8S\cot A$$

$$\therefore \cot A=\frac{4m_a^2-a^2}{8S}$$

Problema 15

¿En qué tipo de triángulo ABC se cumple $2r_br_c=bc$?

Resolución

Como $r_b=p\tan\frac{B}{2}$ y $r_c=p\tan\frac{C}{2}$

Sustituyendo en la condición

$$2\left(p\tan\frac{B}{2}\right)\left(p\tan\frac{C}{2}\right)=bc$$

$$2p\sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{p(p-b)}}\times p\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{p(p-c)}}=bc;$$

$$2p(p-a)=bc$$

$$(a+b+c)\left(\frac{a+b+c}{2}-a\right)=bc$$

$$(a+b+c)(b+c-a)=2bc$$

$$(b+c)^2-a^2=2bc$$

$$b^2+c^2+2bc-a^2=2bc$$

$b^2+c^2=a^2$ Teorema de Pitágoras

Por lo tanto el triángulo ABC es del tipo rectángulo y es recto en A.

Problema 16

A partir de un cuadrilátero ABCD de lados respectivos a, b, c y d. Halle la $\tan\left(\frac{A}{2}\right)$ en términos de a, b, c y d y el semiperímetro p.

Resolución

A partir del enunciado podemos plantear el siguiente gráfico.

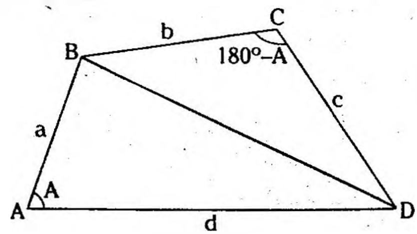


Figura 6.29

C=180°–A (por ser un cuadrilátero inscriptible)

En el triángulo ABD (teorema de cosenos)

$$BD^2=a^2+d^2-2ad\cos A \quad ...(1)$$

En el triángulo BCD (teorema de cosenos)

$$BD^2=b^2+c^2-2bc\cos(180°-A)$$

$$\Rightarrow BD^2=b^2+c^2+2bc\cos A \quad ...(2)$$

De (1)=(2)

$$a^2+d^2-2ad\cos A=b^2+c^2+2bc\cos A$$

Despejando cosA obtenemos

$$\cos A=\frac{a^2+d^2-b^2-c^2}{2ad+2bc}$$

Pero como $0<A<180° \Rightarrow 0<\frac{A}{2}<90°$

de donde $\frac{A}{2}$ es agudo con lo que $\left|\tan\frac{A}{2}\right|=\tan\frac{A}{2}$

$$\Rightarrow \tan\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos A}{1+\cos A}} \quad ...(4)$$

Reemplazando (4) en (3), obtenemos

$$\tan\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{1-\dfrac{a^2+d^2-b^2-c^2}{2ad+2bc}}{1+\dfrac{a^2+d^2-b^2-c^2}{2ad+2bc}}}$$

Reduciendo obtenemos

$$\Rightarrow \tan\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(b+c+a-d)^2}{(a+d)^2-(b-c)^2}}$$

$$\Rightarrow \tan\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(b+c+a-d)(bc-a+d)}{(a+d+b-c)(a+d-b+c)^2}} \quad (5)$$

Pero $2p=a+b+c+d$ $\Rightarrow$

$$\left.\begin{aligned} b+c+a-d&=2p-2d\\ b+c-a+d&=2p-2a\\ a+d+b-c&=2p-2c\\ a+d-b+c&=2p-2b\end{aligned}\right|(6)$$

Reemplazando (6) en (5)

$$\tan\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(2p-2d)(2d-2a)}{(2p-2c)(2p-2b)}}$$

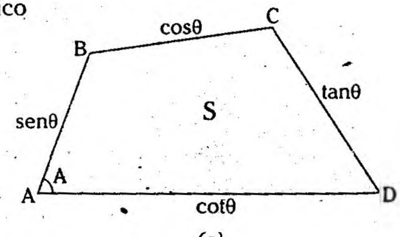
$$\therefore \tan\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(p-d)(p-a)}{(p-c)(p-b)}}$$

Problema 17

Dado un cuadrilátero ABCD bicéntrico ABCD donde $AB=\operatorname{sen}\theta$, $BC=\cos\theta$, $CD=\tan\theta$, $DA=\cot\theta$. Halle el área de la región contenida por este cuadrilátero.

Resolución

Del enunciado podemos plantear el siguiente gráfico



(a)

Como las longitudes son cantidades positivas, entonces podemos plantear

$\operatorname{sen}\theta>0$, $\cos\theta>0$, $\tan\theta>0$, $\cot\theta>0$.

De donde concluimos $\theta\in IC$ ...(1)

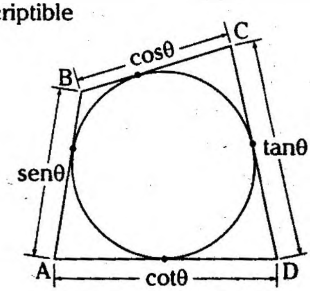
Por otra parte sea S el área pedida

$$\Rightarrow S=\sqrt{\operatorname{sen}\theta\cos\theta\tan\theta\cot\theta}$$

(por ser un cuadrilátero bicéntrico)

$$\Rightarrow S=\sqrt{\operatorname{sen}\theta\cos\theta} \quad ...(2)$$

Debido a que ABCD es un cuadrilátero circunscriptible



(b)

Figura 6.30

De la figura 6.30(b) $\operatorname{sen}\theta+\tan\theta=\cos\theta+\cot\theta$

$$\Rightarrow \operatorname{sen}\theta-\cos\theta=\frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}-\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}=\frac{\cos^2\theta-\operatorname{sen}^2\theta}{\operatorname{sen}\theta\cos\theta}$$

Efectuando, obtenemos

$$(\operatorname{sen}\theta-\cos\theta)=\frac{-(\operatorname{sen}\theta+\cos\theta)(\operatorname{sen}\theta-\cos\theta)}{\operatorname{sen}\theta\cos\theta}$$

De donde $\operatorname{sen}\theta-\cos\theta=0$ ...(3)

o también $1=-\left(\dfrac{\operatorname{sen}\theta+\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta\cos\theta}\right)$ ...(4)

De (3) $\operatorname{sen}\theta=\cos\theta\Rightarrow\tan\theta=1$; $\theta=45°+360°K$; $K\in\mathbb{Z}$ ...(5)

Reemplazando (5) en (2)

$$S=\sqrt{\operatorname{sen}(360°K+45°)\cos(360°K+45°)}$$

Reduciendo

$$S=\sqrt{\operatorname{sen}45°\cos45°}=\sqrt{\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}}\Rightarrow S=\frac{\sqrt{2}}{2}u^2 \quad ...(6)$$

Si analizamos la condición (4)

$$\underset{(+)}{1}=-\underset{(+)}{\left(\frac{\operatorname{sen}\theta+\cos\theta}{\cos\theta\operatorname{sen}\theta}\right)}\quad ;\ (\text{porque } \theta\in IC)$$

$(+)=(-)(+)$ (lo cual no es posible)

$\therefore$ El área de dicha región es $S=\dfrac{\sqrt{2}}{2}u^2$

Problema 18

Del gráfico mostrado $BD=\frac{6\sqrt{3}}{5}$. Calcule DE si M es punto medio de BC.

Resolución

Como $\overline{BD}$ es bisectriz interior del ΔABM, utilizamos la fórmula obtenida en el ejemplo 15 de este capítulo

$$BD = \frac{2(3)\times(BM)}{3+BM}\times\cos 30°$$

$$\frac{6\sqrt{3}}{5} = \frac{6(BM)}{3+BM}\times\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$\therefore$ BM = 2 ; como BM = MC, entonces MC=2 (véase figura 6.31(b))

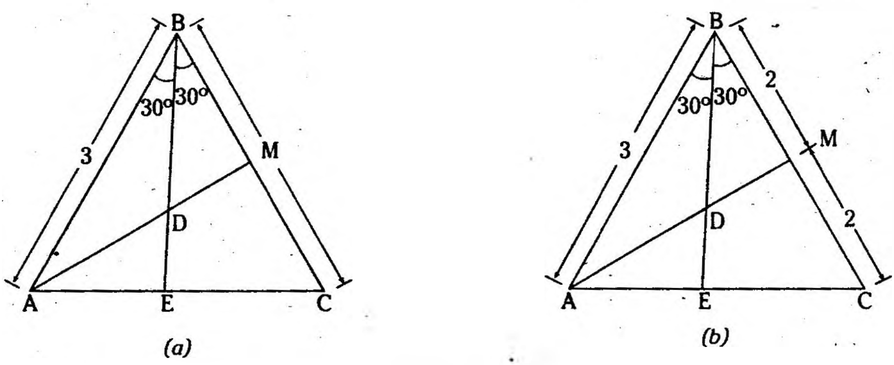


Figura 6.31

Asimismo $\overline{BE}$ es bisectriz interior del Δ ABC, y aplicando otra vez la fórmula obtenida en el ejemplo 15 de este capítulo tenemos:

$$BE=\frac{2(3)(4)}{3+4}\times\cos 30° \qquad \therefore\ BE=\frac{12\sqrt{3}}{7}, \qquad \text{Luego}\quad DE=BE-BD$$

$$\Rightarrow\ DE=\frac{12\sqrt{3}}{7}-\frac{6\sqrt{3}}{5} \qquad \therefore\ DE=\frac{18\sqrt{3}}{35}$$

Problema 19

Determine en función del circunradio y de los ángulos de un triángulo, las distancias d_a, d_b y d_c del centro de la circunferencia inscrita a los vértices.

Resolución

De la figura 6.32; d_a es la distancia del incentro al vértice A (r : inradio).

En el triángulo rectángulo ATI

$$\operatorname{sen}\frac{A}{2}=\frac{r}{d_a}\Rightarrow d_a=\frac{r}{\operatorname{sen}\frac{A}{2}}$$

$$d_a=\frac{4R\operatorname{sen}\frac{A}{2}\operatorname{sen}\frac{B}{2}\operatorname{sen}\frac{C}{2}}{\operatorname{sen}\frac{A}{2}}$$ Vea el ejemplo 10 de este capítulo

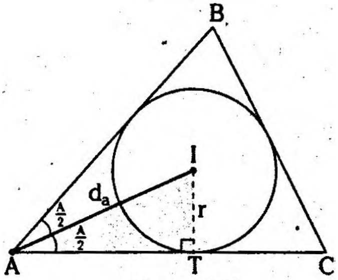


Figura 6.32

Luego $d_a=4R\operatorname{sen}\frac{B}{2}\operatorname{sen}\frac{C}{2}$

Análogamente

$$d_b=4R\operatorname{sen}\frac{A}{2}\operatorname{sen}\frac{C}{2} \quad \text{y} \quad d_c=4R\operatorname{sen}\frac{A}{2}\operatorname{sen}\frac{B}{2}$$

Problema 20

Determine en función del radio de la circunferencia circunscrita y de los ángulos de un triángulo, la distancia entre el incentro y circuncentro.

Resolución

En la figura 6.33 O es circuncentro e I es incentro del Δ ABC.

Asimismo por geometría $m\sphericalangle AOC = 2m\sphericalangle ABC = 2B$

Como el Δ AOC es isósceles se tiene

$m\sphericalangle OAC=m\sphericalangle OCA=90^\circ-B$

Además por ser I incentro, se cumple que

$$m\sphericalangle IAC=\frac{A}{2}$$

Entonces

$$m\sphericalangle IAO=\frac{A}{2}-(90^\circ-B)\ ;\ \text{pero } A+B+C=180^\circ$$

$$m\sphericalangle IAO=\frac{B-C}{2}$$

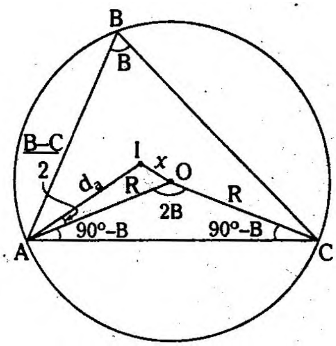


Figura 6.33

En el triángulo IAO, x es la distancia del incentro al circuncentro del ΔABC, d_a y R son la distancia del incentro al vértice A y circunradio del ΔABC, respectivamente. Por ley de cosenos tenemos

$$x^2=d_a^2+R^2-2\,d_a^2\,R\cos(m\sphericalangle IAO)$$

Pero

$$d_a=4R\operatorname{sen}\frac{B}{2}\operatorname{sen}\frac{C}{2} \quad \text{... (del problema anterior)}$$

Entonces

$$x^2=\left(4R\operatorname{sen}\frac{B}{2}\operatorname{sen}\frac{C}{2}\right)^2+R^2-2\left(4R\operatorname{sen}\frac{B}{2}\operatorname{sen}\frac{C}{2}\right)R\cos\left(\frac{B}{2}-\frac{C}{2}\right)$$

$$x^2=16R^2\operatorname{sen}^2\frac{B}{2}\operatorname{sen}^2\frac{C}{2}+R^2-8R^2\operatorname{sen}\frac{B}{2}\operatorname{sen}\frac{C}{2}\cos\left(\frac{B}{2}-\frac{C}{2}\right)$$

$$x^2=R^2+8R^2\operatorname{sen}\frac{B}{2}\operatorname{sen}\frac{C}{2}\left[2\operatorname{sen}\frac{B}{2}\operatorname{sen}\frac{C}{2}-\cos\left(\frac{B}{2}-\frac{C}{2}\right)\right]$$

$$x^2=R^2+8R^2\operatorname{sen}\frac{B}{2}\operatorname{sen}\frac{C}{2}\left[2\operatorname{sen}\frac{B}{2}\operatorname{sen}\frac{C}{2}-\left(\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}+\operatorname{sen}\frac{B}{2}\operatorname{sen}\frac{C}{2}\right)\right]$$

$$x^2=R^2-8R^2\operatorname{sen}\frac{B}{2}\operatorname{sen}\frac{C}{2}\left[\underline{\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}-\operatorname{sen}\frac{B}{2}\operatorname{sen}\frac{C}{2}}\right]$$

$$x^2=R^2-8R^2\operatorname{sen}\frac{B}{2}\operatorname{sen}\frac{C}{2}\times\underline{\cos\left(\frac{B}{2}+\frac{C}{2}\right)}$$

$$x^2=R^2-8R^2\operatorname{sen}\frac{B}{2}\operatorname{sen}\frac{C}{2}\times\operatorname{sen}\frac{A}{2}$$

$$\therefore\ \boxed{x^2=R^2\left(1-8\operatorname{sen}\frac{A}{2}\operatorname{sen}\frac{B}{2}\operatorname{sen}\frac{C}{2}\right)}$$

... Fórmula que relaciona la distancia (x) entre el incentro y circuncentro, con el circunradio y ángulo de un ΔABC

Problema 21

Exprese en función del radio del círculo circunscrito y de los ángulos de un triángulo, las distancias L_a, L_b y L_c de su ortocentro a los vértices respectivos.

Resolución

En la figura 6.34 L_a es la distancia del ortocentro al vértice A y en el triángulo rectángulo AD_2H se deduce

$$L_a = AD_2 \times \csc C \quad ...(1)$$

Pero en el triángulo rectángulo AD_2B, se cumple

$$AD_2 = c\cos A \quad ...(2)$$

Reemplazando (2) en (1) tenemos

$$L_a = c\cos A \times \csc C = 2R\,\cancel{\operatorname{sen} C}\cos A \times \frac{1}{\cancel{\operatorname{sen} C}}$$

$$\therefore\ L_a = 2R\cos A$$

Análogamente

$$\therefore L_b = 2R\cos B \qquad y \qquad \therefore L_c = 2R\cos C$$

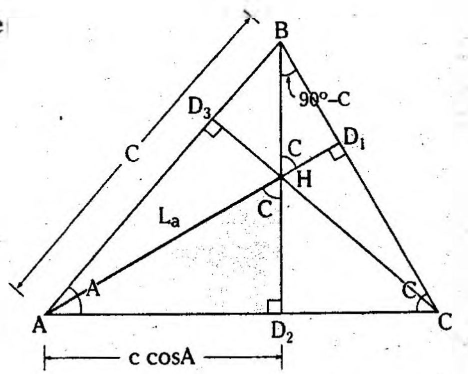


Figura 6.34

Nota

Si el ortocentro es exterior al triángulo, las fórmulas deducidas en este problema se siguen verificando.

Problema 22

Exprese en función del radio de la circunferencia circunscrita y de los ángulos de un triángulo la distancia entre su ortocentro y su circuncentro.

Resolución

En la figura 6.35 O es el circuncentro y H es el ortocentro del Δ ABC, x es la distancia entre el ortocentro y el circuncentro.

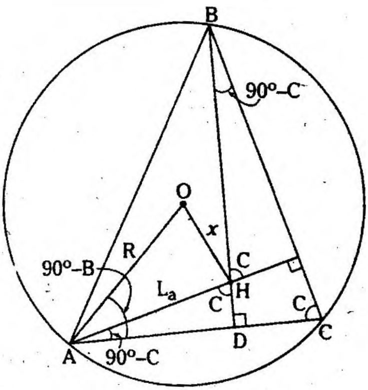


Figura 6.35

Pero

$$m\sphericalangle OAH = m\sphericalangle OAC - m\sphericalangle HAD = 90° - B - (90° - C) = C - B$$

En el Δ OAH, aplicamos ley de cosenos

$$x^2 = R^2 + L_a^2 - 2RL_a\cos(C-B) \quad ...\ (1)$$

Además

$L_a = 2R\cos A$ ... del problema anterior

Reemplazando en (1)

$$x^2 = R^2 + (2R\cos A)^2 - 2R(2R\cos A)\cos(C-B)$$

$$x^2 = R^2 + 4R^2\cos^2 A - 4R^2\cos A\cos(B-C)$$

$$x^2 = R^2 + 4R^2\cos A\,[\underbrace{\cos A}_{-\cos(B+C)} - \cos(B-C)]$$

$$x^2 = R^2 - 4R^2\cos A\,[\cos(B+C) + \cos(B-C)]$$

$$x^2 = R^2 - 4R^2\cos A\,(2\cos B\cos C)$$

$$\therefore \boxed{x^2 = R^2(1 - 8\cos A\cos B\cos C)}$$

Fórmula que relaciona la distancia entre el ortocentro y circuncentro, circuncentro y ángulos de un Δ ABC.

El lector puede aplicar un método semejante y comprobar que esta fórmula es válida también cuando el ortocentro es exterior al triángulo.

Problema 23

Demuestre que en un triángulo ABC se deben verificar

i) $\cos A\cos B\cos C \le \dfrac{1}{8}$

ii) $\operatorname{sen}\dfrac{A}{2}\operatorname{sen}\dfrac{B}{2}\operatorname{sen}\dfrac{C}{2} \le \dfrac{1}{8}$

Resolución

i) De la fórmula deducida en el problema(20)

$$x^2 = R^2(1 - 8\cos A\cos B\cos C)$$

De donde establecemos

$$1 - 8\cos A\cos B\cos C \ge 0$$

$$\therefore \cos A\cos B\cos C \le \frac{1}{8}$$

ii) De la fórmula deducida en el problema (18)

$$x^2 = R^2\left(1 - 8\operatorname{sen}\frac{A}{2}\operatorname{sen}\frac{B}{2}\operatorname{sen}\frac{C}{2}\right)$$

en forma análoga que (i) tenemos

$$\operatorname{sen}\frac{A}{2}\operatorname{sen}\frac{B}{2}\operatorname{sen}\frac{C}{2} \le \frac{1}{8}$$

Nota

En un triángulo ABC, el mayor valor que toma $\operatorname{sen}\dfrac{A}{2}\operatorname{sen}\dfrac{B}{2}\operatorname{sen}\dfrac{C}{2}$, es igual a $\dfrac{1}{8}$

Problema 24

Exprese el área del triángulo exincentral del triángulo ABC, en función del circunradio y de los ángulos del triángulo dado.

Resolución

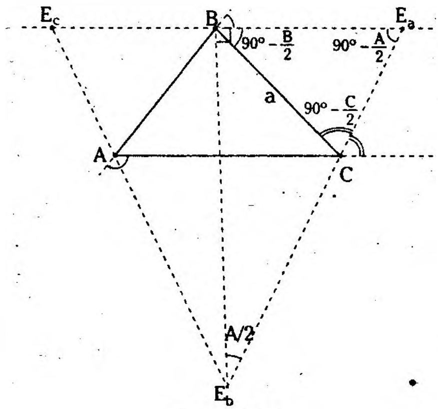


Figura 6.36

Hallando los ángulos del triángulo exincentral $E_aE_bE_c$.

$$m\sphericalangle BE_aC=\frac{B+C}{2}=90°-\frac{A}{2}$$

$$m\sphericalangle BE_CA=\frac{A+B}{2}=90°-\frac{C}{2}$$

$$m\sphericalangle AE_bC=\frac{A+C}{2}=90°-\frac{B}{2}$$

Aplicando ley de senos en $\triangle BEaC$

$$\frac{BEa}{\operatorname{sen}\left(90°-\frac{C}{2}\right)}=\frac{a}{\operatorname{sen}\left(90°-\frac{A}{2}\right)}$$

$$\frac{BEa}{\cos\frac{C}{2}}=\frac{4R\operatorname{sen}\frac{A}{2}\cancel{\cos\frac{A}{2}}}{\cancel{\cos\frac{A}{2}}}$$

$$\Rightarrow BEa=4R\operatorname{sen}\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2} \quad ...(1)$$

Análogamente

$$BE_C=4R\operatorname{sen}\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2} \quad ...(2)$$

Luego

$$E_aE_C=BE_a+BE_C \quad ...(3)$$

Sustituyendo (1) y (2) en (3)

$$E_aE_c=4R\left(\operatorname{sen}\frac{A}{2}\cos\frac{C}{2}+\operatorname{sen}\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2}\right)$$

$$E_aE_c=4R\operatorname{sen}\left(\frac{A+C}{2}\right)=4R\cos\frac{B}{2} \quad ...(4)$$

Cálculo del circunradio (R') del $\triangle E_aE_bE_c$

$$EaEc=2R'\operatorname{sen}\left(90°-\frac{B}{2}\right)=2R'\cos\frac{B}{2} \quad ...(5)$$

De (4) y (5) obtenemos R'=2R

Bien, la expresión que determina el área (S') de triángulo exincentral

$$S'=2(R')^2\operatorname{sen}\left(90°-\frac{A}{2}\right)\operatorname{sen}\left(90°-\frac{B}{2}\right)\operatorname{sen}\left(90°-\frac{C}{2}\right)$$

$$S'=2(2R)^2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$$

$$S'=8R\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$$

Problema 25

Exprese en función del radio del círculo circunscrito y de los ángulos de un triángulo ABC, el perímetro y área de su triángulo órtico o pedal.

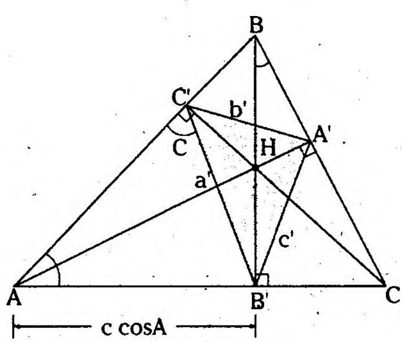


Figura 6.37

Resolución

En la figura 6.37, si trazamos las alturas y unimos los pies de estas, obtenemos el $\Delta A'B'C'$, llamado órtico o pedal. Designemos por a', b', c' a las longitudes de los lados de dicho triángulo.

Aplicando ley de senos en el $\Delta C'AB'$:

$$\frac{a'}{\text{sen}A}=\frac{c\cos A}{\text{sen}C}$$

$$\Rightarrow \frac{a'}{\text{sen}A}=\frac{2R\,\text{sen}C.\cos A}{\text{sen}C} \quad \therefore a'=R\text{sen}2A \;...(1)$$

Análogamente $b'=R\text{sen}2B$; $c'=R\text{sen}2C$

De esa manera hemos calculado los lados del triángulo órtico, sea 2p' su perímetro entonces

$$2p' = a' + b' + c'$$
$$2p' = R\text{sen}2A + R\text{sen}2B + R\text{sen}2C$$
$$2p' = R(\text{sen}2A + \text{sen}2B + \text{sen}2C)$$

como

$$A+B+C = 180^\circ \Rightarrow \text{sen}2A + \text{sen}2B + \text{sen}2C = 4\text{sen}A\text{sen}B\text{sen}C$$

(Véase página **355**)

$$\therefore \boxed{2p' = 4R\text{sen}A\text{sen}B\text{sen}C}$$

También observamos que H es el ortocentro del ΔABC y coincide con el incentro del $\Delta A'B'C'$, luego $m\sphericalangle B' = 180^\circ - 2B$

Calculamos el área de dicho triángulo (S')

$$S' = \frac{a'.c'}{2}\text{sen}B'$$

$$S' = \frac{(R\text{sen}2A)(R\text{sen}2C)\text{sen}(180^\circ - 2B)}{2}$$

$$\therefore \boxed{S' = \frac{R^2}{2}\text{sen}2A\text{sen}2B\text{sen}2C}$$

Pero también podemos observar de (1) que

$a'=R\text{sen}2A...(1)$

Además que se puede expresar como

$a'=2R'\,\text{sen}A'.........(2)$

De la figura 6.37, en el

$$\triangle AC'C,\ \frac{A'}{2}+A=90^\circ \Rightarrow A'+2A=180^\circ$$

$$\Rightarrow \text{sen}A'=\text{sen}2A....(3)$$

$$(1)=(2):\ 2R'\underbrace{\text{sen}A'}_{\text{sen}2A}=R\,\text{sen}2A;$$

(R': circunradio del triángulo órtico)

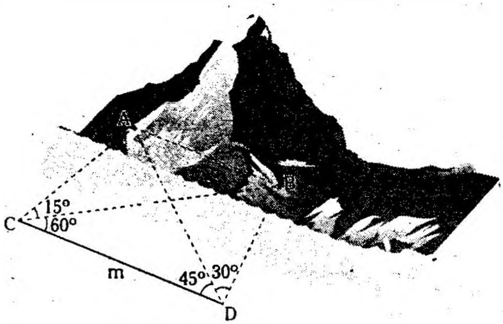
De (3)

Simplificando $\boxed{R=2R'}$

(Esta relación indica que el circunradio de todo triángulo es igual al doble del circunradio de su respectivo triángulo órtico o pedal)

Problema 26

En la figura mostrada, calcule la distancia entre los puntos A y B inaccesibles. Si se observan dichos puntos desde los puntos C y D al otro lado de la ribera; siendo CD=m.



(a)

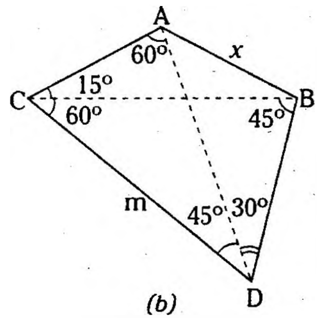
Resolución

Designemos por x a la longitud de AB, luego observamos que si calculamos la longitud de BD y AD, en el triángulo ABD es posible calcular AB.

Aplicando ley de senos en CBD

$$\frac{BD}{\text{sen}60^\circ}=\frac{m}{\text{sen}(\measuredangle CBD)}\ ;\ m\measuredangle CBD=45^\circ$$

$$\Rightarrow BD=m\frac{\text{sen}60^\circ}{\text{sen}45^\circ}\ \Rightarrow\ BD=m\frac{\sqrt{3}/2}{\sqrt{2}/2}\ \Rightarrow\ BD=m\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$$



(b)

Figura 6.38

En el ΔACD

$$\frac{AD}{\text{sen}75^\circ}=\frac{m}{\text{sen}(\measuredangle CAD)}\ ;\ m\measuredangle CAD=60^\circ$$

$$\Rightarrow AD=m\frac{\text{sen}75^\circ}{\text{sen}60^\circ}=\frac{m\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right)}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\Rightarrow AD=m\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}$$

Finalmente, aplicando ley de cosenos en el ΔADB

$$x^2=BD^2+AD^2-2BD\times AD\times\cos30^\circ$$

$$x^2=\left(m\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(m.\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}\right)^2-2.\left(m\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right)\left(m.\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}\right)\times\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$x^2=m^2\left(\frac{3}{2}+\frac{2+\sqrt{3}}{3}-\frac{3+\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$x^2=m^2.\frac{4-\sqrt{3}}{6}\qquad\therefore x=m\sqrt{\frac{4-\sqrt{3}}{6}}$$

Problema 27

Dado un cuadrilátero ABCD de lados a, b, c, d respectivamente y el ángulo que forman las diagonales. Determine el área de dicha región cuadrilátera en términos de sus lados y el ángulo α que forman sus diagonales.

Resolución

Asumiendo E, la intersección de las diagonales; además si consideramos las distancias m, n, t y r, (véase figura 6.39) para luego calcular el área de cada triángulo ABE, BEC, CED y AED; veamos:

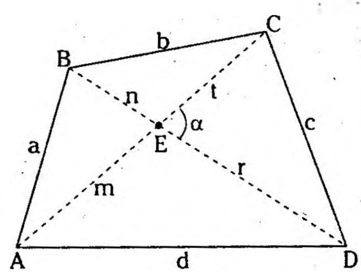


Figura 6.39

$$S_{ABCD}=\frac{1}{2}mn\,\text{sen}\alpha+\frac{1}{2}nt\,\overline{\text{sen}(180^\circ-\alpha)}^{\text{sen}\alpha}+\frac{1}{2}tr\,\text{sen}\,\alpha+\frac{1}{2}mr\,\overline{\text{sen}(180^\circ-\alpha)}^{\text{sen}\alpha}$$

$$S_{ABCD}=\frac{1}{2}\text{sen}\alpha(mn+nt+tr+mr)\quad ...(\gamma)$$

Luego, empleando ley de cosenos para cada lado del cuadrilátero

$$a^2 = m^2 + n^2 - 2mn\cos\alpha \qquad ...(1)$$

$$c^2 = t^2 + r^2 - 2tr\cos\alpha \qquad ...(2)$$

$$b^2 = n^2 + t^2 - 2nt\underbrace{\cos(180^\circ - \alpha)}_{-\cos\alpha}$$

$$b^2 = n^2 + t^2 + 2nt\cos\alpha \qquad ...(3)$$

Análogamente $d^2 = m^2 + r^2 + 2mr\cos\alpha$ ... (4)

Sumando (1) y (2): $a^2 + c^2 = m^2 + n^2 + t^2 + r^2 - 2\cos\alpha(mn + tr)$ ... (5)

Sumando (3) y (4): $b^2 + d^2 = m^2 + n^2 + t^2 + r^2 + 2\cos\alpha(nt + mr)$ ... (6)

Restando (6) y (5): $b^2 + d^2 - (a^2 + c^2) = 2\cos\alpha\,(nt + mr + mn + tr)$

$$\Rightarrow mn + nt + tr + mr = \frac{b^2 + d^2 - (a^2 + c^2)}{2\cos\alpha}$$

Sustituyendo en la expresión(γ) que determina el área del cuadrilátero

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}\operatorname{sen}\alpha\left(\frac{b^2 + d^2 - (a^2 + c^2)}{2\cos\alpha}\right)$$

$$\therefore S_{ABCD} = \frac{1}{4}\tan\alpha\left[(b^2 + d^2) - (a^2 + c^2)\right]$$

Problema 28

En un cuadrilátero inscriptible ABCD de área S, con circunradio R, simplifique la siguiente expresión

$$K = \sqrt{(ab + cd)(ac + bd)(ad + bc)}$$

Resolución

Para el cuadrilátero ABCD véase figura 6.40

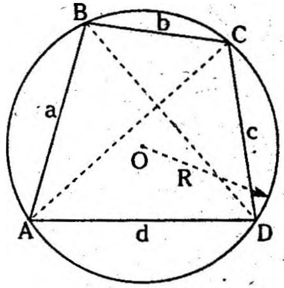


Figura 6.40

$$S = S_{ABD} + S_{BCD}$$

$$S = \frac{ad}{2}\operatorname{sen}A + \frac{bc}{2}\operatorname{sen}C$$

pero $A + C = 180^\circ \Rightarrow \operatorname{sen}A = \operatorname{sen}C$

luego $S = \left(\dfrac{ad + bc}{2}\right)\operatorname{sen}A$ ... (1)

Aplicando ley de cosenos en el Δ ABD y BCD, con el objetivo de calcular las diagonales

$$BD^2 = a^2 + d^2 - 2ad\cos A \qquad ... (2)$$

$$BD^2 = b^2 + c^2 - 2bc\underbrace{\cos C}_{-\cos A} \Rightarrow BD^2 = b^2 + c^2 + 2bc\cos A \ ... (3)$$

De las ecuaciones (2) y (3)

$$a^2 + d^2 - 2ad\cos A = b^2 + c^2 + 2bc\cos A \Rightarrow \cos A = \frac{a^2 + d^2 - b^2 - c^2}{2(ad + bc)}$$

Sustituyendo en (2)

$$BD^2 = a^2 + d^2 - \not{2}ad\left[\frac{a^2+d^2-b^2-c^2}{\not{2}(ad+bc)}\right] = \frac{bc(a^2+d^2)+ad(b^2+c^2)}{ad+bc}$$

$$BD^2 = \frac{(ab+cd)(ac+bd)}{ab+bc} \Rightarrow BD = \sqrt{\frac{(ab+cd)(ac+bd)}{ab+bc}} \quad ...(4)$$

Si aplicamos ley de senos en el Δ ABD, obtenemos $BD = 2R\text{sen}A$ ... (5)

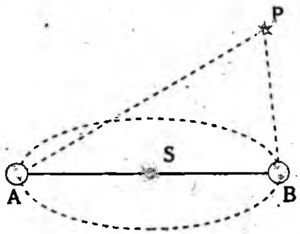
Despejando senA de (1) y sustituyendo en (4) $BD = 2R.\left(\frac{2S}{ad+bc}\right)$ ... (6)

de (4) y (6) : $\sqrt{\frac{(ab+cd)(ac+bd)}{ad+bc}} = \frac{4RS}{ad+bc}$

$$\therefore \quad K = 4RS$$

PARALAJE

Si se mira a un objeto desde dos lugares diferentes, la dirección de la visual es distinta en ambos casos. Así, por ejemplo, si un observador es colocado en A mira a un objeto P la dirección es AP. Si el observador se traslada a B, la dirección en la que se observa al objeto P es ahora BP. La diferencia entre las dos direcciones AP y BP es el ángulo APB, este ángulo recibe el nombre de *PARALAJE* de P. Si A es una posición de la Tierra en su trayectoria anual, alrededor del Sol (S) B es la posición que ocupa seis meses después (vuelve otra vez a A en un año) y P es una estrella, el ángulo APB se llama *PARALAJE ANUAL DE LA ESTRELLA*.



Problema 29

En un instante determinado el ángulo *SOL - TIERRA - ESTRELLA* de una cierta estrella es de 95°27'45" y seis meses más tarde mide 84°34'13.6". Calcule la paralaje anual de la estrella a la distancia a la que se encuentra de la Tierra en la primera posición y su distancia al Sol.

Resolución

En la figura 6.41, E representa la primera posición de la Tierra y E' la segunda, las líneas segmentadas con centro en S representa la trayectoria anual de la Tierra en su movimiento alrededor del Sol. Ilustrando los valores de los ángulos dados en E y E' respectivamente entonces

$\theta = 180° - (E + E')$

$\therefore \theta = 1,4"$

la línea EE' es una recta que pasa por el Sol y se da como EE' = 298 000 000 km.

es la distancia diámetro de la órbita de la Tierra.

Para calcular PE aplicamos la ley de senos.

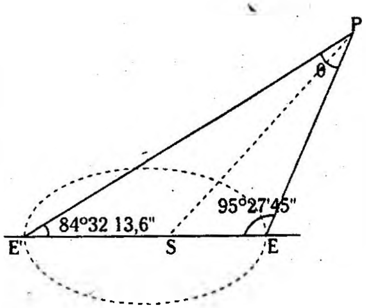


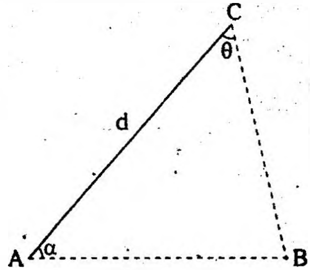
Figura 6.41

LECTURA

EL PRINCIPIO DE LA TRIANGULACIÓN

Para medir la distancia que separa a dos puntos A y B, localizados en la superficie de la Tierra, uno de los cuales B es inaccesible, se recurre a la triangulación.

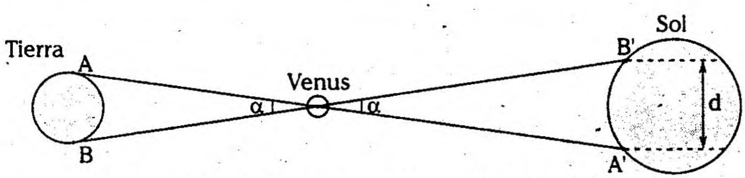
El observador marca en el suelo un tercer punto C, separado de A por una distancia conocida. Luego, apostándose en A enfoca con un teodolito hacia C y luego hacia B, anotándose el ángulo α . Repite el procedimiento desde el punto C, dando el ángulo θ del triángulo ABC se tiene tres informaciones, un lado y dos ángulos y por cálculo los trigonométricos (de la ley de senos), se puede calcular la distancia AB, la precisión del método depende de dos factores: aquella con que se midan los ángulos y la distancia AC, y el valor del ángulo B. Si éste es muy pequeño los ángulos α y θ son casi rectos.



$$\Rightarrow AB = d\,\frac{\operatorname{sen}\theta}{\operatorname{sen}\alpha}$$

Los pasajes de Venus

Medir la distancia Tierra–Sol por triangulación desde dos bases de la Tierra y aprovechando las ocasiones en que Venus se ubica entre el Sol y la Tierra. En este momento desde los puntos A y B en la Tierra a latitudes distintas verán a Venus proyectado en posiciones diferentes sobre el disco solar: para un observador el tránsito de Venus durará más tiempo que para el otro. Midiendo esos tiempos de tránsito se obtiene, sobre el disco solar, la distancia **d** entre los dos pasajes del planeta. Luego se aplica el método de triangulación, el que dará con gran precisión la distancia.



La Distancia de la Tierra al Sol alcanza los 149 597 870 km

Es innegable la utilidad de la matemática en la astronomía.
Así, por el principio de la triangulación es factible determinar la distancia Tierra - Sol.

EJERCICIOS

Resuelva los triángulos con los datos siguientes:

1. a=40, A=60°, B=45°
2. b=20, A=60°, B=70°
3. a=4, b=5, A=60°
4. b=2, c=3, B=40°
5. a=3, b=7, B=150°
6. a=8, b=10, A=30°
7. a=5, b=10, A=30°
8. a=6, b=4, C=60°
9. a=5, b=8, c=9
10. b=4, c=1, A=20°
11. a=5, b=6, c=4
12. $a = 2\sqrt{3}$, $b = 3+\sqrt{3}$, c=56

RESPUESTAS

1. $b=\dfrac{40\sqrt{6}}{3}$; $c=\dfrac{20}{3}(3\sqrt{2}+\sqrt{6})$; $C=75°$

2. $a=10\sqrt{3}\csc 70°$; $c = 20\text{sen}50°\csc 70°$; $C = 50°$

3. *No existe el triángulo*

4. $a=3\cos 40°+2(4-9\,\text{sen}^2 40°)^{1/2}$; $A=140° - \text{arcsen}\left(\dfrac{3}{2}\text{sen}40°\right)$; $C=\text{arcsen}\left(\dfrac{3}{2}\text{sen}40°\right)$

5. $c=\dfrac{\sqrt{187}-3\sqrt{3}}{2}$; $C=30°-\text{arcsen}\dfrac{3}{14}$; $A=\text{arcsen}\left(\dfrac{3}{14}\right)$

6. $B=\text{arcsen}\left(\dfrac{2}{5}\right)$; $c=4\sqrt{3}+2\sqrt{21}$; $C=150°-\text{arcsen}\left(\dfrac{2}{5}\right)$

7. $A=\text{arcsen}\left(\dfrac{1}{4}\right)$; $c=\dfrac{5}{2}(\sqrt{15}+\sqrt{3})$; $C=150°-\text{arcsen}\left(\dfrac{1}{4}\right)$

8. $c=\sqrt{28}$; $A=\text{arcsen}(3\sqrt{3})$; $B=\text{arcsen}\left(\dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{28}}\right)$

9. $A=\arccos\left(\dfrac{5}{6}\right)$; $B=\arccos\left(\dfrac{7}{15}\right)$; $C=\text{arcos}\left(\dfrac{1}{10}\right)$

10. $a=5$; $B=\text{arcsen}\dfrac{2\sqrt{3}}{5}$; $C=\text{arcsen}\dfrac{\sqrt{3}}{10}$

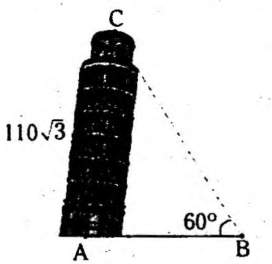
11. $A=\arccos\left(\dfrac{9}{16}\right)$; $B=\arccos\left(\dfrac{1}{8}\right)$; $C=\arccos\left(\dfrac{3}{4}\right)$

12. A=45°; B=105°; C=30°

Problemas Propuestos

1. La famosa Torre inclinada de Pisa tenía originalmente $110\sqrt{3}$ pies de altura. Desde un punto situado a $80+30\sqrt{19}$ pies de la base de la torre, se encuentra que el ángulo de elevación de la parte más alta de la torre es de 60°. Encuentre la altura de dicha torre.

A) $82,25\sqrt{3}$ pies
B) $80\sqrt{3}$pies
C) 82,25 pies
D) $20\sqrt{3}$ pies
E) $90\sqrt{3}$ pies



2. La estación de guardacostas A está localizada a 120 millas al oeste de la estación B. Un barco envía una llamada SOS de auxilio desde el mar, y la reciben ambas estaciones. La llamada a la estación A indica que el barco está a 40° al norte del este. La llamada a la estación B indica que el barco está a 30° al norte del oeste. ¿A qué distancia de la estación A se encuentra el barco en mención?

A) $110\sqrt{3}$ csc70° millas
B) $100\sqrt{3}$ millas
C) $80\sqrt{3}$ millas
D) 200 millas
E) 150 millas

3. En un triángulo ABC se tiene que $m\sphericalangle A = 80°$, se traza la ceviana BP, (P en AC) tal que : $m\sphericalangle PBC = 10°$, además AB = PC. Calcule $m\sphericalangle BCP$.

A) 10° B) 20° C) 30°
D) 40° E) 50°

4. En un triángulo ABC se tiene que:

$$\frac{\cos A}{a}+\frac{\cos B}{b}+\frac{\cos C}{c}=\frac{a^2+b^2+c^2}{R^3}$$

Encuentre el equivalente de senAsenBsenC

A) $\frac{1}{4}$ B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{1}{3}$
D) $\frac{1}{8}$ E) $\frac{1}{6}$

5. En un triángulo ABC se conoce

$$\frac{b}{c}+\frac{c}{a}=\sqrt{2} \quad ; \quad B-C=90°$$

Calcule $2\tan A\cos(B+C)$

A) $-\sqrt{3}$ B) $-\sqrt{2}$ C) -2
D) -3 E) $-2\sqrt{2}$

6. En un triángulo ABC simplifique

$$M=(a+b)^2(1-\cos C)+(a-b)^2(1+\cos C)$$

A) $2c^2$ B) $2a^2$ C) $3b^2$
D) $2b^2$ E) c^2

7. En un triángulo los lados son números enteros impares consecutivos. La suma de dos ángulos es 60°. Calcule el área de dicha región triangular.

A) $\frac{15\sqrt{3}}{4}$ B) $3\sqrt{3}$ C) $4\sqrt{3}$
D) $5\sqrt{3}$ E) $2\sqrt{3}$

8. Los catetos de un triángulo rectángulo son: AB = 3 cm y BC = 4 cm; el triángulo gira 60° alrededor de AB. Calcule el ángulo que forman la posición inicial y la posición final de la hipotenusa AC.

A) $\arccos\left(\frac{5}{7}\right)$ B) 30° C) 16°
D) $\arccos\left(\frac{17}{25}\right)$ E) 18°

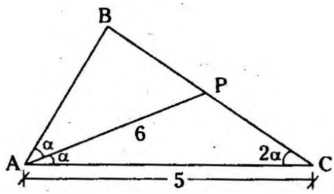
9. En un triángulo ABC, reduzca la expresión:

$$Q=a[\text{sen}(A+C)-\text{sen}C]+b[\text{sen}C-\text{sen}A]$$
$$+\ c[\text{sen}A-\text{sen}(A+C)]$$

A) 0 B) 1 C) 2
D) –1 E) –2

10. Del gráfico mostrado, calcule la longitud del segmento AB.

A) 20
B) 12
C) 16
D) 15
E) 10



11. En un triángulo ABC, se cumple
B=0,25a,
C=120°
Determine el valor de tan (A – B)

A) $\frac{5\sqrt{3}}{11}$ B) $2\sqrt{3}$ C) $3\sqrt{3}$

D) $\frac{3\sqrt{3}}{7}$ E) $3\sqrt{2}$

12. En un triángulo ABC, se cumple
$2a^2+3b^2=7ab\ \wedge C=30°$.

Calcule $\tan\left(\frac{A-B}{2}\right)$; siendo A>B

A) $\frac{1}{2}(2+\sqrt{3})$ B) $\frac{\sqrt{3}+1}{2}$ C) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

D) $2\sqrt{3}$ E) $\sqrt{3}+3$

13. En un triángulo ABC, se cumple

$$a\cos^2\frac{C}{2}+c\cos^2\frac{A}{2}=kb$$

Halle el valor de k para que sus lados estén en progresión aritmética. Además A<B<C.

A) $\frac{2}{3}$ B) $\frac{3}{2}$ C) $\frac{2}{5}$

D) 2 E) 3

14. Dado el triángulo ABC, halle el equivalente de

$$E=\frac{a-c\cos B}{R\text{sen}B}+\frac{b-a\cos C}{R\text{sen}C}+\frac{c-b\cos A}{R\text{sen}A}-2$$

R: circunradio del triángulo ABC

A) $8\text{sen}\frac{A}{2}\text{sen}\frac{B}{2}\text{sen}\frac{C}{2}$

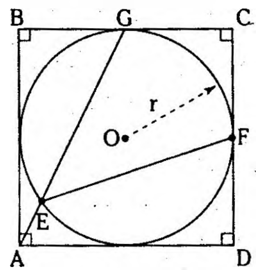
B) 8senAsenBsenC

C) 4senAsenBsenC

D) 4cosAcosBcosC

E) $8\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$

15. Del gráfico, halle el valor de EF si r = 1. ABCD es un cuadrado. F y G son puntos de tangencia.



A) $\frac{3\sqrt{10}}{5}$ B) $\frac{\sqrt{10}}{3}$ C) $\frac{2\sqrt{5}}{3}$

D) $\frac{3\sqrt{7}}{7}$ E) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$

16. Para generar un terreno, la dirección de la alineación PQ que une dos puntos que no son visibles, el uno desde el otro, se toman otros dos puntos A y B (a un mismo lado de la recta PQ) tales que desde A se pueden ver B, P y Q y desde B se ven A, P y Q. Se miden los

ángulos $\alpha_1 = BAQ$, $\alpha_2 = BAP$, $\beta_1 = ABP$ y $\beta_2 = ABQ$ se pide hallar sen*x*/sen*y*; si *x*=AQP e *y*=BPQ.

A) $\dfrac{\operatorname{sen}\beta_1 \operatorname{sen}(\alpha_2-\alpha_1)\operatorname{sen}(\alpha_1+\beta_2)}{\operatorname{sen}\alpha_1 \operatorname{sen}(\beta_2-\beta_1)\operatorname{sen}(\alpha_2+\beta_1)}$

B) $\dfrac{\operatorname{sen}\beta_2 \operatorname{sen}(\alpha_1-\alpha_2)\operatorname{sen}(\alpha_1+\beta_1)}{\operatorname{sen}\alpha_2 \operatorname{sen}(\beta_1-\beta_2)\operatorname{sen}(\alpha_2+\beta_2)}$

C) $\dfrac{\operatorname{sen}\beta_1 \operatorname{sen}(\alpha_2+\alpha_1)\operatorname{sen}(\alpha_1+\alpha_2)}{\operatorname{sen}\alpha_2 \operatorname{sen}(\beta_2+\beta_1)\operatorname{sen}(\alpha_2+\beta_1)}$

D) $\dfrac{\operatorname{sen}\beta_2 \operatorname{sen}(\alpha_2-\alpha_1)\operatorname{sen}(\alpha_1+\beta_2)}{\operatorname{sen}\alpha_2 \operatorname{sen}(\beta_2+\beta_1)\operatorname{sen}(\alpha_2+\beta_1)}$

E) $\dfrac{\operatorname{sen}\beta_2 \operatorname{sen}\alpha_1 \operatorname{sen}(\alpha_1+\beta_2)}{\operatorname{sen}\alpha_2 \operatorname{sen}\beta_1 \operatorname{sen}(\beta_1+\alpha_2)}$

17. En un triángulo ABC, el ángulo A mide 60° y la altura trazada por este vértice mide $\dfrac{15\sqrt{57}}{38}$ cm

Halle la suma de las longitudes AB y AC si el lado BC mide $\sqrt{19}$ cm.

A) 9 cm B) 12 cm C) 20 cm
D) 25 cm E) 8 cm

18. Dos lados de un triángulo son números enteros y consecutivos, forman entre sí un ángulo de 120° y su tercer lado mide $\sqrt{37}$. Calcule el valor de su bisectriz interior relativa al lado de medida $\sqrt{37}$.

A) $\dfrac{21}{7}$ B) $\dfrac{12}{7}$ C) $\dfrac{13}{7}$
D) 2 E) 3

19. En un triángulo ABC se traza la bisectriz interior AD la cual forma con el lado BC un ángulo de 60°, sabiendo además que b+c=3AD. Encuentre los valores de los ángulos de dicho triángulo, donde a, b, c son las longitudes de los lados BC, AC y AB respectivamente.

A) 72°, 24°, 84° B) 72°, 28°, 80°
C) 50°, 60°, 70°
D) 60°, 30°, 90° E) 45°, 55°, 80°

20. Si ABCDEF es un hexágono convexo de perímetro 2p tal que AB//DE BC//EF y CD//FA, si R_A, R_C y R_E son circunradios de los triángulos FAB, BCD y DEF respectivamente.. Luego la relación correcta es:

A) $R_A + 2R_B \geq p - R_C$
B) $R_A + R_B + R_C \geq 2p$
C) $R_A + R_B + R_C \geq \dfrac{3p}{2}$
D) $R_A + R_C + R_E \geq p$
E) $R_A + R_C \geq R_E + p$

21. En un triángulo ABC, si tomamos un punto D sobre el lado AC, tal que $m\measuredangle ABD = m\measuredangle DCB = \beta$; si además CD=BA. Halle la medida del ángulo DBC. Considere

$\arctan\left(\dfrac{\sqrt{15}}{3}\right) = 52°$

A) 23° B) 83° C) 43°
D) 77° E) 63°

22. Sea ABCD un cuadrilátero inscriptible que tiene por lados AB=a; BC=b; CD=c; AD=d, halle $\cos\dfrac{A}{2}$ en términos del semiperímetro p y los lados a, b, c y d.

A) $\sqrt{\dfrac{(p-a)(p-d)}{ad+bc}}$ B) $\sqrt{\dfrac{(p-b)(p-c)}{ad+bc}}$

C) $\sqrt{\dfrac{ab+cd}{(p-a)(p-b)}}$

D) $\sqrt{\dfrac{ab+cd}{(p-b)(p-c)}}$ E) $\sqrt{\dfrac{(p-a)(p-b)}{(p-c)(p-d)}}$

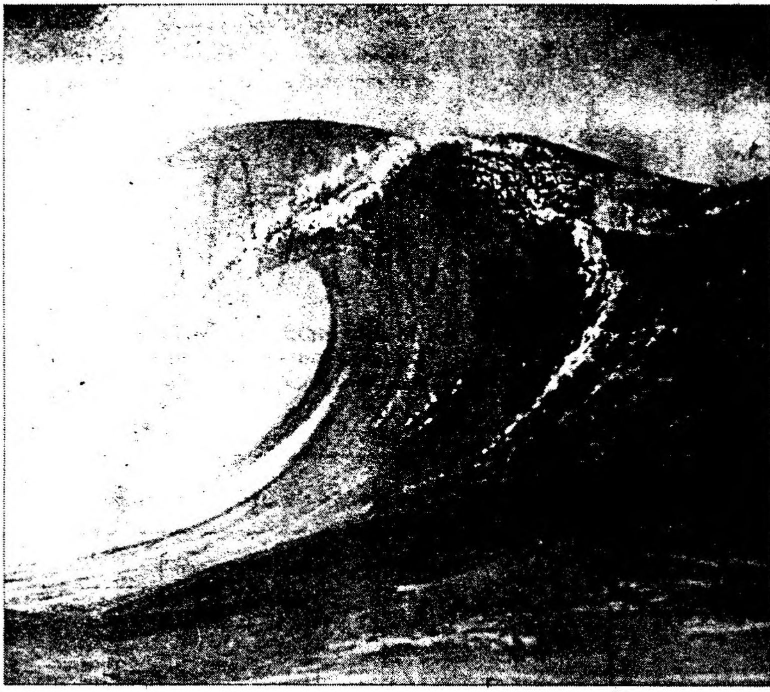
Pregunta	Clave	Pregunta	Clave	Pregunta	Clave
1	B	8	D	16	A
2	A	9	A	17	E
3	B	10	A	18	B
4	E	11	A	19	A
5	A	12	A	20	D
6	A	13	B	21	B
7	A	14	A	22	B
		15	A		

Claves

CAPÍTULO

VII

Funciones trigonométricas



Fenómenos físicos y funciones trigonométricas

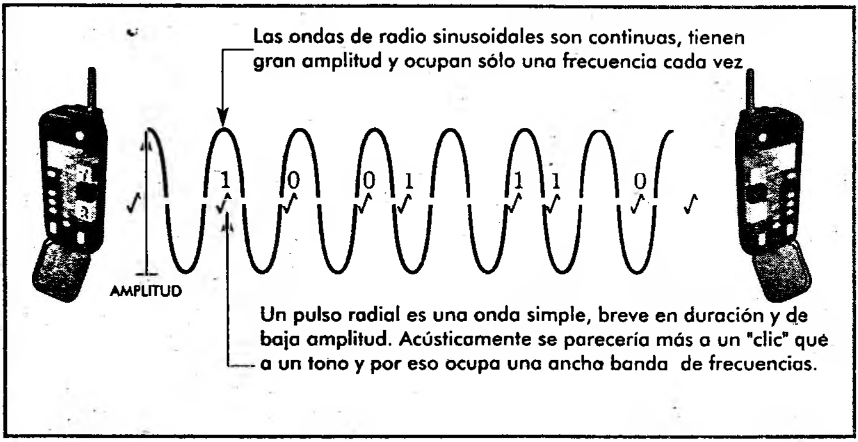
La mayoría de fenómenos físicos son eventos periódicos, por ello se les puede modelar matemáticamente, mediante las funciones trigonométricas, dado que la característica principal es su periodicidad. El sonido de una cascada o de las olas del mar poseen un timbre característico, en esos sonidos compuestos hay infinidad de frecuencias.

LECTURA

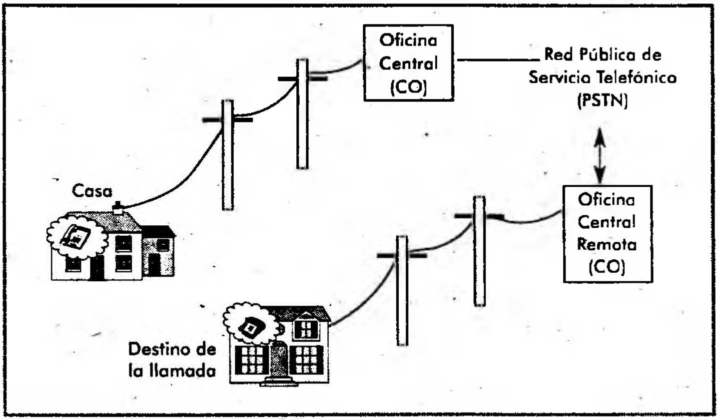
TELECOMUNICACIONES Y FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

Una de las aplicaciones de las funciones trigonométricas está dado en las **comunicaciones inalámbricas**; como las que se usan en los equipos cotidianos que trasmiten datos digitales como los teléfonos celulares incluyendo los de las redes locales que enlazan las computadoras con otros equipos electrónicos. Las transmisiones de radio son sinusoidales, es decir, ondas en forma de seno, las cuales serán estudiadas y analizadas matemáticamente.

Un esquema de lo expuesto se muestra a continuación



Lo mismo se aprecia en **teléfonos de uso doméstico**



Funciones trigonométricas

OBJETIVOS

- Comprender la teoría de funciones y su aplicación en nuestra vida cotidiana.
- Analizar y conocer el dominio, rango y regla de correspondencia de una función.
- Interpretar la gráfica de una función.
- Identificar el crecimiento, decrecimiento, continuidad y discontinuidad de una función.
- Reconocer las funciones par, impar y periódica; inyectiva, sobreyectiva y biyectiva.
- Analizar las funciones trigonométricas fundamentales para la resolución de ecuaciones trigonométricas.

INTRODUCCIÓN

El término matemático función se remonta a finales del siglo XVII, cuando el cálculo se encontraba en sus primeras etapas de desarrollo. Este concepto es ahora fundamental en los cursos avanzados de matemática, y es indispensable en todos los campos de la ciencia.

En el desarrollo de la teoría de funciones se utiliza con mucha frecuencia la palabra dependencia. Ejemplos de dependencia lo podemos percibir cotidianamente:
"El área de un círculo depende del radio que lo define" (Véase figura 7.1).
"La distancia recorrida por un móvil depende del tiempo transcurrido a partir del instante en que parte de un punto dado, así como también de otros factores".
"El volumen de un cilindro recto depende del radio de su base y la altura".
"El precio de venta de cierto producto depende del costo de la mano de obra, precio de las materias primas, así como también de otros factores".

En el presente capítulo daremos mayor importancia a las funciones que dependen de una sola variable, por ser las de mayor uso; aun en los primeros años de estudios universitarios.

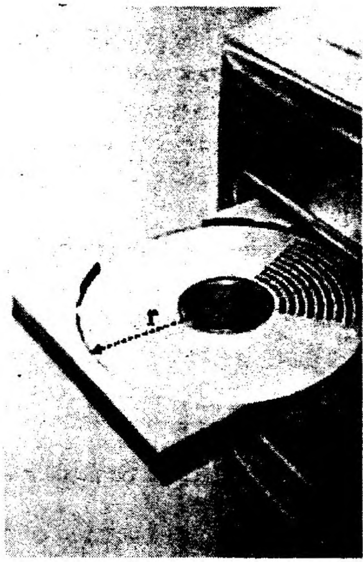


Figura 7.1
El área del CD mostrado es igual a

FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS DIRECTAS

En el estudio de las funciones trigonométricas directas observamos que su propiedad fundamental es la periodicidad, ya que es un instrumento matemático para describir todos los fenómenos periódicos como los latidos del corazón (mediante el electrocardiograma) y las ondas sonoras. La mayoría de animales obtienen información del medio ambiente que los rodea detectando algunos tipos de ondas, y se comunican entre sí, produciendo otros tipos de ondas; por ejemplo, el hombre detecta la frecuencia de la luz y el sonido, con los oídos, y la radiación infrarroja con la piel.

Si bien es cierto, hasta el momento se ha mencionado la dependencia de ciertos fenómenos reales, pero debe entenderse que aquello puede ser representado mediante una ecuación matemática, también denominada **regla de correspondencia.**

$$y = f(x) \quad ... (1)$$

Esta representación indica que la función depende de una única variable representada por x, la cual se lee como: y en función de x o y depende de x. A x se le denomina **variable independiente**, mientras que a y se le denomina **variable dependiente** o función de x. Para el uso de las funciones trigonométricas, que es motivo de nuestro estudio, a x se le denominará indistintamente **variable independiente** o **argumento** y a y **variable dependiente** o **función del argumento**.

En esta regla de correspondencia (1) se cumple que para cada valor de la variable independiente(x) le corresponde uno y solo un valor a la variable dependiente (y). A continuación citamos algunos ejemplos aplicativos mencionados en las páginas siguientes, para ello se sugiere prestar la atención necesaria puesto que estos ejemplos nos ilustran la relación que hay entre fenómenos reales y entes abstractos a través de su representación en forma matemática.

Ejemplo

El crecimiento de un feto de más de dos semanas se puede calcular mediante la fórmula $y = 1{,}53x - 6{,}7$

En la cual y es la longitud en cm y x es la edad en semanas del feto.

Para $x = 16$ semanas, entonces $y = 17{,}78$ cm

Para $x = 30$ semanas, entonces $y = 39{,}2$ cm

y así sucesivamente.

Nótese que para cada número de semanas x le corresponde al feto una única longitud y.

Una de las personas que contribuyó al desarrollo de la teoría de funciones, específicamente "Concebir que una función se podía representar gráficamente", fue René Descartes. A continuación citamos una sucinta reseña histórica.

Nota Histórica

El hecho de considerar una variable como función de otra variable no es una idea reciente. Dos siglos antes de nuestra era, el astrónomo griego Hiparco elaboró una tabla en la que se daban los valores de las cuerdas correspondientes a varios arcos de circunferencia con el fin de facilitar los cálculos para localizar los astros. Por espacio de muchos siglos, fueron frecuentes en los libros de matemática las tablas que daban para determinados valores de una magnitud variable los valores correspondientes de otra magnitud correspondiente de la primera. Las tablas más comunes de este tipo eran las trigonométricas y las logarítmicas.

En el siglo XVII, René Descartes descubrió que era posible "visualizar" las correspondencias entre las magnitudes de tales tablas mediante una representación geométrica. Parece ser que fue el 10 de noviembre de 1619 la fecha que tuvo esta idea a la vez simple y genial; es decir, empleó únicamente un eje X y no se refirió para nada a un eje Y. De cada valor de X calculaba el correspondiente valor de Y mediante la ecuación, obteniendo de esta forma las coordenadas de X e Y. Evidentemente el uso de los ejes no es una necesidad, sino una conveniencia.

Anotamos también que F. Engels dijo: "El punto de viraje de la matemática fue la variable de Descartes. Gracias a esto se introdujo en la matemática el movimiento y con él la dialéctica, merced a lo cual surgió la inmediata necesidad del cálculo diferencial e integral, que comienza inmediatamente a partir de entonces y que Newton y Leibniz en general, perfeccionaron, pero no inventaron".



René Descartes

A continuación empezaremos el desarrollo teórico del presente capítulo con el primer punto.

NOCIÓN DE FUNCIÓN

Una función f de un conjunto **A** en otro **B**, donde A y B diferentes del vacío, es la correspondencia que asigna a cada elemento x de A un único elemento y de **B**. Al conjunto de todos los valores posibles de $x \in$ A se llama **dominio de definición o existencia** cuya notación es **Domf** o **Df** y al conjunto de todos los valores de $y \in$ **B** se llama **contradominio o variación de la función** (comúnmente conocido como rango) con notación **Ranf** o **Rf**. No todo elemento de **B** es rango de la función, véase figura 7.2

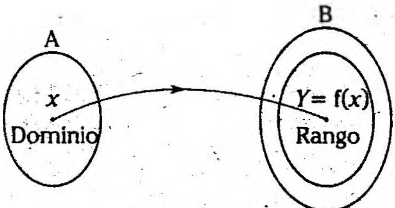


Figura 7.2

Supongamos que sobre cierto conjunto A está definida una función f(x); entonces el valor de esta función, correspondiente a cierto valor del dominio x_0 se designará f(x_0).

Por ejemplo $f(x) = x^3 - 1$

Entonces $f(-1) = (-1)^3 - 1 = -2$, $f(3) = (3)^3 - 1 = 26$

Ahora sí tenemos una función definida para la ecuación $y = x^2$

La tabla 1 muestra los valores de y asignados a valores específicos de x y la figura 7.3 visualiza la correspondencia de los números de esta tabla (nótese que para cualquier valor real de x le corresponde un único valor de y).

x	$y=x^2$
−1	1
−1/2	1/4
0	0
1/2	1/4
2	4
$\sqrt{2}$	2

Tabla 1

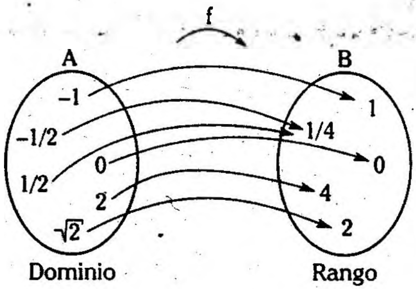


Figura 7.3

Podemos considerar una función como *un conjunto de pares ordenados (x; y) en los que no existen dos pares ordenados diferentes que tengan el mismo primer elemento.*

Así del ejemplo anterior los pares ordenados de la función definida por la ecuación $y = x^2$, son $\{(-1; 1), (-1/2; 1/4), (0; 0), (1/2; 1/4), (2; 4), (\sqrt{2}; 2)\}$ claro está que hay un número ilimitado de pares ordenados en esta función, algunos otros son (2; 4), (−2; 4), (5; 25), $(\sqrt{3}; 3)$...etc

A continuación mostramos una aplicación que nos permite entender un poco más el concepto de una función.

Aplicación

Sea A el conjunto de todos los autos operativos en la ciudad de Lima y B el conjunto de todas las placas de dichos autos, se deduce que a cada elemento de A le corresponde un único elemento de B. No tendría sentido que a un elemento de A le correspondan dos elementos de B (o sea un auto con dos placas diferentes).



Regla de Correspondencia

Es la representación formal (matemática) de la relación que existe entre la variable o variables independientes con la variable dependiente. Según lo anterior su representación será:

$$\underbrace{y}_{\text{Variable dependiente}} = f(\underbrace{x_1; x_2; x_3; x_4; \ldots; x_n}_{\text{n variables}})$$

De donde se obtiene la siguiente regla de correspondencia

i) $y = f(x)$; si x e $y \in \mathbb{R}$ se le denomina función real (y) de variable real (x).

f es la función y f(x) es la función evaluada en x.

Pero como usted debe entender, existen funciones con más de una variable independiente cuyas reglas de correspondencia son de la forma

ii) $Z = f(x;y)$: Representa una función de dos variables x e y con variable dependiente z.

iii) $w = f(x; y; z)$: Representa una función de tres variables x, y, z con variable dependiente w.
etc...

Nota

Respecto a las funciones de una o más variables podemos notar.

$y = f(x)$: Su dominio es un conjunto de números reales o un intervalo de valores en el eje X.

$z = f(x; y)$ Su dominio es un conjunto de pares ordenados o una región en el plano xy.

$w = f(x;y;z)$ Su dominio es un conjunto de ternas ordenadas o una superficie en el espacio xyz.

A continuación mostramos algunos ejemplos al respecto.

Ejemplo 1

La función $f(x)=x^2$ tiene una sola variable independiente x.

Su dominio es el conjunto de todos los números reales $(x \in \mathbb{R})$.

Su rango lo forma el conjunto de los valores de $f(x)$ (variable dependiente), los cuales son todos los valores no negativos, es decir $\text{Ranf} \in [0;+\infty\rangle$. Evaluando para algunos valores de x se tendría

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}$$

$$f(-1)=(-1)^2=1 \quad \Rightarrow \quad f(-1)=1$$

$$f(4) = (4)^2=16 \quad \Rightarrow \quad f(4)=16$$

Ejemplo 2

La función $f(x;y)=|x|+|y|$ tiene dos variables independientes x e y, el dominio de esta función es el conjunto de pares $(x;y)$ con $x, y \in \mathbb{R}$ y el rango es el conjunto de valores de $f(x;y)$ (variable dependiente), para esta función, sus valores son los no negativos, es decir $\text{Ran } f=[0;+\infty\rangle$, evaluando para algunos valores de x e y se tiene:

- $f(-1;2)=|-1|+|2|=3$
- $f\left(1;\frac{1}{2}\right)=|1|+\left|\frac{1}{2}\right|=\frac{3}{2}$, etc.

Un ejemplo real de una función de dos variables sería aquella con la cual, anteriormente, se enfrentaban los alumnos postulantes a la Universidad Nacional de Ingeniería (UNI) como es su nota final de examen de admisión.

Aplicación

Sea **I** la nota de examen de admisión de un postulante a la UNI (Universidad Nacional de Ingeniería), en la actualidad (agosto 2002), el valor de esta nota depende de dos variables como son la nota promedio de examen A y la nota del colegio B. La correspondencia entre las variables queda así:

$$I(A;B)=0{,}9A+0{,}1B$$

Si la nota promedio de un postulante es 16,745 y la nota de colegio es 14,234, entonces para obtener la nota de examen de admisión se procedería de la forma siguiente

Identificando $A=16{,}745$ y $B=14{,}234$

Luego $I(16{,}745;\ 14{,}234)=0{,}9(16{,}745)+0{,}1(14{,}234)$

De donde la nota **I** de ingreso que obtendría el postulante sería $I=16{,}493$.

De ahora en adelante nos abocaremos al estudio de aquellas funciones reales de una sola variable real ($y=f(x)$), aunque también se analizarán funciones con más de una variable.

Gráfica de Funciones

La gráfica de una función es el conjunto de todos los puntos $(x; y)$ en el plano cartesiano cuyas coordenadas satisfacen la ecuación $y = f(x)$.

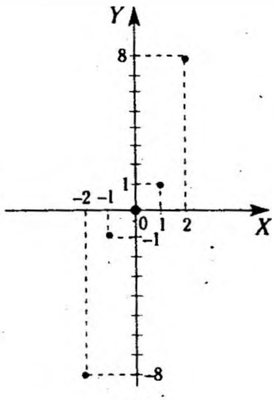
Ejemplo 1
Grafique la función definida en $y = x^3$

Resolución
El dominio de esta función son todos los números reales. En la tabla 2 listamos cinco parejas ordenadas de la función. (Los valores del dominio se escogieron enteros de manera que los correspondientes valores de la imagen fueran fáciles de calcular).

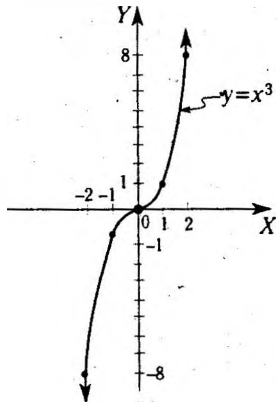
x	−2	−1	0	1	2
y	−8	−1	0	1	8

Tabla 2

Luego marcamos las cinco parejas ordenadas en el plano cartesiano, tal como se muestran en la figura 7.4(a). La curva resultante de la figura 7.4(b) sólo es una aproximación a la gráfica real de la función. Entre más puntos marquemos más exactitud tendremos en la curva resultante.



(a)



(b)

Figura 7.4

Ejemplo 2
Grafique la función $y = 3x + 4$

Resolución
El dominio consiste en todos los números reales. A continuación escogemos algunos valores convenientes para x y calculamos los correspondientes valores de y.

x	−1	0	1/3	1
y	1	4	5	7

Tabla 3

En la figura 7.5, se ha marcado las parejas ordenadas y al unir estos puntos mediante una curva suave o lisa, la gráfica resulta ser una línea recta.

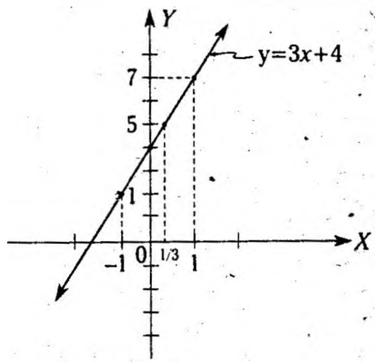


Figura 7.5

A continuación, se tiene la gráfica de algunas funciones de uso frecuente.

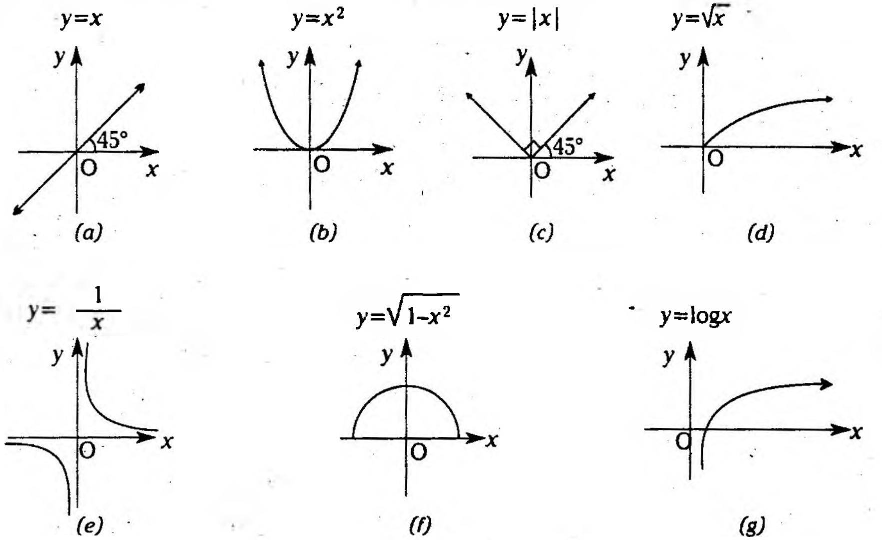


Figura 7.6

Nota

Si la gráfica de una función $y = f(x)$ se dibuja con precisión, usualmente es posible ver el dominio y el rango de f. (Véase figura 7.7). Nótese que el dominio de f es algún intervalo u otro conjunto de números reales en el eje X (se proyecta la gráfica de f sobre el eje X), y el rango de f es algún intervalo u otro conjunto de números reales en el eje Y (se proyecta la gráfica de f sobre el eje Y).

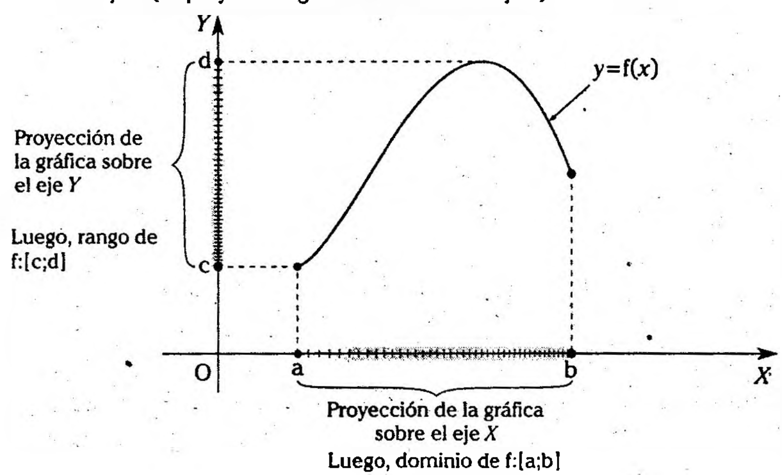


Figura 7.7

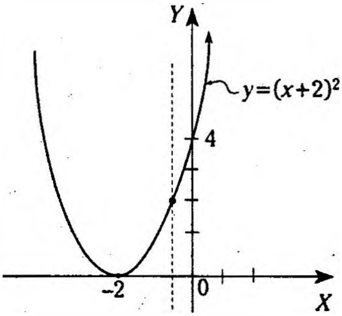
Prueba de la Recta Vertical para una Función de la Forma $y = f(x)$

Por la definición de una función sabemos que por cada x en el dominio de f corresponde un valor único $f(x)$ en el rango. Esto significa que cualquier recta vertical que intersecte la gráfica de f puede hacerlo como máximo en un punto. Y viceversa, si cada recta vertical intersecta la gráfica de una relación por lo menos en un punto, entonces la relación es una función.

Ejemplo

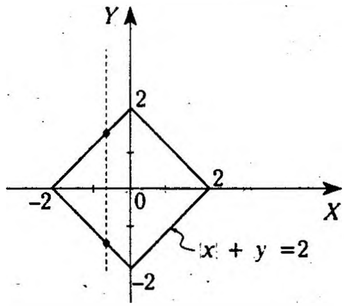
I. En la figura 7.8(a) vemos que cualquier recta vertical intersecta la gráfica de la relación definida por $y=(x+2)^2$, en máximo un punto. Por lo tanto, la relación determina una función $y=f(x)$.

II. Como la muestra de la figura 7.8(b), una recta vertical puede intersectar la gráfica de la relación definida por $|x|+|y|=2$, en más de un punto. Por lo tanto, la relación no determina una función $y=f(x)$.



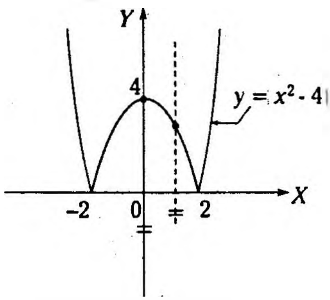
(a) Gráfica de una función

(Porque toda línea vertical la corta a lo más en un punto)



(b) No es la gráfica de una función

(Porque presenta dos puntos de corte)



(c) Gráfica de una función

(Porque presenta un solo punto de corte)

Figura 7.8

Construcción de Gráficas de Funciones a partir de Gráficas de Funciones Conocidas

A continuación se muestra un conjunto de reglas que le ayudarán a realizar u obtener gráficas a partir de gráficas conocidas como son una parábola, una recta, una senoide, etc.; para ello le sugerimos que siga con atención cada una de las reglas, así como sus ejemplos respectivos.

Regla 1

La gráfica de la función $y=f(x)+c$ se obtiene a partir de la gráfica de la función $y=f(x)$ mediante el desplazamiento de ésta a lo largo del eje Y, **c** unidades hacia arriba si $c>0$, ó $|c|$ unidades hacia abajo si $c<0$.

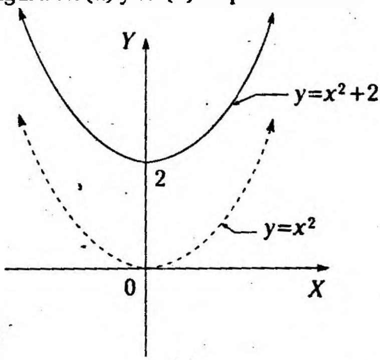
Ejemplo 1

Grafique las siguientes funciones

a) $y=x^2+2$ b) $y=x^3-\sqrt{2}$

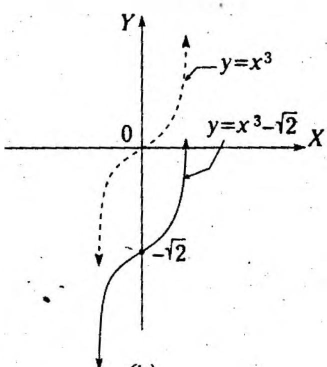
Resolución

Las gráficas de las funciones dadas están construidas en las figura 7.9(a) y 7.9(b) respectivamente.



(a)

(La gráfica $y=x^2+2$ está 2 unidades arriba de la gráfica de $y=x^2$.)



(b)

(La gráfica $y=x^3-\sqrt{2}$ está $\sqrt{2}$ unidades abajo de la gráfica de $y=x^3$.)

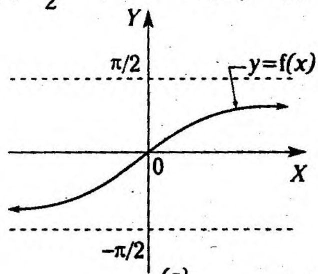
Figura 7.9

Ejemplo 2

En la figura 7.10(a) se tiene la gráfica de $y=f(x)$

Grafíquese

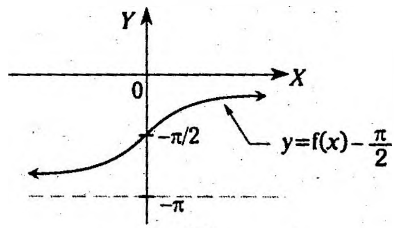
a) $y=f(x)-\dfrac{\pi}{2}$ b) $y=f(x)-\pi$



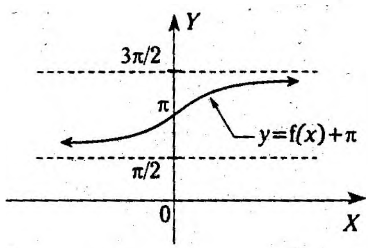
(a)

Resolución

La gráfica de la función $y=f(x)-\dfrac{\pi}{2}$ está construida en la figura 7.10(b) y la gráfica de la función $y=f(x)+\pi$ está construida en la figura 7.10(c).



(b)



(c)

Figura 7.10

Regla 2

A partir de la gráfica de la función $y=f(x)$, se obtiene la función $y=f(x-a)$, desplazando a lo largo del eje X "a" unidades hacia la derecha si $a>0$; y $|a|$ unidades hacia la izquierda si $a<0$.

Ejemplo 1

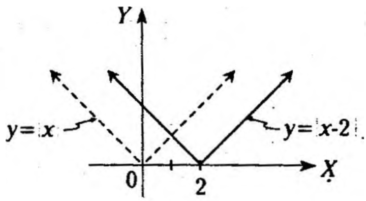
Grafique las siguientes funciones

a) $y=|x-2|$

b) $y=\dfrac{1}{x+2}$

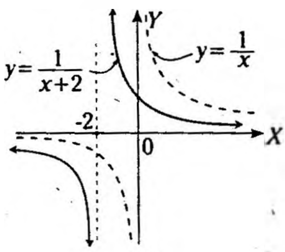
Resolución

Las gráficas de las funciones dadas están construidas en las figuras 7.11(a) y 7.11(b) respectivamente.



(a)

Nótese que la gráfica $y=|x-2|$ se encuentra 2 unidades a la derecha de la gráfica de $y=|x|$ (si $f(x)=|x| \Rightarrow f(x-2)=|x-2|$).



(b)

Figura 7.11

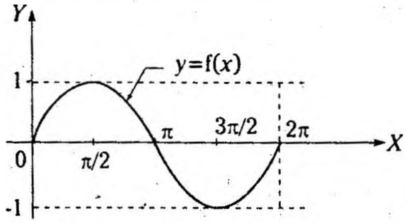
Nótese que la gráfica de $y=\dfrac{1}{x+2}$ se encuentra 2 unidades a la izquierda de la gráfica de $y=\dfrac{1}{x}$ (si $f(x)=\dfrac{1}{x} \Rightarrow f(x+2)=\dfrac{1}{x+2}$).

Ejemplo 2

En la figura 7.12(a) se tiene la gráfica de $y=f(x)$.

Grafique las funciones

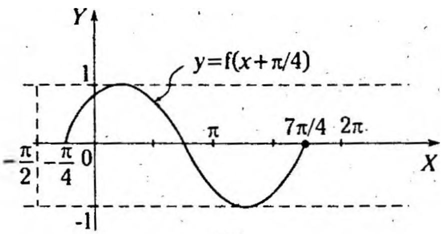
a) $y=f\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$ b) $y=f\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)$



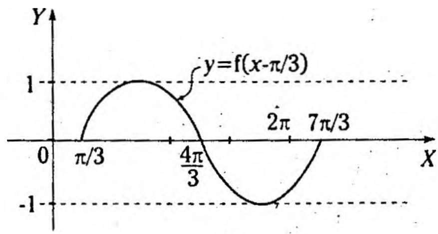
(a)

Resolución

Las gráficas de las funciones dadas en (a) y (b) están construidas en las figuras 7.12(b) y 7.12(c).



(b)



(c)

Figura 7.12

Regla 3

La gráfica de la función $y=-f(x)$ se obtiene a partir de la gráfica de la función $y=f(x)$ mediante la reflexión directa respecto al eje X.

Ejemplo 1

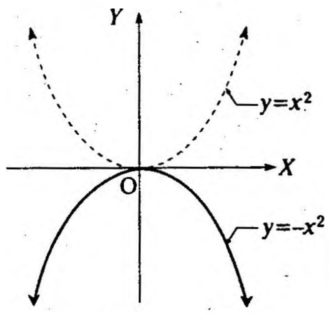
Grafique las funciones

a) $y=-x^2$

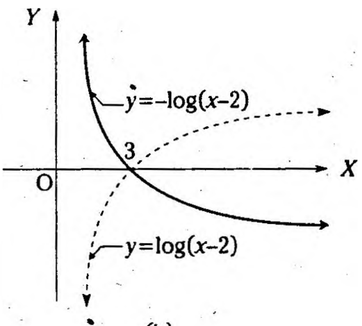
b) $y=-\log(x-2)$

Resolución

Las gráficas de las funciones dadas están construidas en las figuras 7.13(a) y 7.13(b) respectivamente.



(a)



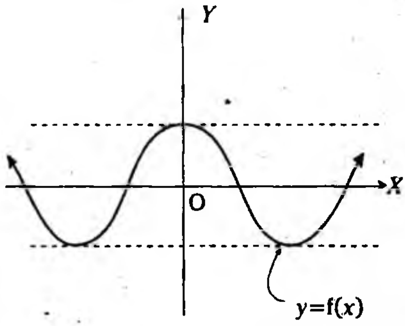
(b)

Figura 7.13

Nótese que la gráfica de $y=-x^2$ es simétrica con la gráfica de $y=x^2$, respecto al eje X.

Ejemplo 2

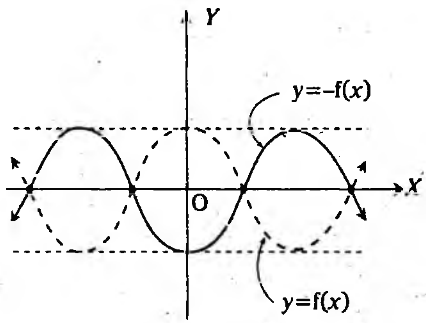
En la figura 7.14(a) se tiene la gráfica de $y=f(x)$, grafíquese $y=-f(x)$



(a)

Resolución

En la figura 7.14(b) se tiene construida la gráfica de $y=-f(x)$.



(b)

Figura 7.14

Note también que en este ejemplo la gráfica de $y=-f(x)$ es simétrica con la gráfica de $y=f(x)$, respecto del eje X.

Regla 4

La gráfica de la función $y=f(-x)$ se obtiene a partir de la gráfica de la función $y=f(x)$, mediante la reflexión directa respecto al eje Y.

Ejemplo

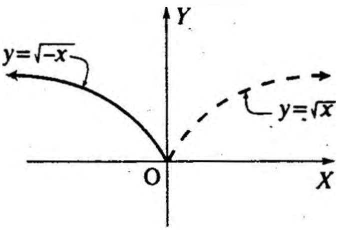
Grafique las funciones

a) $y=\sqrt{-x}$ b) $y=2^{-x}$ c) $y=\ln(-x)$

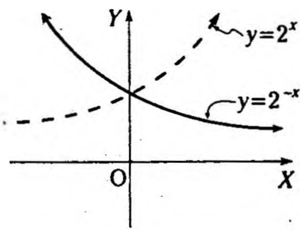
d) $y=(-x)^3$ e) $y=\dfrac{1}{-x}$ f) $y=\log_{\frac{1}{2}}(-x)$

Resolución

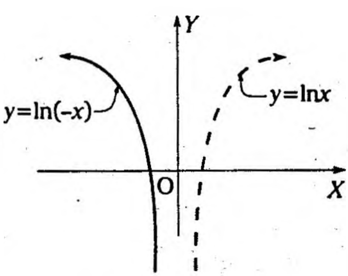
Las gráficas de las funciones dadas están construidas en las siguientes figuras.



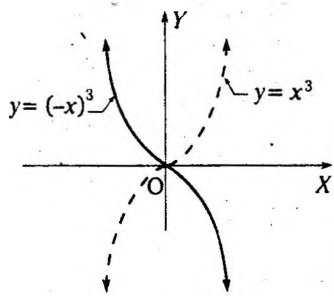
(a)



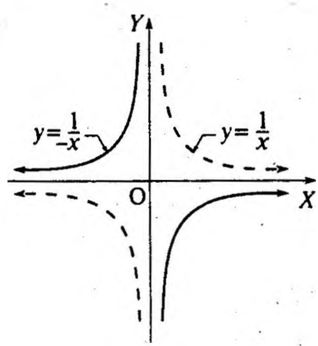
(b)



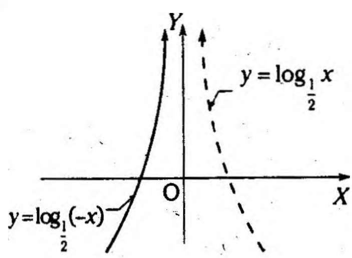
(c)



(d)



(e)



(f)

Figura 7.15

Regla 5

La gráfica de la función $y=kf(x)$ se obtiene a partir de la gráfica de la función $y=f(x)$, mediante el estiramiento de este k veces si $k>1$; y se contrae k veces hacia el eje X si $0<k<1$.

Ejemplo 1

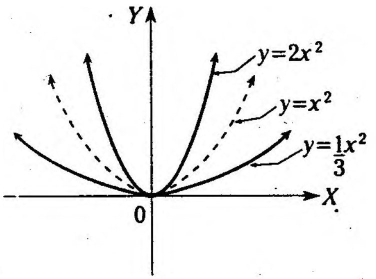
Grafique las funciones

a) $y=2x^2$ b) $y=\frac{1}{3}x^2$

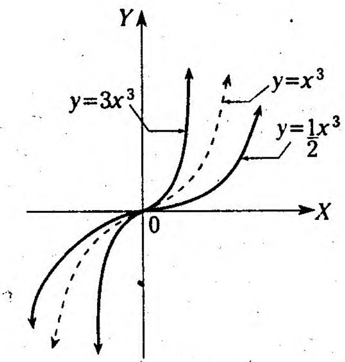
c) $y=3x^3$ d) $y=\frac{1}{2}x^3$

Resolución

Las gráficas de las funciones dadas en a y b se dan en la figura 7.16(a); y las gráficas de las funciones dadas en c y d se dan en la figura 7.16(b).



(a)

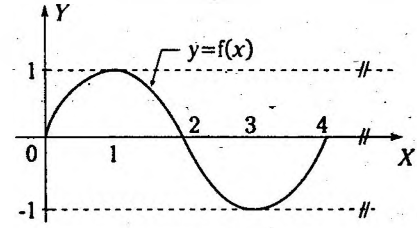


(b)

Figura 7.16

Ejemplo 2

En la figura 7.17(a) se tiene la gráfica de $y=f(x)$.

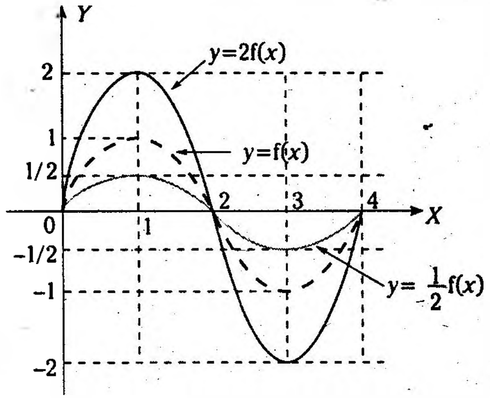


(a)

Grafique

a) $y=2f(x)$ b) $y=\frac{1}{2}f(x)$

Las gráficas de las funciones dadas en a y b se han construido en la figura 7.17(b)



(b)

Figura 7.17

Nótese que las gráficas de $y=2f(x)$, $y=\frac{1}{2}f(x)$, respecto de $y=f(x)$ se estiran o contraen respectivamente, pero horizontalmente se mantienen.

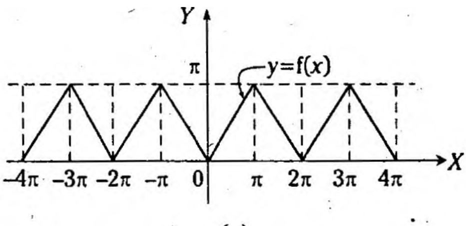
Regla 6

La gráfica de la función $y=f(kx)$ se obtiene a partir de la gráfica de la función $y=f(x)$ mediante la contracción de este en el eje Y, $\frac{1}{k}$ veces si $k>1$ y se expande a partir del eje Y, $\frac{1}{k}$ veces si $0<k<1$.
Si k es positivo, los valores de la función $f(x)$ para $a \le x \le b$ son los mismos que los de la función $f(kx)$ para $a \le kx \le b$, o lo que es lo mismo $\frac{a}{k} \le x \le \frac{b}{k}$.

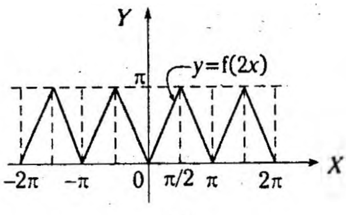
Así por ejemplo en la figura 7.18(a) se tiene la gráfica de la función $y=f(x)$, dicha gráfica se obtiene a partir de la tabla 4. Entonces la gráfica de la función $y=f(2x)$ se da en la figura 7.18(b), mientras que la gráfica de la función $y=f\left(\frac{1}{2}x\right)$ se da en la figura 7.18(c).

x	-4π	-3π	-2π	$-\pi$	0	π	2π	3π	4π
$y=f(x)$	0	π	0	π	0	π	0	π	0

Tabla 4

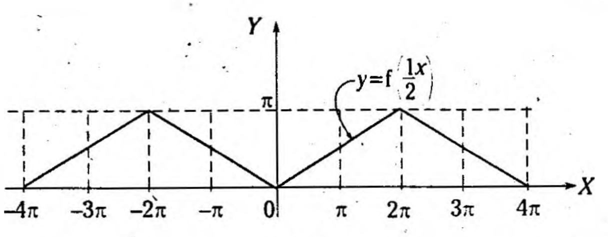


(a)



(b)

Con respecto a la gráfica de la función y=f(x), la gráfica de la función y=f(2x) se contrae (comprime) hacia el eje Y.



(c)

Con respecto a la gráfica de la función y=f(x), la gráfica de la función $y=f\left(\frac{1}{2}x\right)$ *se estira (expande) a partir del eje Y.*

Figura 7.18

Regla 7

Para obtener la gráfica de la función $y=|f(x)|$ a partir de la función $y=f(x)$ es necesario dejar sin cambios los trazos de la gráfica $y=f(x)$ que están por encima del eje X (o contenidos en el eje X) y reflejar en forma especular (simétrico) respecto al eje X los trazos inferiores a este eje.

Ejemplo 1

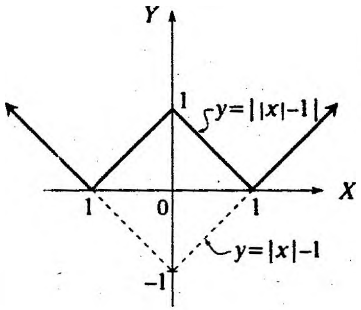
Grafique las funciones

a) $y=||x|-1|$

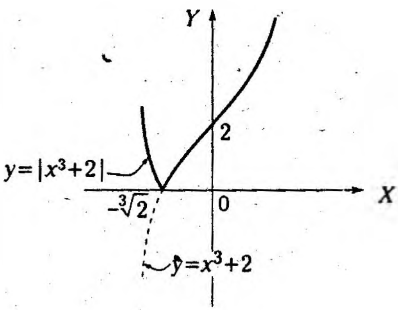
b) $y=|x^3+2|$

Resolución

Las gráficas de las funciones dadas están construidas en las figuras 7.19(a) y 7.19(b) respectivamente.



(a)

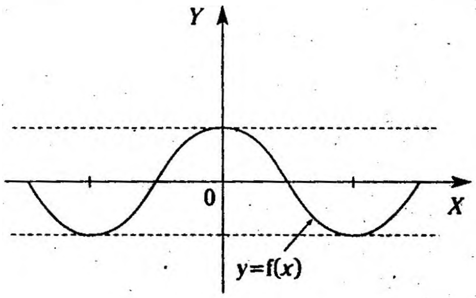


(b)

Figura 7.19

Ejemplo 2

La gráfica de la función $y=f(x)$ se da en la figura 7.20(a)

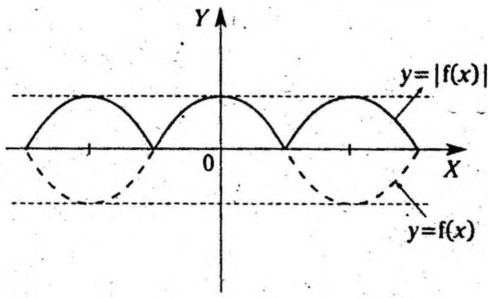


(a)

Grafique la función $y=|f(x)|$

Resolución

La gráfica de la función $y=|f(x)|$ se ha construido en la figura 7.20(b)



(b)

Figura 7.20

Regla 8

Para obtener la gráfica de la función $y = f(|x|)$ a partir de la gráfica de la función $y=f(x)$ es necesario construir la gráfica de la función $y=f(x)$ para $x>0$, y reflejarla en forma especular respecto al eje Y.

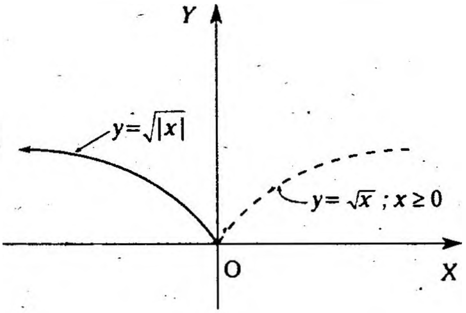
Ejemplo 1

Construya la gráfica de las funciones.

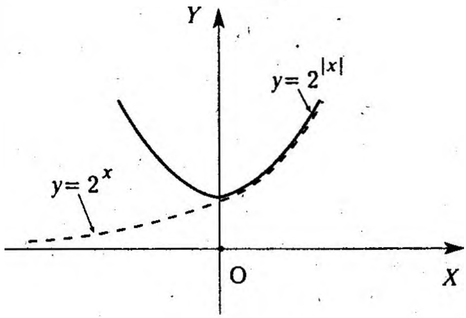
a) $y = \sqrt{|x|}$ b) $y = 2^{|x|}$

Resolución

Las gráficas de las funciones dadas en a y b están construidas en las figuras 7.21(a) y 7.21(b) respectivamente.



(a)

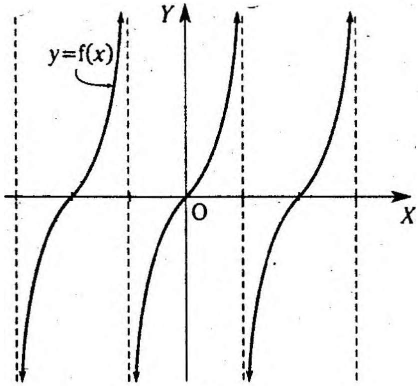


(b)

Figura 7.21

Ejemplo 2

La gráfica de la función $y=f(x)$ se da en la figura 7.22(a)

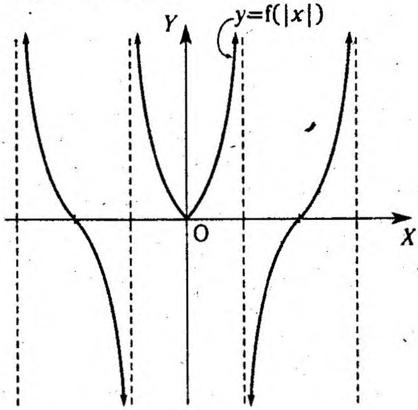


(a)

Grafique $y = f(|x|)$.

Resolución

La gráfica de la función $y = f(|x|)$ está construida en la figura 7.22(b).



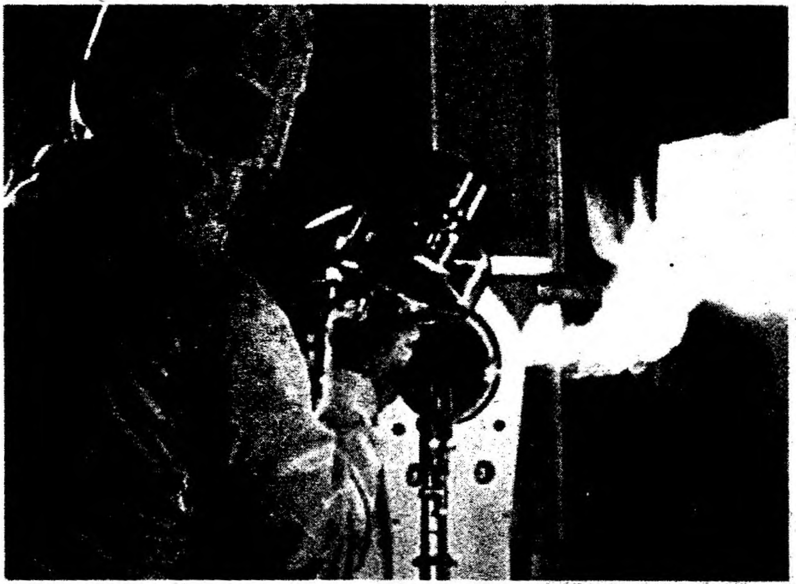
(b)

Figura 7.22

LECTURA

ACERCA DE LA LETRA X

La explicación de que la **x**, según las enciclopedias, es el signo con el que se representa en matemática a la incógnita se encuentra en los matemáticos árabes de la Edad Media, quienes utilizaban la palabra sayun transcrita con una **x** para denotar lo desconocido. Pero la asociación de esta letra con lo desconocido afecta también a otros ámbitos, como el de la medicina o el de la ciencia. Mackenzie denominó enfermedad X a un conjunto de síntomas de origen desconocido que se manifiestan con trastornos intestinales, cardiacos y respiratorios. El ejemplo más famoso de esta asociación es el que le llevó al físico alemán Wilhelm Kon rad Roentgen en 1895 a denominar rayos X a su descubrimiento: los llamó así, precisamente, porque desconocía su naturaleza.



Solo los ingenieros especializados pueden fabricar una máquina de rayos X, cuya aplicación más conocida es la radiografía médica, siendo los músculos y pulmones poco receptivos con los rayos mientras que los huesos absorben mucho de ellos.

Función Par

Una función f es denominada par si se cumple $\forall\, x \in \text{Dom}\, f$

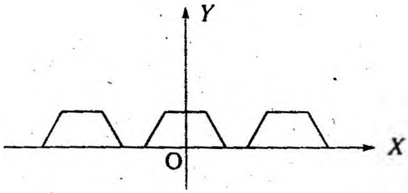
$i)\ -x \in \text{Dom}f$

$ii)\ f(-x) = f(x)$

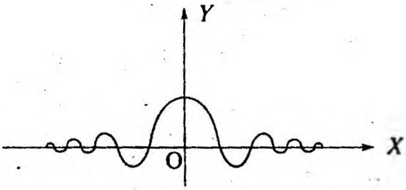
es decir, la ecuación $y=f(x)$ no cambia al sustituir $-x$ por x.

Nota

La gráfica de una función par es simétrica con respecto al eje de ordenadas.

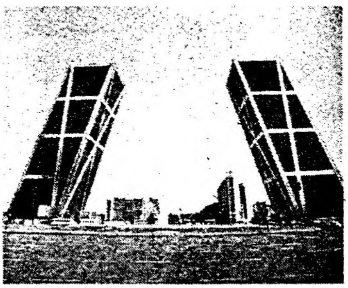


(a)



(b)

Figura 7.23



Estas torres inclinadas nos dan noción de función par.

Función Impar

Una función f es denominada impar si se cumple $\forall\, x \in \text{Dom}\, f$

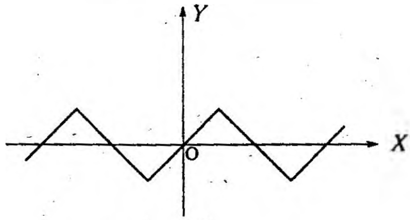
$i)\ -x \in \text{Dom}f$

$ii)\ f(-x) = -f(x)$

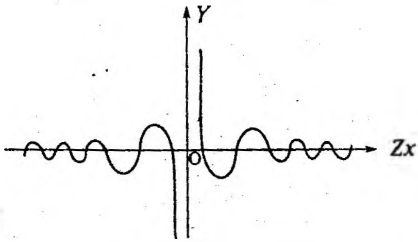
es decir, la ecuación $y=f(x)$ cambia por su opuesto al sustituir $-x$ por x.

Nota

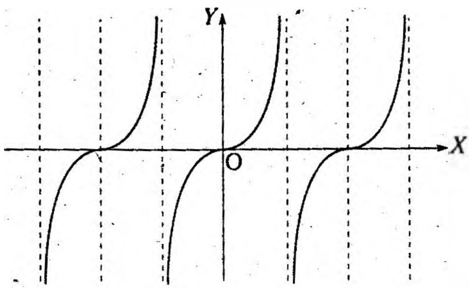
La gráfica de una función impar es simétrica con respecto al origen de coordenadas.



(a)



(b)



(c)

Figura 7.24

Ejemplos

Averigüe qué funciones son pares o impares.

a) $f(x)=x^2-4$

b) $g(x)=x^3+1$

c) $h(x)=e^{x^2}$

d) $f(x)=\operatorname{sen}x;\ 0<x<2\pi$

e) $P(x)=\cos x\ ;\ -2\pi \leq x \leq 2\pi$

f) $R(x)=\tan x\ ;\ 0<x\leq\frac{\pi}{2}$

Resolución

a) $f(x) = x^2-4$

Sustituyendo $-x$ por x

$\Rightarrow f(-x) = (-x)^2-4$

$\Rightarrow f(-x) = x^2-4$

$\Rightarrow f(-x) = f(x)$, por tanto f es par.

b) $g(x) = x^3+1$

Sustituimos $-x$ por x

$\Rightarrow g(-x) = (-x)^3+1$

$\Rightarrow g(-x) = -x^3+1$

Como $g(-x) \neq g(x)$, además $g(-x) \neq -g(x)$ entonces g no es par ni impar.

c) $h(x)= e^{x^2}$

Sustituimos $-x$ por x

$\Rightarrow h(-x) = e^{(-x)^2}$

$\Rightarrow h(-x) = e^{x^2}$

$\Rightarrow h(-x) = h(x)$, por tanto h es par.

d) $f(x)=\operatorname{sen}x$ siendo $0<x<2\pi$

i) Por definición $\forall x \wedge -x \in \operatorname{Dom}f = \langle 0\,;2\pi\rangle$

En el problema $-x\in\langle -2\pi\,;0\rangle$, y como usted puede comprobar este intervalo no se halla en el dominio.

ii) $f(-x)=\operatorname{sen}(-x)$

$f(-x)=-\operatorname{sen}x$

$\Rightarrow f(-x)=-f(x)$

$\therefore$ De *i* y *ii* se concluye que f no es par ni impar; porque no cumple las dos condiciones.

e) $P(x)=\cos x\ ;\ -2\pi \leq x \leq 2\pi$

i) Por definición $\forall x \wedge -x \in \operatorname{Dom}f = [-2\pi;2\pi]$

En el problema

$x\in[-2\pi\,;2\pi] \Rightarrow -2\pi \leq x \leq 2\pi$

Por (-1) $\quad -2\pi(-1)\geq(-1)x\geq(-1)2\pi$

de donde $\quad 2\pi\geq -x\geq -2\pi$

o $\quad -x=[-2\pi\,;2\pi]$

y como usted puede comprobar dicho intervalo coincide con el dominio, por lo que la primera condición está cumplida.

ii) $P(-x)=\cos(-x)$

$P(-x)=\underbrace{\cos x}$ (por reducción al primer cuadrante)

$\Rightarrow P(-x)= P(x)$

$\therefore$ De *i* y *ii* se concluye que P es una función par.

f) $R(x)=\tan x\ ;\ 0<x<\frac{\pi}{2}$

i) Por definición $\forall x \wedge -x \in \operatorname{Dom}f = \left\langle 0\,;\frac{\pi}{2}\right\rangle$

En el problema $x\in\left\langle 0\,;\frac{\pi}{2}\right\rangle \Rightarrow 0<x<\frac{\pi}{2}$

Por (-1) $\quad 0(-1)>(-1)(x)>(-1)\frac{\pi}{2}$

de donde $0>-x>-\frac{\pi}{2}$ o $-x=\left\langle -\frac{\pi}{2};0\right\rangle$

y como usted puede comprobar, dicho intervalo no coincide con el dominio, por lo que la primera condición no cumple.

ii) $R(-x)=\tan(-x)$

$\Rightarrow \underbrace{R(-x)}=-\underbrace{\tan x}$ (por reducción al primer cuadrante)

$\Rightarrow R(-x)=-R(x)$

$\therefore$ De *i* y *ii* se concluye que R no es impar porque no se cumple la primera condición y tampoco es par.

Función Creciente

Una función f es creciente en un intervalo I de su dominio si $\forall\, x_1, x_2 \in I$, se cumple

$$f(x_1) < f(x_2) \text{ siempre que } x_1 < x_2$$

Función Decreciente

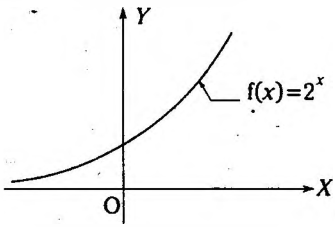
Una función f es decreciente en un intervalo I de su dominio si $\forall\, x_1, x_2 \in I$, se cumple

$$f(x_1) > f(x_2) \text{ siempre que } x_1 < x_2$$

Observación

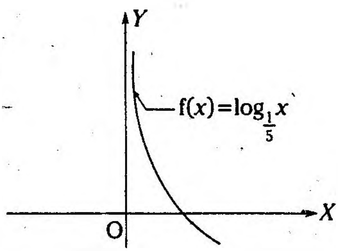
Una función creciente tiene una gráfica que sube de izquierda a derecha, mientras que una función decreciente tiene una gráfica que cae de izquierda a derecha. Una función f que es siempre creciente o decreciente (función monótona) en un intervalo dado, es univalente en dicho intervalo.

Seguidamente, citamos algunas gráficas de funciones crecientes y decrecientes.



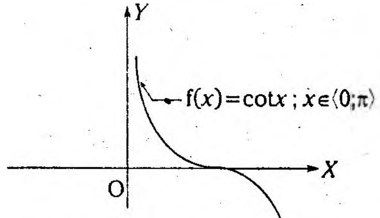
La gráfica representa a una función creciente.

(a)



La gráfica representa a una función decreciente.

(b)



La gráfica representa a una función decreciente.

(c)

Figura 7.25

Aplicación

CURVA DE DEMANDA DE TRIGO

El gráfico muestra la cantidad demandada de trigo a cada uno de los precios. Obsérvese que la cantidad y el precio están relacionados inversamente. Q aumenta cuando P baja. La curva tiene pendiente negativa y va del cuadrante noroeste al sureste. Esta importante propiedad recibe el nombre de ley de la Demanda decreciente. Tiene un gran atractivo intuitivo y se conoce en su sentido general desde los griegos; se ha constatado y verificado empíricamente con casi todas las mercancías: el trigo, la gasolina, los automóviles y las entradas del cine son unos cuantos ejemplos.

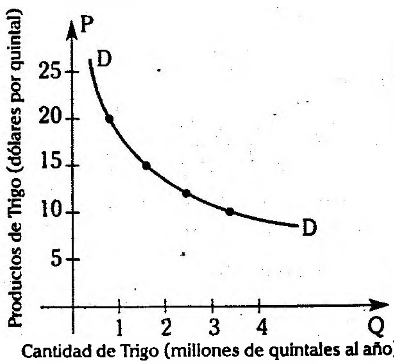
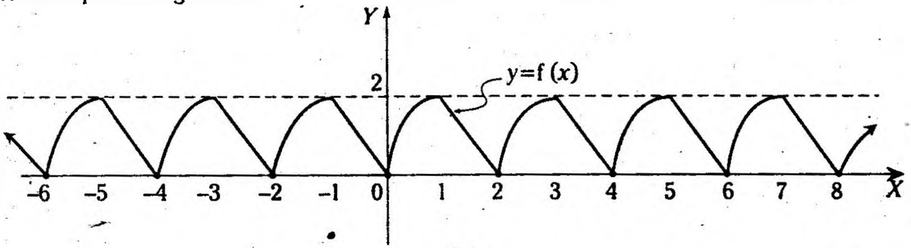


Figura 7.26

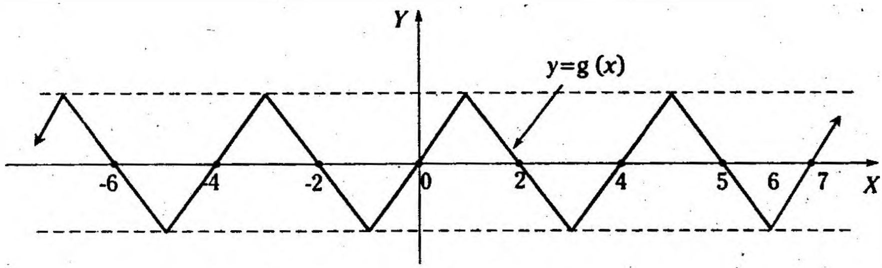
Funciones Periódicas

Las funciones que tienen un patrón repetitivo son llamadas funciones periódicas. La función que mostramos en la figura 7.27(a) es periódica: los valores de esta función se repiten cada dos unidades. En otras palabras, para cualquier x, tenemos que $f(x)=f(x+2)$. Nótese que la gráfica entre 0 y 2 sobre el eje X se repite a lo largo del eje X; es decir, si trasladamos la gráfica de la función f dos unidades hacia la izquierda o hacia la derecha, lo que obtendremos será la gráfica original. Entonces podemos decir que f tiene un periodo igual a 2.

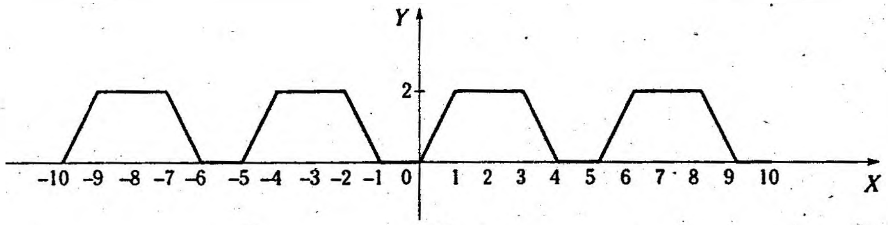


(a)

De igual forma si observamos las gráficas dadas en las figuras 7.27(b) y 7.27(c)



(b)



(c)

Figura 7.27

podríamos indicar que en el caso de la función g, los valores se repiten cada cuatro unidades, entonces $g(x)=g(x+4)$ para cualquier x, y si la gráfica de g se traslada cuatro unidades hacia la derecha o hacia la izquierda, esta coincidirá consigo misma. Por lo tanto, el periodo de g es 4. De igual manera para la función h cada cinco unidades se repiten los valores de la función. Por lo tanto el periodo de h es 5.

Definición

Si una función f cumple la propiedad $f(x+T) = f(x)$ para todo x de su dominio, siendo T una constante real diferente de cero, entonces f es periódica. El menor número positivo T se denomina periodo (periodo principal o periodo mínimo) de la función f.

Ejemplo 1
Averigüe si existe el periodo de las funciones cuya regla de correspondencia es

I. $f(x)=\text{sen}x$ II. $g(x)=\tan x$

Resolución

I. $f(x)=\text{sen}x$

Primer Método. Por definición

Esquema a plantear

Si $f(x+T)=f(x)$ ......(1)

pasando a un solo miembro se tiene

$$f(x+T)-f(x)=0$$

(De esta ecuación debemos obtener al menos una ecuación que involucre sólo a la variable T) Si no se puede obtener aquello, se sobreentenderá que la función no es periódica; en el ejemplo tenemos

$$f(x)=\text{sen}x \quad ......(2)$$

$$f(x+T)=\text{sen}(x+T) \quad ......(3)$$

Reemplazando (2) y (3) en (1) obtenemos

$$\text{sen}(x+T)=\text{sen}x$$

$$\text{sen}(x+T)-\text{sen}x=0 \quad .....(4)$$

y por transformación a producto de (4) se obtiene

$$2\text{sen}\left(\frac{x+T-x}{2}\right)\cos\left(\frac{x+T+x}{2}\right)=0$$

Reduciendo $2\text{sen}\left(\frac{T}{2}\right)\cos\left(\frac{2x+T}{2}\right)=0$ de donde obtenemos dos condiciones.

i) $\underbrace{\text{sen}\left(\frac{T}{2}\right)}_{\text{sólo involucra a T, lo cual indica que existe T, en consecuencia, la función es periódica}}=0$

ii) $\underbrace{\cos\left(\frac{2x+T}{2}\right)}_{\text{involucra a T y } x}=0$

y puesto que al menos una de las dos condiciones involucra solo a T (i)

luego resolviendo $\text{sen}\frac{T}{2}=0$

Del capítulo de C.T. se tiene que si

$$\text{sen}\frac{T}{2}=0 \Rightarrow \frac{T}{2}=k\pi \;;\; k\in\mathbb{Z} \quad ....(5)$$

Como T debe ser diferente de cero, por consiguiente K también debe serlo ($k\neq0$), por lo que nuestro correcto planteamiento sería

De (5) $T=2k\pi$, dando algunos valores a K obtenemos

Si $K=1 \Rightarrow T=2\pi$; Si $K=-1 \Rightarrow T=-2\pi$

Si $K=2 \Rightarrow T=4\pi$; Si $K=-2 \Rightarrow T=-4\pi$

Si $K=3 \Rightarrow T=6\pi$; Si $K=-3 \Rightarrow T=-6\pi$

Si $K=4 \Rightarrow T=8\pi$; Si $K=-4 \Rightarrow T=-8\pi$

... etc.

de donde

$$T=\underbrace{...-4\pi;-2\pi;2\pi;2\pi;4\pi;6\pi;...}_{\text{todos estos valores son periodos de la función}} \quad ....(6)$$

Pero como habíamos mencionado, se considera como periodo principal o mínimo al menor valor positivo de estos valores (6), en consecuencia escogemos $T=2\pi$.

Luego podemos afirmar que para la función $f(x)=\text{sen}x$ existe un periodo T y este es 2π.

Segundo Método. Método de identidad

A partir de la definición

$$\underbrace{f(x+T)} = \underbrace{f(x)} \;;\; T>0$$

$$\text{sen}(x+T) = \text{sen}x \quad \text{.... (1)}$$

Desarrollando el primer miembro por identidad de arcos compuestos (revise la página **300**)

$\Rightarrow$ de (1)

$$\text{sen}x\cos T + \text{sen}T\cos x = \text{sen}x \quad \text{... (2)}$$

Completando el segundo miembro se tiene

$$\cos T\,\text{sen}x + \text{sen}T\cos x = 1\cdot\text{sen}x + 0\cos x \quad \text{...(3)}$$

Identificando obtenemos

$$\cos T = 1 \quad y \quad \text{sen}T = 0$$

(No olvide que estas dos condiciones deben verificarse en simultáneo para que la igualdad (3) se cumpla)

Como T debe ser positivo T>0

Si $\cos T = 1 \Rightarrow T = 2\pi; 4\pi; 6\pi; 8\pi; 10\pi; \ldots$ (4)

$\text{sen}T = 0 \Rightarrow T = \pi; 2\pi; 3\pi; 4\pi; 5\pi; 6\pi; \ldots$(5)

De (4) a (5) se obtiene que los valores de T son

$$T = 2\pi; 4\pi; 6\pi; 8\pi; \ldots; 2\pi k \;;\; (k\in \mathbb{Z}^+)$$

Puesto que se escoge el periodo T como el menor valor positivo, éste sería 2π. Luego podemos afirmar que la función $f(x)=\text{sen}x$ es periódica de periodo $T=2\pi$.

Tercer Método. Tanteo por ángulos cuadrantales

A partir de $\text{sen}(x+T)=\text{sen}x$ .... (1)

↑ acerca de T

Por las identidades de reducción al primer cuadrante se tiene que T debe ser un ángulo cuadrantal $\left(T = \frac{k\pi}{2} \;;\; k\in \mathbb{Z}^+\right)$, de tal forma se emplearía el tanteo con

- Si $k=1 \Rightarrow T=\frac{\pi}{2} \Rightarrow \underbrace{\text{sen}\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}_{\text{reducción al primer cuadrante}} = \cos x$

  (No cumple la condición (1) porque el segundo miembro debería ser $\text{sen}x$)

  $\Rightarrow$ El periodo no es $\frac{\pi}{2}$, en consecuencia, seguiremos nuestro tanteo con el siguiente ángulo cuadrantal.

- Si $k=2 \Rightarrow T=\pi \Rightarrow \underbrace{\text{sen}(x+\pi)}_{\text{por reducción al primer cuadrante}} = -\text{sen}x$

  (No cumple la condición 1).

  $\Rightarrow$ El periodo no es π, en consecuencia proseguimos nuestro tanteo.

- Si $k=3 \Rightarrow T=\frac{3\pi}{2} \Rightarrow \underbrace{\text{sen}\left(x+\frac{3\pi}{2}\right)}_{\text{por reducción al primer cuadrante}} = -\cos x$

  (No cumple la condición 1).

  $\Rightarrow$ El periodo no es $\frac{3\pi}{2}$, luego seguiremos tanteando con el siguiente ángulo cuadrantal.

- Si $k=4 \Rightarrow T=2\pi \Rightarrow \underbrace{\text{sen}(x+2\pi)}_{\text{por reducción al primer cuadrante}} = \text{sen}x$

  (Si cumple la condición 1).

Puesto que el valor de $T=2\pi$ cumple, podemos afirmar luego que los valores de T serán los múltiplos de 2π, esto es $T=2\pi; 4\pi; 6\pi; 8\pi; \ldots$

Pero se escoge como periodo al menor positivo, por lo que podemos afirmar que la función $f(x)=\text{sen}x$ es periódica y de periodo igual a 2π.

II. Por definición

$g(x+T) = \tan(x+T)$

Desarrollando el segundo miembro

$g(x+T) = \dfrac{\tan x + \tan T}{1 - \tan x \cdot \tan T}$, para que se cumpla la definición de función periódica;

$g(x+T)=g(x)$, es decir $\dfrac{\tan x + \tan T}{1 - \tan x \cdot \tan T} = \tan x$,

tenemos $\tan T=0$

Entonces $T = \pi; 2\pi; 3\pi; \ldots; \pi k$; $k \in \mathbb{Z}$

Luego la función $y=\tan x$ es periódica; el periodo de dicha función es π.

Análogamente

El periodo de la función $y=\cos x$ es 2π, de $y=\cot x$ es π, de $y=\sec x$ es 2π, de $y=\csc x$ es 2π.

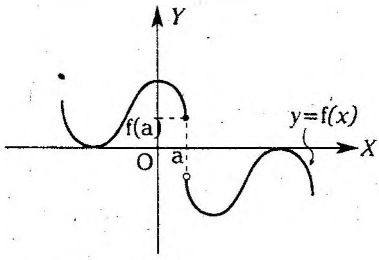
Como ya habíamos mencionado al inicio del presente capítulo, **la característica principal de las funciones trigonométricas es que son periódicas**, lo que ocasiona que su uso sea frecuente para modelar de forma matemática diversos fenómenos reales. A continuación mostramos una de éstas aplicaciones, para ello se sugiere que preste la atención respectiva, ya que el objetivo es que usted comprenda que la matemática como ente abstracto tiene relación con la vida cotidiana.

Continuidad de una Función en un Punto

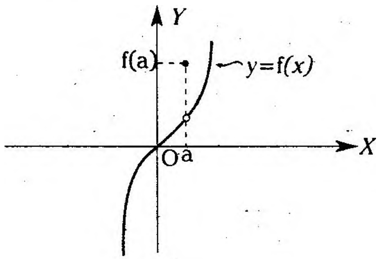
La noción intuitiva de continuidad de una función en un punto está relacionada estrechamente con el aspecto gráfico de la función en los alrededores del punto, sugerimos que lea la siguiente definición provisional de lo que es una función continua.

Una función $y=f(x)$ es continua en un punto $x=a$ de su dominio, si en ese punto la gráfica de la función no presenta saltos (se puede realizar su gráfica sin levantar el lapicero).

Veamos a continuación gráficas de funciones que no cumplen con la condición mencionada anteriormente.



(a)



(b)

Figura 7.28

Visto anteriormente podemos mostrar ya la definición matemática de continuidad de una función en un punto, dicha definición formalmente es

La función f es continua en $x=a$; donde **a** es un punto de acumulación y pertenece al dominio si se cumple las tres condiciones siguientes:

i) $f(a)$ existe *ii)* $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ existe

iii) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$

En la definición dada la palabra *existe* indica que existe un número real cuando se efectúan los cálculos en los incisos i) y ii).

Si alguna de estas tres condiciones no llegara a verificarse afirmaremos que la función es discontinua (no continua) en $x=a$.

Nota

La notación $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ se lee límite de f, cuando x tiende a **a** (éste es el valor aproximado de f cuando x, está más próximo de a).

ANÁLISIS DE LAS GRÁFICAS DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS ELEMENTALES

Función Seno

El dominio de la función **y=senx** son todos los números reales. En la siguiente tabla listamos algunos pares ordenados de dicha función, nótese que los valores del dominio (x) están expresados en radianes y son ángulos especiales del primer y segundo cuadrante, de tal forma que los valores correspondientes de la imagen (y) son fáciles de calcular.

Tabla 5

x	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	$2\pi/3$	$3\pi/4$	$5\pi/6$	π
$y=\text{sen}x$	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0

Luego marcamos en el plano cartesiano las parejas ordenadas obtenidas en la tabla anterior, tal como se muestra en la figura adjunta.

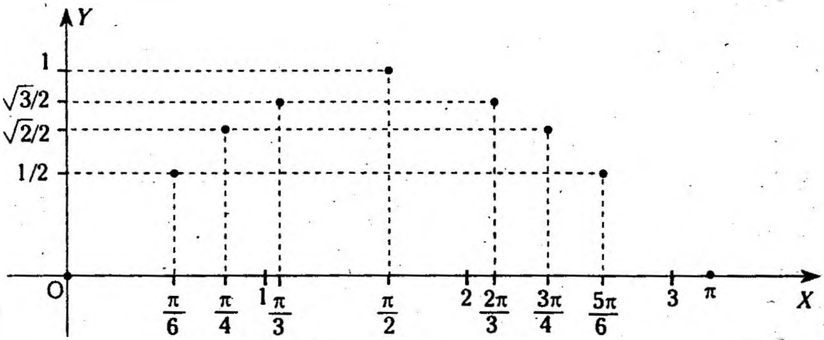


Figura 7.29

Al marcar otros pares ordenados (utilizando una calculadora científica) y unirlos mediante una curva suave o lisa, se obtendrá la gráfica de la función $y=\text{sen}x$, llamada senoide.

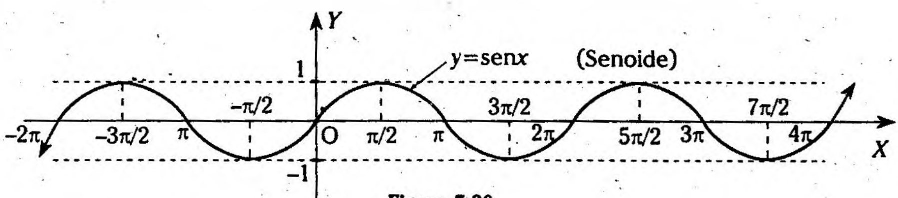


Figura 7.30

De la gráfica de la función $y=\text{sen}x$, tenemos

- $\text{Dom } f=\mathbb{R}$, es decir, $x\in\mathbb{R}$ y $\text{Ran } f=[-1;1]$, es decir, $-1\leq \text{sen}x\leq 1$
- Es una función impar, ya que $\text{sen}(-x)=-\text{sen}x$ (la gráfica presenta simetría con respecto al origen de coordenadas).
- Es creciente $\forall x\in\left\langle -\frac{\pi}{2}+2k\pi;\frac{\pi}{2}+2k\pi\right\rangle$ y decreciente $\forall x\in\left\langle \frac{\pi}{2}+2k\pi;\frac{3\pi}{2}+2k\pi\right\rangle$; donde $k\in\mathbb{Z}$
- Es de periodo 2π.
- Es continua $\forall x\in\mathbb{R}$, o sea es continua en su dominio.

También es de uso frecuente la definición siguiente para la función seno $f=\{(x;y)/y=\text{sen}x;\forall x\in\mathbb{R}\}$

Función Coseno

De manera similar a la función seno, se obtiene la gráfica de la función $y=\cos x$, llamada cosenoide.

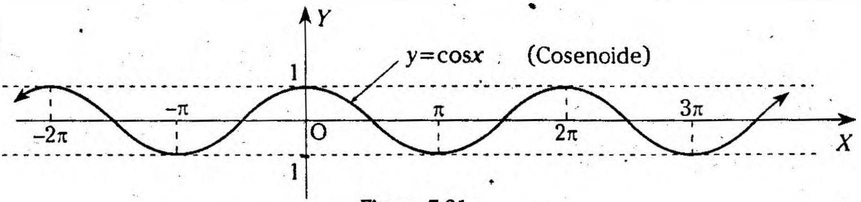


Figura 7.31

De la gráfica de la función $y=\cos x$, tenemos

- $\text{Dom } f=\mathbb{R}$, es decir, $x\in\mathbb{R}$
- $\text{Ran } f=[-1;1]$, es decir, $-1\leq\cos x\leq 1$
- Es una función par, ya que $\cos(-x)=\cos x$, (la gráfica presenta simetría con respecto al eje Y).
- Es decreciente $\forall x\in\langle 2k\pi;2k\pi+\pi\rangle$ y creciente $\forall x\in\langle \pi+2k\pi;2\pi+2k\pi\rangle$, donde $k\in\mathbb{Z}$
- Es de periodo 2π.
- Es continua $\forall x\in\mathbb{R}$, o sea, es continua en su dominio.

De igual forma que la función anterior, es común utilizar su definición de la forma $f=\{(x;y)/y=\cos x;\forall x\in\mathbb{R}\}$

Función Tangente

Los elementos del dominio de la función $y=\tan x$, puede ser cualquier número real, excepto los de la forma $(2k+1)\frac{\pi}{2}$ siendo **k** un número entero. En la siguiente tabla listamos algunos pares ordenados de dicha función, nótese que los valores del dominio (x) están entre $-\pi/2$ y $\pi/2$ y son ángulos especiales, de manera que los valores correspondientes de la imagen (y) sean fáciles de calcular.

x	$-\pi/3$	$-\pi/4$	$-\pi/6$	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$
$y=\tan x$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\sqrt{3}/3$	0	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$

Tabla 6

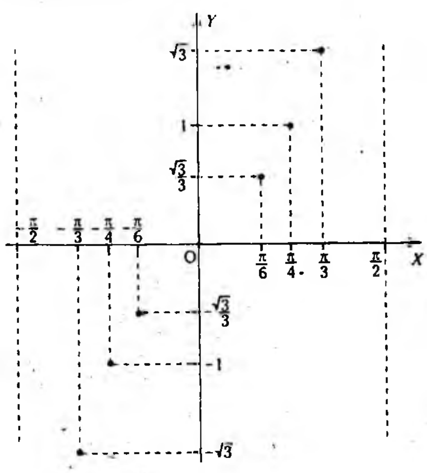


Figura 7.32

Luego marcamos en el plano cartesiano. Los pares ordenados obtenidos en la tabla anterior, tal como se muestra en la figura adjunta (ver figura 7.32).

Al marcar otras parejas ordenadas y unirlas mediante curvas suaves o lisas, se obtendrá la gráfica de la función $y=\tan x$ (véase figura 7.33). Las líneas verticales punteadas no son parte de la gráfica, son **asíntotas**. La gráfica se aproxima a cada una de las asíntotas pero nunca las alcanza.

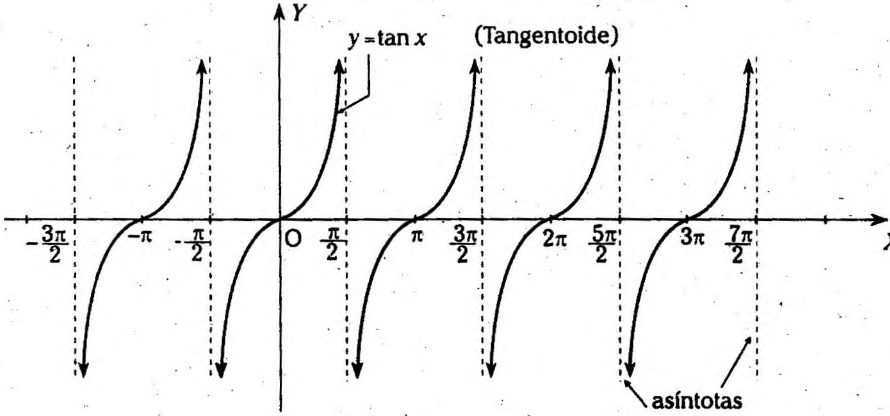


Figura 7.33

Del gráfico de la función $y=\tan x$, tenemos

- $\text{Domf} = \mathbb{R} - (2k+1)\frac{\pi}{2}; k \in \mathbb{Z}$ es decir $x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$
- $\text{Ran f} = \mathbb{R}$, es decir $\tan x \in \mathbb{R}$
- Es una función impar, ya que $\tan(-x) = -\tan x$ (La gráfica presenta simetría con respecto al origen).
- Es creciente $\forall x \in \left\langle -\frac{\pi}{2} + k\pi ; \frac{\pi}{2} + k\pi \right\rangle ; k \in \mathbb{Z}$
- Es una función periódica, de periodo igual a π.
- Es continua $\forall x \in \left\langle -\frac{\pi}{2} + k\pi ; \frac{\pi}{2} + k\pi \right\rangle ; k \in \mathbb{Z}$. Es decir, es continua en su dominio.

Función Cotangente

De manera similar a la función tangente, se obtiene la gráfica de la función $y = \cot x$ (véase figura 7.34).

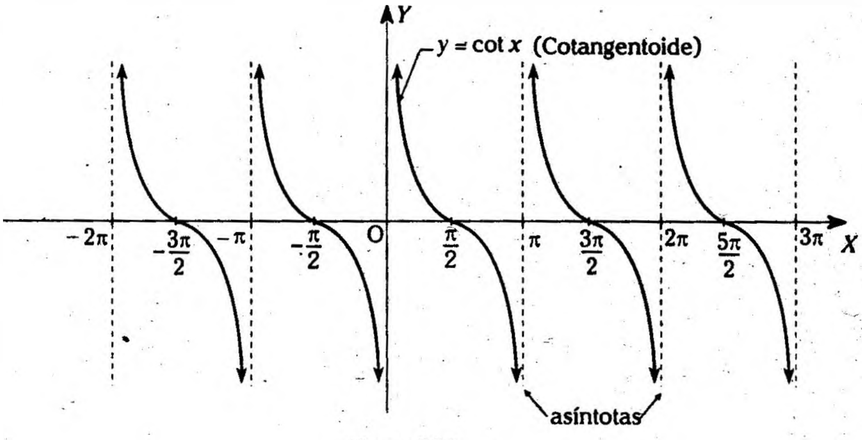


Figura 7.34

De la gráfica de la función $y = \cot x$, tenemos

- $\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{k\pi\}; k \in \mathbb{Z}$, es decir, $x \neq k\pi$
- $\text{Ran } f = \mathbb{R}$, es decir, $\cot x \in \mathbb{R}$
- Es una función impar, ya que $\cot(-x) = -\cot x$. (La gráfica presenta simetría con respecto al origen).
- Es decreciente $\forall x \in \langle k\pi; k\pi + \pi \rangle; k \in \mathbb{Z}$.
- Es una función periódica de periodo igual a π.
- Es continua $\forall x \in \langle k\pi; k\pi + \pi \rangle; k \in \mathbb{Z}$. Es decir, es continua en su dominio.

Función Secante

Los elementos del dominio de la función $y = \sec x$, puede ser cualquier número real excepto los de la forma $(2k+1)\frac{\pi}{2}$, siendo k un número entero. En la siguiente tabla listamos algunos pares ordenados de dicha función, nótese que los valores del dominio (x) están entre 0 y π y son ángulos especiales, de manera que los valores correspondientes de la imagen (y) sean fáciles de calcular.

x	$-\pi/3$	$-\pi/4$	$-\pi/6$	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$
$y = \sec x$	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	1	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{2}$	2

Tabla 7

Luego marcamos en el plano cartesiano las parejas ordenadas obtenidas en la tabla anterior, tal como se muestra en la figura adjunta.

Al marcar otras parejas ordenadas y unirlas mediante curvas suaves o lisas, se obtendrá la gráfica de la función $y = \sec x$ (véase la figura 7.36). Las líneas verticales punteadas no son parte de la gráfica, son asíntotas. En la figura se ha graficado también $y = \cos x$; ya que $\sec x = \frac{1}{\cos x}$ entonces las ordenadas de la función $y = \sec x$, serán los recíprocos de las ordenadas de la función $y = \cos x$, para valores correspondientes de x pertenecientes a los dominios de las funciones secante y coseno.
Nótese la manera en que aumenta o disminuye sin límite la función secante cuando x se aproxima a $(2k+1)\frac{\pi}{2}$ para cualquier entero k.

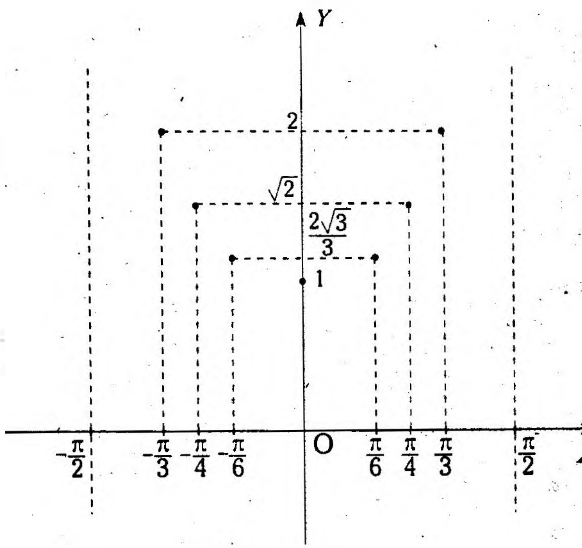


Figura 7.35

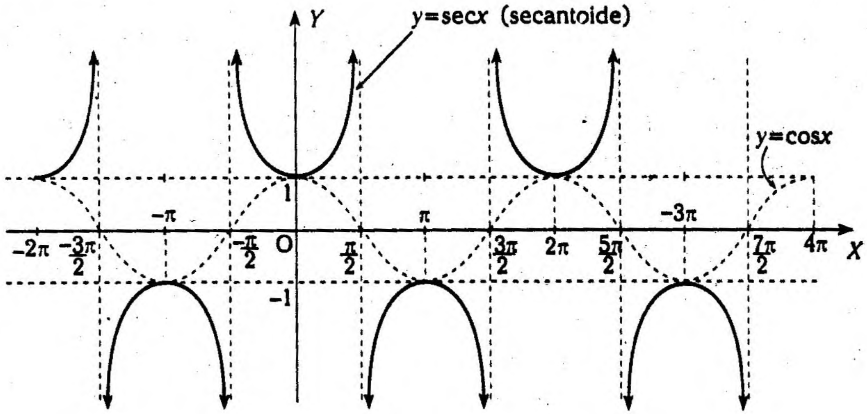


Figura 7.36

De la gráfica de la función $y = \sec x$, tenemos

- $\text{Domf} = \mathbb{R} - \left\{(2k+1)\frac{\pi}{2}\right\}$; $k \in \mathbb{Z}$; es decir $x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$
- $\text{Ranf} = \langle -\infty; -1] \cup [1; +\infty\rangle$; es decir $\sec x \leq -1$ ó $\sec x \geq 1$
- Es una función par ya que $\sec(-x) = \sec x$ (la gráfica presenta simetría con respecto al eje Y).
- Es creciente $\forall x \in \left\langle 2k\pi; 2k\pi + \frac{\pi}{2}\right\rangle$ donde $k \in \mathbb{Z}$ ó $\forall x \in \left\langle 2k\pi + \frac{\pi}{2}; 2k\pi + \pi\right\rangle$ y es decreciente $\forall x \in \left\langle 2k\pi + \pi; 2k\pi + \frac{3\pi}{2}\right\rangle$ ó $\forall x \in \left\langle 2k\pi + \frac{3\pi}{2}; 2k\pi + 2\pi\right\rangle$.
- Es una función periódica, de periodo igual a 2π.
- Es continua $\forall x \in \left\langle -\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi\right\rangle$; $k \in \mathbb{Z}$. Es decir, es continua en su dominio.

Función Cosecante

Empleando la gráfica la función $y = \text{sen}x$, podemos graficar la función $y = \csc x$. Ya que $\csc x = \frac{1}{\text{sen}x}$, entonces puede calcularse la ordenada de un punto de la gráfica de la función cosecante evaluando el recíproco de la ordenada correspondiente en la gráfica del seno para cada valor de x, excepto $x = k\pi$ para cualquier entero k. (Si $x = k\pi$, $\text{sen}x = 0$ y, por consiguiente $\frac{1}{\text{sen}x}$ es indefinido). Nótese la manera en que aumenta o disminuye la función cosecante, cuando x se aproxima a $k\pi$ para cualquier entero k. En la figura 7.37 se tiene las gráficas de las funciones $y = \csc x$ e $y = \text{sen}x$.

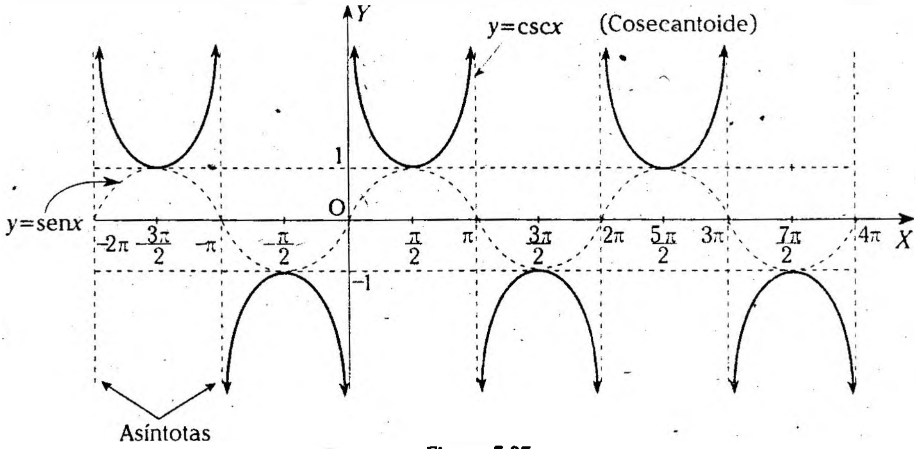


Figura 7.37

De la gráfica de la función $y=\csc x$, tenemos

- $\text{Domf}=\mathbb{R}-\{k\pi\}; k\in\mathbb{Z}$, es decir, $x\neq k\pi$
- $\text{Ranf}=\langle-\infty;-1]\cup[1;+\infty\rangle$, es decir $\csc x\leq -1$ ó $\csc x\geq 1$
- Es una función impar ya que $\csc(-x)=-\csc x$ (la gráfica presenta simetría con respecto al origen).
- Es creciente $\forall x\in\left\langle\frac{\pi}{2}+2k\pi;\ \pi+2k\pi\right\rangle$ donde $k\in\mathbb{Z}$ ó $\forall x\left\langle\pi+2k\pi;\ \frac{3\pi}{2}+2k\pi\right\rangle$; y decreciente $\forall x\left\langle 2k\pi;\ 2k\pi+\frac{\pi}{2}\right\rangle$ ó $\forall x\in\left\langle\frac{3\pi}{2}+2k\pi;\ 2k\pi+2\pi\right\rangle$.
- Es una función periódica, de periodo igual a 2π.
- Es continua $\forall x\in\langle k\pi;k\pi+\pi\rangle$; $k\in\mathbb{Z}$, es decir, es continua en su dominio.

Resumen

	Dominio	Rango	Asíntotas Verticales	Periodo	Par o Impar	Intercepciones con el eje X
$y=\text{sen}x$	$\mathbb{R}$	$[-1;1]$	ninguna	2π	impar	$x=\pi k$; $k\in\mathbb{Z}$
$y=\cos x$	$\mathbb{R}$	$[-1;1]$	ninguna	2π	par	$x=\frac{\pi}{2}+\pi k$; $k\in\mathbb{Z}$
$y=\tan x$	$\mathbb{R}-\left\{\frac{\pi}{2}+\pi k\right\}$	$\mathbb{R}$	$x=\frac{\pi}{2}+\pi k$	π	impar	$x=\pi k$; $k\in\mathbb{Z}$
$y=\cot x$	$\mathbb{R}-\{\pi k\}$	$\mathbb{R}$	$x=\pi k$	π	impar	$x=\frac{\pi}{2}+\pi k$; $k\in\mathbb{Z}$
$y=\sec x$	$\mathbb{R}-\left\{\frac{\pi}{2}+\pi k\right\}$	$\langle-\infty;-1]\cup[1;\infty\rangle$	$x=\frac{\pi}{2}+\pi k$	2π	par	ninguna
$y=\csc x$	$\mathbb{R}-\{\pi k\}$	$\langle-\infty;-1]\cup[1;\infty\rangle$	$x=\pi k$	2π	impar	ninguna

Tabla 8

Gráfica de la Función que tiene por Regla de Correspondencia

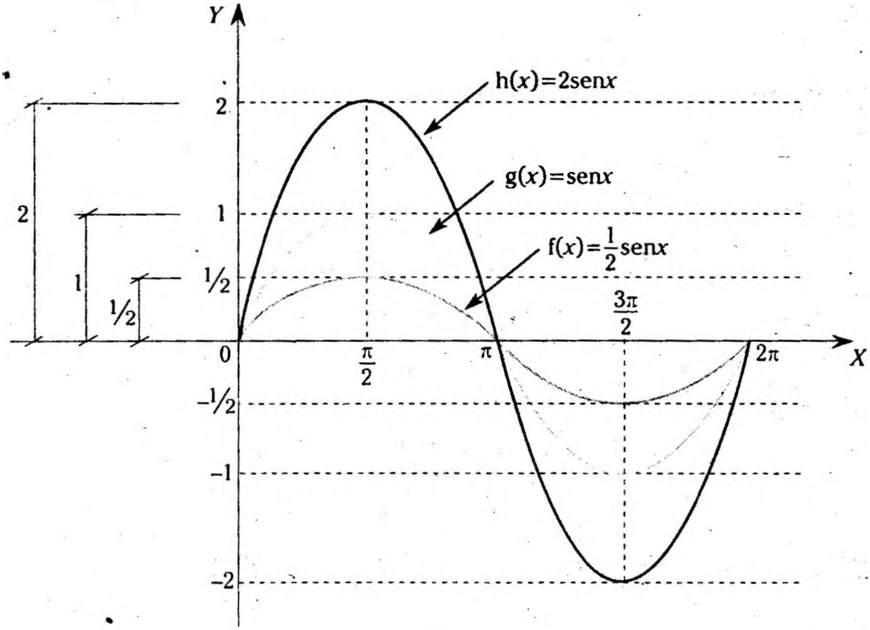
$$f(x)=A\text{sen}(Bx+C)+D$$

En el estudio de las funciones trigonométricas, debemos dar importancia a la *curva senoidal* por su aplicación en diversas partes de la astronomía, matemática, mecánica, electricidad, etc.
Realizando el estudio de la función definida por $y=A\text{sen}x$
La amplitud de esta onda es $|A|$
Además
- $|A|$ es el máximo valor de la función
- $-|A|$ es el mínimo valor de la función

Ejemplo
Grafique en un mismo plano cartesiano las siguientes funciones, cuyas reglas de correspondencia son

$$f(x)=\frac{1}{2}\text{sen}x;\ g(x)=\text{sen}x \text{ y } h(x)=2\text{sen}x$$

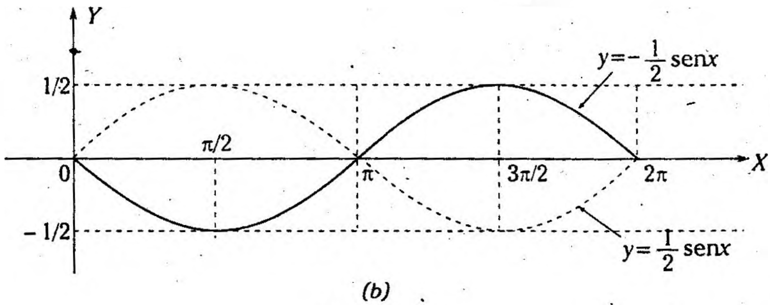
Resolución
En la figura 7.38(a) se han graficado las funciones f; g y h, donde la amplitud de estas son respectivamente 1/2, 1 y 2.



(a)

Si la constante A en $y=A\text{sen}x$ es negativa, se tendrá una reflexión en torno al eje X (véase regla 3 de este capítulo).

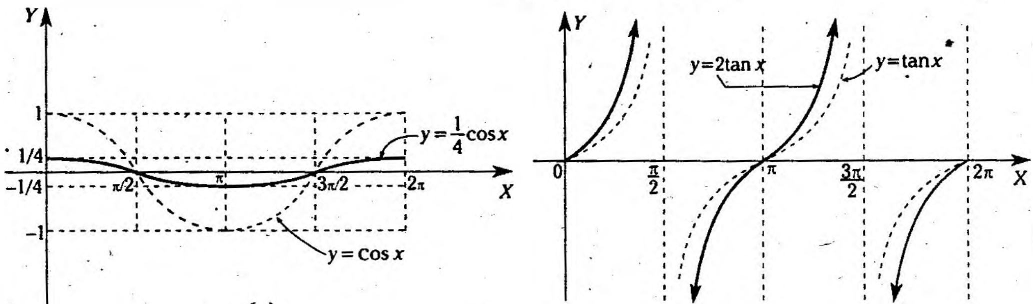
Entonces la gráfica de $y=-\frac{1}{2}\operatorname{sen}x$; es una reflexión de $y=\frac{1}{2}\operatorname{sen}x$ y tiene una amplitud de $\left|-\frac{1}{2}\right|$ ó $\frac{1}{2}$. (Véase figura 7.38(b)).



(b)

Figura 7.38

Análogamente en las figuras siguientes, se observan las gráficas de las funciones que tienen por regla de correspondencia $y=\frac{1}{4}\cos x$; $y=2\tan x$; $y=\frac{1}{3}\cot x$; $y=3\sec x$; $y=-2\csc x$. En líneas entrecortadas se han graficado las funciones definidas por cos*x*; tan*x*; cot*x*; sec*x* y csc*x*.



En la figura 7.39(a) se observa que las gráficas $y=\cos x$, $y=\frac{1}{4}\cos x$ los periodos son iguales a 2π, los coeficientes 1 y $\frac{1}{4}$ no alteran el periodo.

El periodo de las funciones $y=\tan x$ ó $y=2\tan x$, es el mismo y es igual a $T=\pi$. (Ver figura 7.39(b))

En la figura (7.39(c)) se observa las gráficas $y=\cot x \wedge y=\frac{1}{3}\cot x$ que el periodo para ambas funciones es el mismo e igual a π ; y los coeficientes 1 y $\frac{1}{3}$ que se observa no alteran el periodo, tampoco el rango.

En la figura (7.39(d)) se observa las gráficas de las funciones $y=\sec x$, $y=3\sec x$ que el periodo para ambas funciones es el mismo e igual a 2π. Y también los coeficientes 1 y 3 no alteran el periodo.

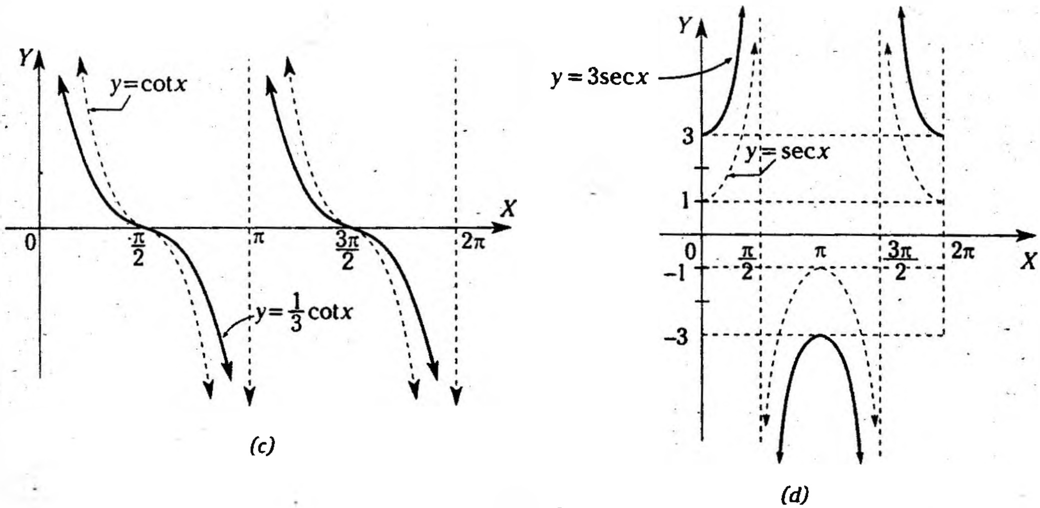


Figura 7.39

Estudio de las Funciones de la Forma y=Ft(Bx)

Realizando el estudio de la función definida por $y=\text{sen}Bx$ determinamos que su periodo es

$$T=\frac{2\pi}{|B|}$$

En efecto, por definición de función periódica tenemos $\text{sen}B(x+T)=\text{sen}Bx$.

Entonces

$$\text{sen}(Bx+BT)=\text{sen}Bx$$

de donde la igualdad anterior, se cumple para

$$BT=\ldots -2\pi;0;2\pi;4\pi;6\pi;\ldots$$

escogemos el menor valor positivo $BT=2\pi$

Despejando $T=\dfrac{2\pi}{B}$

- Si $B>0 \Rightarrow T=\dfrac{2\pi}{B}$
- Si $B<0 \Rightarrow T=\dfrac{2\pi}{-B}$

es decir $T=\dfrac{2\pi}{|B|}$

Ejemplo

Grafique en un mismo plano cartesiano las siguientes funciones cuyas reglas de correspondencia son

$$f(x)=\text{sen}\frac{x}{2}$$

$$g(x)=\text{sen}x$$

$$h(x)=\text{sen}2x$$

Resolución

Es evidente que las amplitudes de f, g y h son iguales a 1. Sin embargo, los periodos son diferentes y se hallan de la siguiente manera

- Periodo de f: $T=\dfrac{2\pi}{\left|\frac{1}{2}\right|}$ $\therefore T=4\pi$
- Periodo de g: $T=\dfrac{2\pi}{|1|}$ $\therefore T=2\pi$
- Periodo de h: $T=\dfrac{2\pi}{|2|}$ $\therefore T=\pi$

Las gráficas de las funciones f; g y h se encuentran representadas en la figura 7.40

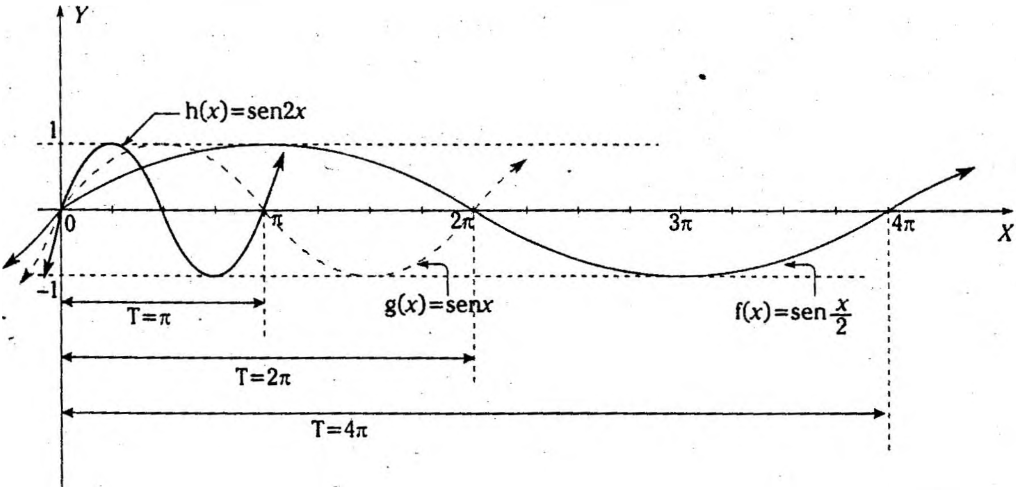
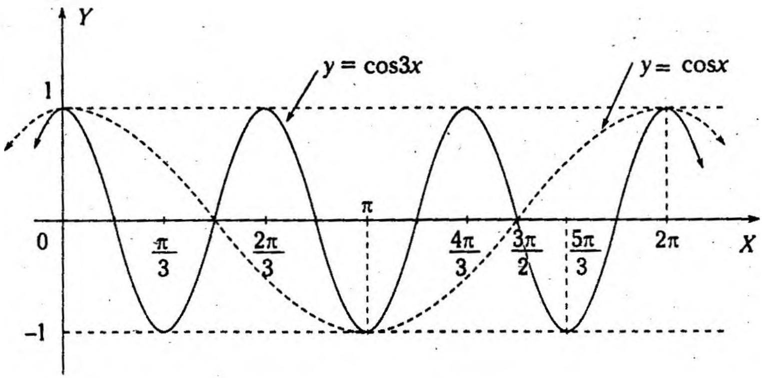


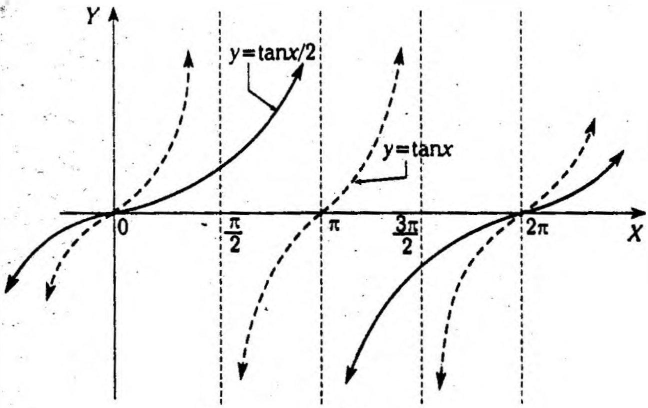
Figura 7.40

En la función definida por $y=\text{sen}Bx$, siendo la constante B positiva.

- Si B>1, la gráfica se contrae hacia el eje *Y*.
- Si B<1, la gráfica se estira con respecto al eje *Y* (ver regla 6 en este capítulo).
- Análogamente, se observan las gráficas de las funciones que tienen por regla de correspondencia $y=\cos 3x$; $y=\tan\dfrac{x}{2}$ $\wedge$ $y=\csc 4x$ (ver figuras 7.41(a), 7.41(b) y 7.41(c)).



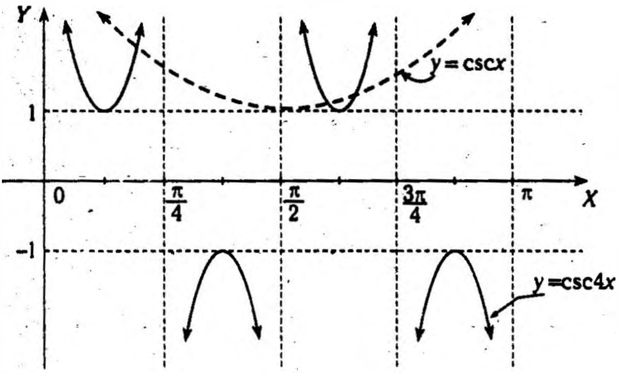
(a)



(b)

En líneas entrecortadas se han graficado las funciones definidas por $y=\cos x$; $y=\tan x \wedge y=\csc x$.

El periodo de la función definida por $y=\cos 3x$ es $T=\frac{2\pi}{|3|}=\frac{2\pi}{3}$; mientras que el periodo de la función definido por $y=\cos x$ es 2π (ver figura 7.41(a))



(c)

Figura 7.41

El periodo de la función definida por $y=\tan\frac{x}{2}$ es $T=\frac{\pi}{|1/2|}=2\pi$, mientras que el periodo de la función definida por $y=\tan x$ es π. ver figura (7.41(b))

El periodo de la función $y=\csc 4x$ es $T=\frac{2\pi}{|4|}=\frac{\pi}{2}$; mientras que el periodo de $y=\csc x$ es 2π. (ver figura 7.41(c))

Observación

Considerando que A, $B \neq 0$; entonces los periodos de las funciones cuya regla de correspondencia son

$$y=A\operatorname{sen}Bx\ ;\ y=A\cos Bx\ ;\ y=A\sec Bx \text{ e } y=A\csc Bx$$

son iguales a $T=\frac{2\pi}{|B|}$

Además los periodos de las funciones cuya regla de correspondencia son

$$y=A\tan Bx \text{ e } y=A\cot Bx$$

son iguales $T=\frac{\pi}{|B|}$.

Así por ejemplo:

El periodo de la función definido por $y=\frac{1}{3}\operatorname{sen}5x$ es $T=\frac{2\pi}{|5|}=\frac{2\pi}{5}$

El periodo de la función definido por $y=\cos(-2x)$ es $T=\frac{2\pi}{|-2|}=\pi$

El periodo de la función definido por $y=\tan\pi x$ es $T=\frac{\pi}{|\pi|}=1$

El periodo de la función definido por $y=2\csc(-8x)$ es $T=\frac{2\pi}{|-8|}=\frac{\pi}{4}$

El periodo de la función definido por $y=-5\cot\left(\frac{2x}{3}\right)$ es $T=\frac{\pi}{\left|\frac{2}{3}\right|}=\frac{3\pi}{2}$

Ejemplo 1

Una boya en el océano oscila de arriba hacia abajo mientras las olas pasan. Suponiendo que la boya está en su punto más alto en t=0, además la boya se mueve un total de 80 cm desde el punto más alto cada 12 s. Encuentre la ecuación de la boya que está en movimiento.

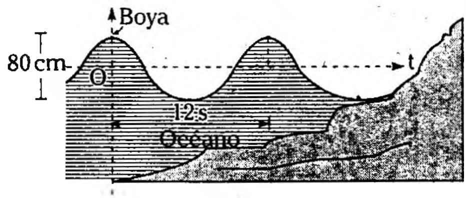


Figura 7.42

Resolución

Sea $y=A\cos Bt$

del gráfico A=40 cm y del periodo $12=\frac{2\pi}{B} \Rightarrow B=\frac{\pi}{6}$

$\therefore\ y=40\cos\left(\frac{\pi t}{6}\right)$

Realizando el estudio de la función definida por $y=\operatorname{sen}(x+C)$, entonces **el cambio o número de fase** es $-C$, si consideramos $x+C=0$, tenemos $x=-C$; si $x+C=\pi$, tenemos $x=\pi-C$ y cuando $x+C=2\pi$, tenemos $x=2\pi-C$; esto significa que la gráfica de $\boldsymbol{y=\operatorname{sen}x}$ se desplaza a lo largo del eje X una magnitud $|C|$.

Ejemplo 2

Comparemos las gráficas de las funciones cuyas reglas de correspondencia son

$$f(x)=\operatorname{sen}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\ ,\quad g(x)=\operatorname{sen}x\quad y\quad h(x)=\operatorname{sen}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$$

Para cada una de estas funciones la amplitud y periodo son 1 y 2π respectivamente. Para hallar el número de fase basta igualar a cero cada ángulo, es decir

De la función f: $x+\frac{\pi}{4}=0$, entonces $x=-\frac{\pi}{4}$ ... (Significa que la gráfica de $y=\operatorname{sen}x$ se desplaza $\frac{\pi}{4}$ unidades a la izquierda.)

De la función h: $x-\frac{\pi}{4}=0$, entonces $x=\frac{\pi}{4}$ ... (Significa que la gráfica de $y=\operatorname{sen}x$ se desplaza $\frac{\pi}{4}$ unidades a la derecha.)

En el siguiente gráfico se tienen las gráficas de las funciones f, g y h (véase los desplazamientos a la izquierda y derecha con respecto a la función que tiene por regla de correspondencia $g(x)=\text{sen}x$).

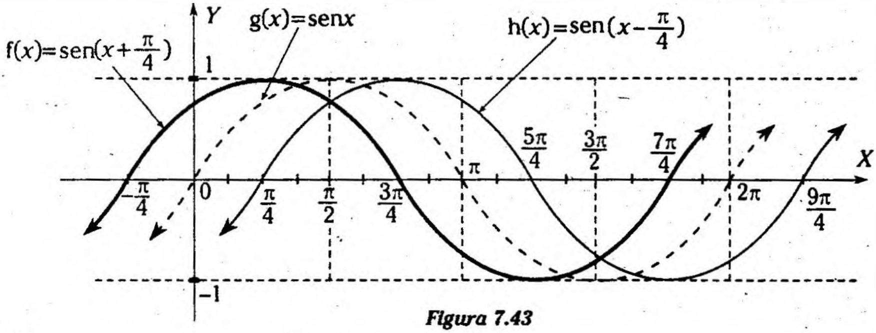


Figura 7.43

Entonces

- Si $C>0$, la función definida por $y=\text{sen}\,(x+C)$ se desplaza C unidades a la izquierda
- Si $C<0$, la función definida por $y=\text{sen}\,(x+C)$ se desplaza $|C|$ unidades a la derecha.

Lo mismo se puede aplicar a las gráficas de las otras funciones.

Ejemplo 3

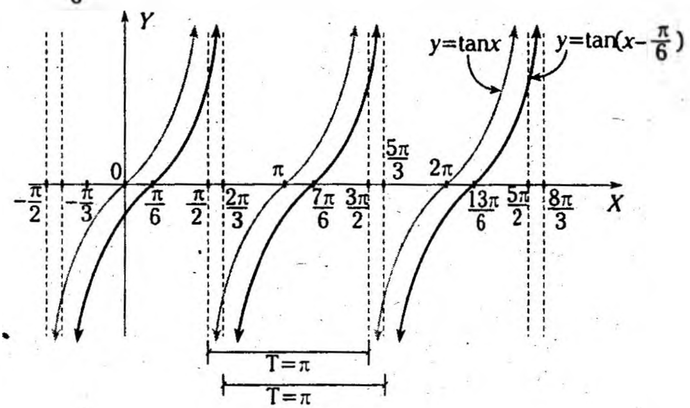
Grafique las funciones que tienen por regla de correspondencia

i) $y=\tan\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)$ ii) $y=\cos\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)$

Resolución

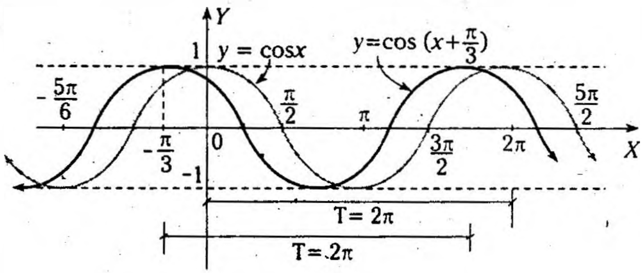
En las figuras 7.66 y 7.67 se tienen las gráficas del ejercicio anterior. También en dichas gráficas se tienen las gráficas de las funciones definidas por $\tan x$, $\cos x$ respectivamente.

- El periodo de las funciones que tienen por regla de correspondencia $y=\tan x$, $y=\tan\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)$ es el mismo e igual a p. Nótese que la gráfica de la función definida por $y=\tan\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)$ se ha generado por el desplazamiento de $\dfrac{\pi}{6}$ unidades a la derecha con respecto a la gráfica de la función definida por $y=\tan x$.



(a)

- El periodo de las funciones que tienen por regla de correspondencia $y=\cos x$, $y=\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$ es el mismo y es igual a 2π. Nótese que la gráfica de la función definida por $y=\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$ se ha generado un desplazamiento de $\frac{\pi}{3}$ unidades a la izquierda, con respecto a la gráfica de la función definida por $y=\cos x$.



(b)
Figura 7.44

Realizando el estudio de función definida por $y=\text{sen}(Bx+C)$ vemos que cuando $Bx+C=0$, $x=-\frac{C}{B}$, cuando $Bx+C=\pi$, $x=\frac{\pi}{B}-\frac{C}{B}$ y cuando $Bx+C=2\pi$; $x=\frac{2\pi}{B}-\frac{C}{B}$. De aquí que el cambio de fase venga dado por el número $\left(-\frac{C}{B}\right)$

Nota

Si $\left(-\frac{C}{B}\right)>0$ la función se desplaza hacia la derecha.

Si $\left(-\frac{C}{B}\right)<0$ la función se desplaza hacia la izquierda.

Luego estos conceptos de amplitud, periodo y número de fase podemos aplicarlo a la función que tiene por regla de correspondencia

$$y=A\text{sen}(Bx+C)+D$$

Entonces

- $|A|$ es la **amplitud** de la función.
- $\frac{2\pi}{|B|}$ es el **periodo** de la función.
- $-\frac{C}{B}$ es el cambio de fase o **número de fase** de la función.
- D es una constante que indica el **desplazamiento vertical**.

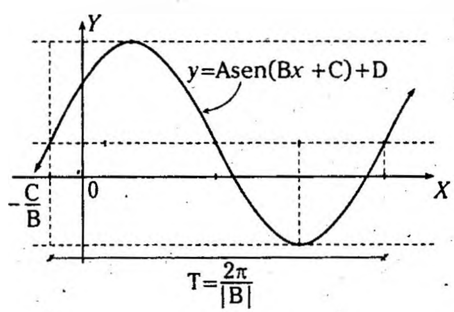


Figura 7.45

Nota

$D > 0$ se desplaza D unidades hacia arriba.
$D < 0$ se desplaza $|D|$ unidades hacia abajo.

En la figura 7.45 se tiene la gráfica de la función $y = A\text{sen}(Bx + C) + D$ considerando a las constantes A, B, C, y D positivas.

Observación

De la función que tiene por regla de correspondencia $y = A\,FT(Bx + C) + D$, donde A, B, C y D son constantes con A y B diferentes de cero. Entonces el periodo y cambio de fase de la función es como sigue en el cuadro.

F.T.	PERIODO	CAMBIO DE FASE
Seno, coseno, secante y cosecante.	$\frac{2\pi}{\lvert B\rvert}$	$-\frac{C}{B}$
Tangente y cotangente.	$\frac{\pi}{\lvert B\rvert}$	

Ejemplos

- El periodo de la función definido por $y = 3\text{sen}\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) + 4$ es $T = \frac{2\pi}{|2|} = 2$ y el cambio de fase es $-\frac{C}{B} = -\frac{\pi/3}{2} = -\frac{\pi}{6}$.
- El periodo de la función definido por $y = 2\tan(4x - 7)$, es $T = \frac{\pi}{|4|} = \frac{\pi}{4}$ y el cambio de fase es $-\frac{C}{B} = -\frac{(-7)}{4} = \frac{7}{4}$.
- El periodo de la función definido por $y = \frac{1}{3}\sec(-\pi x + 2) + 4$, es $T = \frac{2\pi}{|-\pi|} = 2$, y el cambio de fase $-\frac{C}{B} = \frac{-2}{-\pi} = \frac{2}{\pi}$.
- El periodo de la función definido por $y = 6\cos\left(4\pi x - \frac{\pi}{3}\right)$ es $T = \frac{2\pi}{|4\pi|} = \frac{1}{2}$, y el cambio de fase es $-\frac{C}{B} = -\frac{-\frac{\pi}{3}}{4\pi} = \frac{1}{12}$.

Adición y Multiplicación de Funciones

Sean las funciones definidas por $y=f(x)$ e $y=g(x)$ cuyos dominios son respectivamente Dom f y Dom g. En la intersección de los dominios de estas funciones, quedan definidas las funciones $y=f(x)+g(x)$; $y=f(x)g(x)$.

Regla 9

Para obtener la gráfica de la función $y=f(x)+g(x)$ a partir de las gráficas de las funciones f y g, es necesario sumar los valores correspondientes de las ordenadas de las gráficas de estas funciones.

Ejemplo

Construya el gráfico de la función f; si $f(x)=x+\operatorname{sen}x$

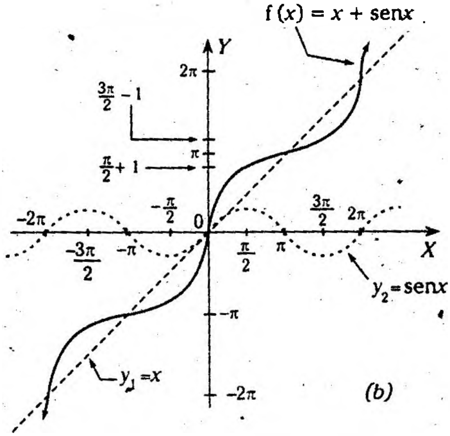
Resolución

Consideremos $y_1=x$ e $y_2=\operatorname{sen}x$

Seleccionemos algunos valores de $x\in$ Dom f y evaluemos la suma de ordenadas y_1+y_2.

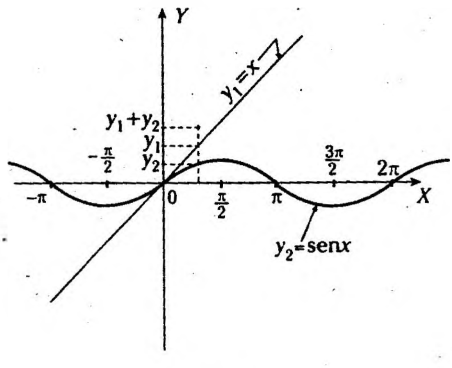
x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$f(x)=y_1+y_2$	0	$\frac{\pi}{2}+1$	π	$\frac{3\pi}{2}-1$	2π

Tabla 9



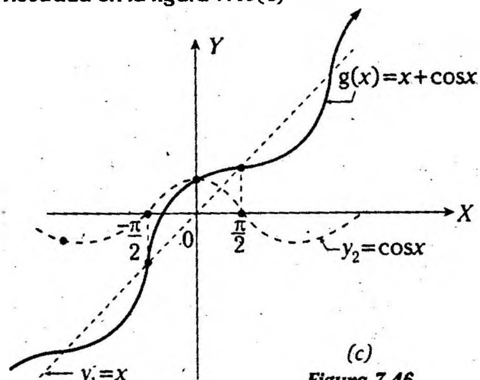
(b)

En la figura 7.46(a), se observa las gráficas de las funciones previas, luego aplicando la suma de ordenadas obtenemos en la figura 7.46(b) la gráfica de f.



(a)

Teniendo en cuenta el mismo procedimiento para la obtención de la gráfica de la función $f(x)=x+\operatorname{sen}x$, usted puede verificar que la gráfica de la función $g(x)=x+\cos x$ es tal como la mostrada en la figura 7.46(c)



(c)

Figura 7.46

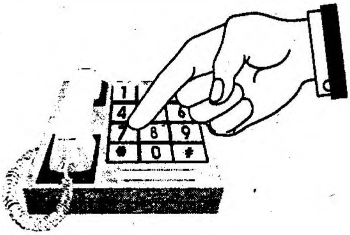
Aplicación

SUMA DE FUNCIONES (Teléfonos fijos)

Cada botón o tecla produce un sonido único, el sonido producido es la suma de dos tonos, dados por

$$y = \text{sen}(2\pi R t) \;\; ; \;\; y = \text{sen}(2\pi h t)$$

donde R y h son las frecuencias (ciclos por segundo) bajas y altas. Por ejemplo, si se oprime el 7



la frecuencia baja es R=852 ciclos por segundo, y la frecuencia alta es h=1209 ciclos por segundo, entonces la ecuación que representa el sonido emitido al oprimir el número 7 es

$$y = \text{sen}2\pi\,(852)t \;+\; \text{sen}2\pi\,(1209)t$$

Expuesto lo anterior podemos obtener la gráfica de la ecuación que representa el sonido al oprimir la tecla del número 7, dicha gráfica senoidal la mostramos a continuación

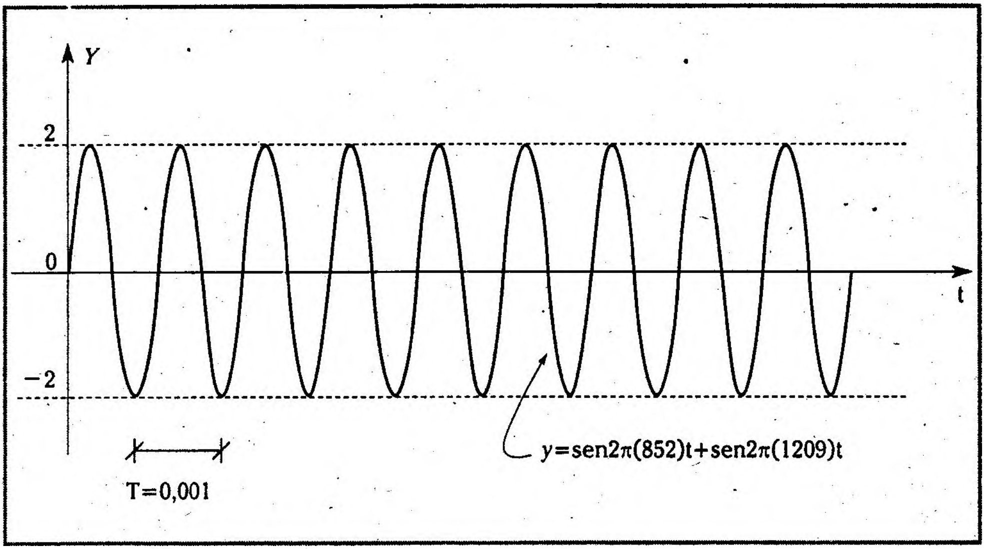


Figura 7.47

Regla 10

Para obtener la gráfica de la función $y=f(x).g(x)$ a partir de las gráficas de las funciones f y g es necesario multiplicar los valores correspondientes de las ordenadas de las gráficas de estas funciones.

Ejemplo

Construya el gráfico de la función f si $f(x)=x\operatorname{sen}x$

Resolución

Consideramos $y_1=x$ e $y_2=\operatorname{sen}x$

Seleccionamos algunos valores de $x\in$ Dom f y evaluamos el producto $y_1 . y_2$.

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$f(x)=y_1 y_2$	0	$\frac{\pi}{2}$	0	$-\frac{3\pi}{2}$	0

Tabla 10

Además, si evaluamos $f(-x)=(-x)(-\operatorname{sen}x)=x\operatorname{sen}x$, entonces $f(-x)=f(x)$ verificamos que la función es par, luego el gráfico de f es simétrico respecto al eje Y.

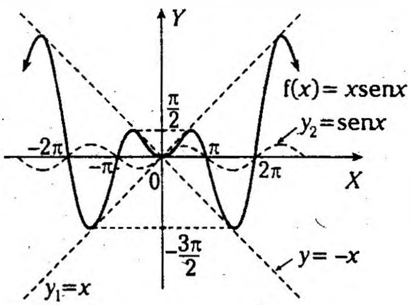
Analizando para $x>0 \wedge -1\leq \operatorname{sen}x\leq 1$

$\Rightarrow$ multiplicando por (x) a los valores del sen$x$

$-x \leq x\operatorname{sen}x \leq x$

así la gráfica de f se encuentra entres las rectas $y=x$ e $y=-x$.

A la función $f(x)=x\operatorname{sen}x; x\geq 0$ se denomina **onda senoidal amplificada** (ver figura 7.48(a)), también hay otro tipo de ondas denominadas amortiguadas sobre la cual citamos un alcance.

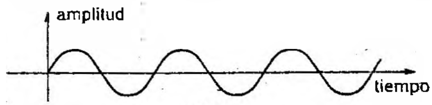


(a)

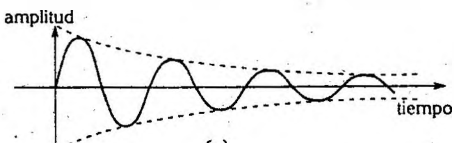
Los movimientos amortiguados

Las vibraciones constituyen un problema, tanto para la Física como para la ingeniería y la técnica de las construcciones. Ellas se manifiestan de modo simple, como ocurre en el caso del movimiento oscilatorio de un péndulo: o complejo, como lo es el comportamiento de un amortiguador de automóvil. En el primer caso el movimiento es **armónico simple**; en el segundo, se le llama **amortiguado**. Tomando como partida de la medición del tiempo un instante en el cual el punto pasa por el origen, su posición es representada en función del tiempo, por la fórmula $x=a\cos\frac{2\pi t}{T}$.

Según la evolución de ese fenómeno en el tiempo se obtienen diversas leyes para el movimiento oscilatorio. En la figura 7.48(b) el amortiguamiento es nulo, el movimiento está representado por una senoide regular. En la figura 7.48(c) el amortiguamiento es suave; el movimiento es representado por una senoide encerrada entre dos exponenciales simétricas con el eje de las abscisas (tiempo). Las exponenciales representan la ley según la cual la amplitud de las oscilaciones disminuyen con el tiempo. La figura 7.48(d) muestra que con un amortiguamiento muy fuerte las oscilaciones cesan.



(b)



(c)



(d)

Figura 7.48

Ejemplos de Funciones con dos Variables

Como usted se habrá informado en el capítulo V (Identidades)

$$\text{sen}(x+y) = \text{sen}x+\text{sen}y \quad .... (1) \qquad \text{(No es una identidad)}$$

Puesto que sabemos que la identidad correspondiente para $\text{sen}(x+y)$ es

$$\text{sen}(x+y)=\text{sen}x\cos y+\text{sen}y\cos x \quad ....(2)$$

y no corresponde a (1).

Entonces surge la interrogante ¿cómo podría comprobar, al menos una forma, que $\text{sen}(x+y) = \text{sen}x+\text{sen}y$ no se verifica?

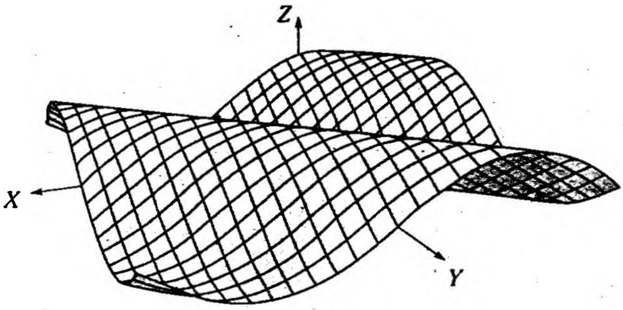
Una posible respuesta sería realizar la gráfica de cada una de las siguientes funciones.

$$z = \text{sen}(x+y) \quad .... (3)$$

$$z = \text{sen}x+\text{sen}y \quad .... (4)$$

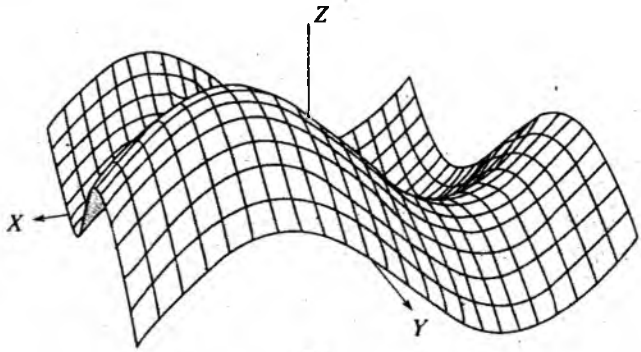
Antes de ver la gráfica debe entender que 3 y 4 son funciones de dos variables y su gráfica estará representada por una superficie. En la figura 7.49(a) se representa la gráfica de $z=\text{sen}(x+y)$; mientras que en la figura 7.49(b) se representa la gráfica de la función $z=\text{sen}(x)+\text{sen}(y)$, esto es

$z = \text{sen}(x+y)$



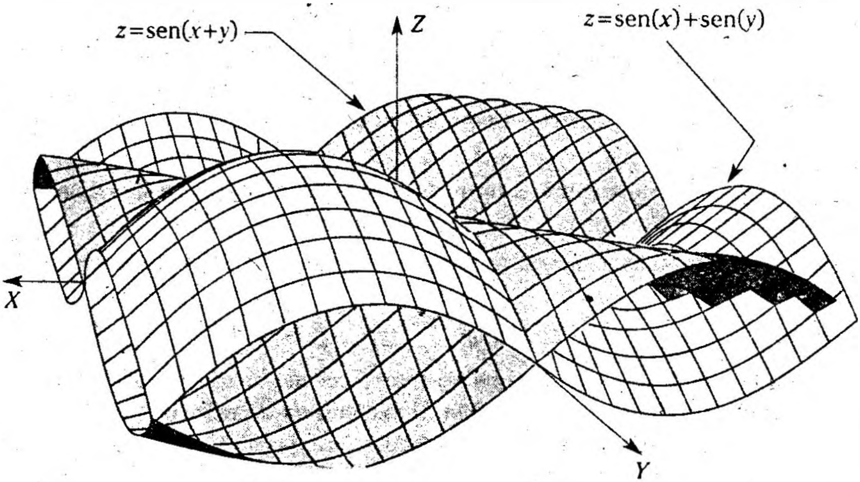
(a)

$z = \text{sen}(x)+\text{sen}(y)$



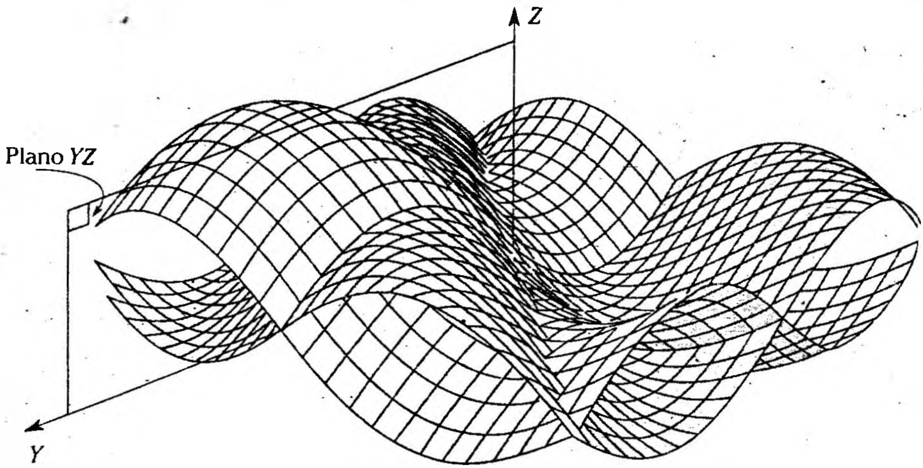
(b)

Si superponemos estas dos superficies obtendremos la figura 7.49(c)



(c)

Y si se gira un poco los ejes X e Y en sentido horario respecto del eje Z obtendríamos la figura 7.49(d).



(d)

Figura 7.49

Y si analizamos un poco más las imágenes de dichas funciones (las superficies) podemos concluir que no coinciden, sin embargo si planteamos la ecuación

$$\operatorname{sen}(x+y)=\operatorname{sen}x+\operatorname{sen}y$$

ésta tiene soluciones ya que como podrá observar en las figura 7.49(c) y 7.49(d) las superficies de ambas funciones se intersectan a lo largo de una sinusoide contenida en el plano YZ, también a lo largo de otra sinusoide contenida en el plano XZ y a lo largo de una recta contenida en el plano XY.

Problemas Resueltos

Problema 1

Determine el dominio de las siguientes funciones

I. $f(x)=\dfrac{\cos x}{1-\operatorname{sen} x}$

II. $g(x)=\dfrac{\tan x}{\cos x-1}$

Resolución

I. $f(x) = \dfrac{\cos x}{1-\operatorname{sen} x}$

El dominio de f está definido por $\operatorname{Dom} f=\{x/1-\operatorname{sen} x\neq 0\}$

de donde $\operatorname{sen} x\neq 1 \Rightarrow x\neq\dfrac{\pi}{2}+2K\pi;\ K\in Z$

Finalmente

$$\operatorname{Dom} f=\left\{x/x\in R-\left(\frac{\pi}{2}+2K\pi\right);\ K\in Z\right\}$$

II. $g(x)=\dfrac{\tan x}{\cos x-1}$

A diferencia del problema anterior, en este caso también hay que tomar en cuenta la restricción de la función tangente, es decir

$$\operatorname{Dom} g=\left\{x/\cos x-1\neq 1;\ x\neq(2K+1)\frac{\pi}{2};\ K\in Z\right\}$$

de donde $\cos x\neq 1;\ \ x\neq(2K+1)\dfrac{\pi}{2}$, es decir $x\neq 2K\pi$ y $x\neq(2K+1)\dfrac{\pi}{2}$

Finalmente

$$\operatorname{Dom} g=\left\{x/x\in R-2K\pi\cup(2K+1)\frac{\pi}{2};\ K\in Z\right\}.$$

Problema 2

Halle el rango de las siguientes funciones

I. $f(x)=\operatorname{sen}^2x+2\operatorname{sen}x+1$

II. $g(x)=\operatorname{sen}x+\cos 2x$

Resolución

I. $f(x)=\operatorname{sen}^2x+2\operatorname{sen}x+1$

La función está definida $\forall x\in R$, no es necesario hacer alguna restricción.
Sabemos también que el rango de f son todos los valores de f.
Para poder hallar los valores de f se sugiere que su regla de correspondencia se exprese en términos de un solo operador trigonométrico, que afecte a la variable, esto en lo posible, sino se buscará alguna forma conocida como número más sus recíprocos, funciones crecientes, etc.

A partir de $\quad f(x) = \operatorname{sen}^2x+2\operatorname{sen}x+1$

Se obtiene $\quad f(x) = (\operatorname{sen}x+1)^2 \quad .... (1)$

(presentan un solo operador trigonométrico)

A continuación se deberá generar esta expresión (1) a partir del dominio $\operatorname{Dom} f = R$

Como $\quad x\in R \Rightarrow -1\leq \operatorname{sen} x\leq 1$

Más (1) $\quad -1+(1)\leq\operatorname{sen}x+(1)\leq 1+(1)$

$$0\leq\operatorname{sen}x+1\leq 2$$

Elevando al cuadrado

$$(0)^2\leq(\operatorname{sen}x+1)^2\leq 2^2$$

$$0\leq\underbrace{(\operatorname{sen}x+1)^2}_{f(x)}\leq 4$$

$$0\leq f(x)\leq 4$$

Por lo tanto afirmamos que Ran f = [0;4]

A continuación resolvemos la parte(II) de igual forma.

II. $g(x)=\text{sen}x+\cos 2x$

Como observamos, no hay ningún tipo de restricción, por lo que afirmamos que g se halla definido $\forall\ x\in\mathbb{R}$, entonces $\text{Dom}g=\mathbb{R}$. Seguidamente trataremos de expresar su regla de correspondencia en términos de un solo operador trigonométrico, a partir de

$g(x)=\text{sen}x+\cos 2x$ .... (1)

(Presenta dos operadores trigonométricos)

De la identidad $\cos 2x = 1-2\text{sen}^2x$ .... (2)

Reemplazando (2) en (1)

$$g(x)=\text{sen}x+1-2\text{sen}^2x$$

Seguidamente buscaremos la forma de completar cuadrados

$$\Rightarrow g(x)=-2\left[\text{sen}^2x-\frac{1}{2}\text{sen}x\right]+1$$

$$\Rightarrow g(x)=-2\Big[\underbrace{\text{sen}^2x-\frac{1}{2}\text{sen}x+\left(\frac{1}{4}\right)^2}_{\left(\text{sen}x-\frac{1}{4}\right)^2}-\left(\frac{1}{4}\right)^2\Big]+1$$

$$\Rightarrow g(x)=-2\left(\text{sen}x-\frac{1}{4}\right)^2+2\left(\frac{1}{4}\right)^2+1$$

$$\Rightarrow g(x)=-2\left(\text{sen}x-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{9}{8}\ ...\ (3)$$

(presenta un solo operador trigonométrico)

Seguidamente se deberá generar la expresión (3) a partir del dominio $\text{Dom}g=\mathbb{R}$

Como $x\in\mathbb{R}$, entonces

$$-1\le\text{sen}x\le 1$$

Más $\left(-\frac{1}{4}\right)$: $-1+\left(-\frac{1}{4}\right)\le\text{sen}x+\left(-\frac{1}{4}\right)\le 1+\left(-\frac{1}{4}\right)$

$$-\frac{5}{4}\le\text{sen}x-\frac{1}{4}\le\frac{3}{4}$$

Elevando al cuadrado

$$0\le\left(\text{sen}x-\frac{1}{4}\right)^2\le\frac{25}{16}$$

Por (-2) $(-2)(0)\ge(-2)\left(\text{sen}x-\frac{1}{4}\right)^2\ge\frac{25}{16}(-2)$

Cambiando el sentido de la desigualdad

$$\Rightarrow -\frac{25}{8}\le-2\left(\text{sen}x-\frac{1}{4}\right)^2\le 0$$

Más $\left(\frac{9}{8}\right)$: $\underbrace{-\frac{25}{8}+\left(\frac{9}{8}\right)}_{-2}\le-2\left(\text{sen}x-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{9}{8}\le 0+\frac{9}{8}$

$$-2\le\underbrace{-2\left(\text{sen}x-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{9}{8}}_{g(x)}\le\frac{9}{8}$$

$$-2\le g(x)\le\frac{9}{8}$$

$\therefore$ podemos afirmar que $\text{Ran}g=\left[-2;\frac{9}{8}\right]$

Problema 3

Determine el rango de la siguiente función

$$f(x)=\frac{4\text{sen}^2x\cos^2x}{(\text{sen}x\cos x+1)(\text{sen}x\cos x-1)}$$

Resolución

Efectuando en f, tenemos

$$f(x)=\frac{4\text{sen}^2x\cos^2x}{\text{sen}^2x.\cos^2x-1}$$ (en el denominador se utilizó diferencia de cuadrados)

Como $0\le\text{sen}^2x\cos^2x\le\frac{1}{4}$ entonces $(\text{sen}^2x\cos^2x-1)$ nunca toma el valor de cero, por lo tanto f está definida $\forall x\in\mathbb{R}$.

Luego $f(x)=4\left(1+\frac{1}{\text{sen}^2x\cos^2x-1}\right)$

Como $0\le\text{sen}^2x\cos^2x\le\frac{1}{4}$

formamos la función f sumando (–1)

$$\Rightarrow\ 0-1\le \operatorname{sen}^2 x\cos^2 x-1\le \frac{1}{4}-1$$

$$\Rightarrow\ -1\le \operatorname{sen}^2 x\cos^2 x-1\le -\frac{3}{4}$$

Invirtiendo $\quad -1\ge \dfrac{1}{\operatorname{sen}^2 x\cos^2 x-1}\ge -\dfrac{4}{3}$

cambiamos el sentido de la desigualdad

$$\Rightarrow\ -\frac{4}{3}\le \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x\cos^2 x-1}\le -1$$

Sumando (1)

$$\Rightarrow\ 1-\frac{4}{3}\le 1+\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x\cos^2 x-1}\le -1+1$$

$$\Rightarrow\ -\frac{1}{3}\le 1+\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x\cos^2 x-1}\le 0$$

Multiplicando por (4)

$$\Rightarrow\ -\frac{4}{3}\le 4\left(1+\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x\cos^2 x-1}\right)\le 0$$

$$\Rightarrow\ -\frac{4}{3}\le f(x)\le 0$$

$$\therefore\ \operatorname{Ran} f=\left[-\frac{4}{3};0\right]$$

Problema 4

Halle el dominio y rango de $f(x)=\dfrac{\sec x}{|\csc x|}$

Resolución

Se sabe, por teoría, que la secante no está definida para arcos que adoptan la forma $(2K+1)\dfrac{\pi}{2}$; $(K\in\mathbb{Z})\ \Rightarrow\ x\ne(2k+1)\dfrac{\pi}{2};\ (K\in\mathbb{Z})$ .... (1)

Asimismo la cosecante no está definida para arcos que adoptan la forma

$K\pi\,(K\in\mathbb{Z})\ \Rightarrow\ x\ne K\pi;\ (K\in\mathbb{Z})$ .... (2)

De (1) y (2) se concluye $x\in\mathbb{R}-\dfrac{K\pi}{2}$; $(K\in\mathbb{Z})$

$\therefore$ Dom $f=\mathbb{R}-\dfrac{K\pi}{2};\ (K\in\mathbb{Z})$

Hallando el rango

I. Si $x\in IC\vee x\in IIC\Rightarrow \csc x>0\Rightarrow|\csc x|=\csc x$

$$\therefore\ f(x)=\frac{\sec x}{\csc x}$$

$$\Rightarrow f(x)=\frac{\frac{1}{\cos x}}{\frac{1}{\operatorname{sen} x}}\Rightarrow f(x)=\tan x \quad ..... (3)$$

II. Si $x\in IIIC\vee x\in IVC\Rightarrow \csc x<0\Rightarrow|\csc x|=-\csc x$

$$\therefore\ f(x)=\frac{\sec x}{-\csc x}$$

$$\Rightarrow f(x)=-\frac{\frac{1}{\cos x}}{\frac{1}{\operatorname{sen} x}}\Rightarrow f(x)=-\tan x \quad ..... (4)$$

Como $x\ne\dfrac{K\pi}{2}\Rightarrow \tan x\ne 0$ de (3) y (4) se concluye Ran f = $\mathbb{R}-\{0\}$

Problema 5

De la función f, definida por $f(x)=\dfrac{8}{2-\sec^2 x}$ analice la verdad o falsedad de las siguientes proposiciones

I. Dom f = $\mathbb{R}-\left\{(2n+1)\dfrac{\pi}{2}\right\};\ n\in\mathbb{Z}$

II. Ran f = $\langle 0;+\infty\rangle$

III. f es una función par

Resolución

I. Para que f este definida, debemos tener en cuenta que por ser x argumento de la secante,

tenemos que $x \neq (2K+1)\frac{\pi}{2}$; $(n \in \mathbb{Z})$

Además, $\sec^2 x \neq 2 \Rightarrow \sec x \neq \pm\sqrt{2}$

$$\Rightarrow x \neq ...; -\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}; \frac{5\pi}{4}; ...$$

$$\Rightarrow x \neq n\pi \pm \frac{\pi}{4}; \ (n \in \mathbb{Z})$$

Entonces concluimos que

$$\text{Dom}\, f = \mathbb{R} - \left\{(2K+1)\frac{\pi}{2}; n\pi \pm \frac{\pi}{4}\right\}; \ n, K \in \mathbb{Z}$$

Por lo tanto, I es falso.

II. Ahora considerando el dominio, tenemos que

$$\sec^2 x \geq 1 \ ; \ \sec x \neq \pm\sqrt{2}$$

$$-\sec^2 x \leq -1 \ ; \ -\sec^2 x \neq -2$$

$$\underbrace{2-\sec^2 x \leq 1}_{} \ ; \ 2-\sec^2 x \neq 0$$

$$2-\sec^2 x < 0 \vee 0 < 2-\sec^2 x \leq 1$$

$$\frac{1}{2-\sec^2 x} < 0 \vee \frac{1}{2-\sec^2 x} \geq 1$$

Las particiones se han invertido

$$\underbrace{\frac{8}{2-\sec^2 x}}_{f(x)} < 0 \vee \underbrace{\frac{8}{2-\sec^2 x}}_{f(x)} \geq 8$$

$$\Rightarrow \text{Ran}\, f = \langle -\infty; 0\rangle \cup [8; \infty\rangle$$

Por lo tanto, II es falso.

III. Finalmente, como

$$f(-x) = \frac{8}{2-\sec^2(-x)} = \frac{8}{2-\sec^2 x} = f(x)$$

entonces, f es una función par; III es verdadero.

Problema 6

Averigüe qué funciones son pares o impares en los siguientes casos que tienen por regla de correspondencia.

I. $f(x) = \frac{x}{\cos x}$

II. $f(x) = \sec x - |\tan x|$

III. $f(x) = 2\text{sen}x + 3\cos x$

IV. $f(x) = x^3 \tan(\pi x)$

Resolución

De acuerdo a la definición de función par o impar, busquemos la ecuación de $f(-x)$

I. $f(-x) = \frac{-x}{\cos(-x)} = \frac{-x}{\cos x}$, entonces

$f(-x) = -\underbrace{\frac{x}{\cos x}}_{f(x)}$, luego $f(-x) = -f(x)$

$\therefore$ f es una función impar.

II. $f(-x) = \sec(-x) - |\tan(-x)|$

$f(-x) = \sec x - |\tan x|$

entonces $f(-x) = \sec x - |\tan x|$

luego $f(-x) = f(x)$

$\therefore$ f es una función par.

III. $f(-x) = 2\underbrace{\text{sen}(-x)}_{-\text{sen}\, x} + 3\underbrace{\cos(-x)}_{\cos x}$

$f(-x) = -2\text{sen}\, x + 3\cos x$,

entonces $f(-x) \neq f(x)$ y $f(-x) \neq -f(x)$

$\therefore$ f no es una función par, tampoco impar.

IV. $f(-x) = (-x)^3 \tan(-\pi x)$

$= (-x^3)(-\tan \pi x)$

$f(-x) = x^3 \tan(\pi x)$

$f(-x) = f(x)$

$\therefore$ f es función par

Problema 7

Sea la función f definida por la regla de correspondencia $f(x)=\sec x+\tan x$.

Si $x\in\left\langle\frac{3\pi}{2};2\pi\right]$, halle el rango.

Resolución

Transformando la función f.

$$f(x)=\underbrace{\sec x}+\underbrace{\tan x}$$

$$f(x)=\underbrace{\csc\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+\cot\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}$$

Aplicamos la identidad de arco mitad

$$\cot\frac{\theta}{2}=\csc\theta+\cot\theta$$

$$f(x)=\cot\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)$$

También, por su cofunción, obtenemos

$$f(x)=\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)\ \ldots\ldots\ (\text{I})$$

Ahora, del dato, formamos (I)

Tenemos $\frac{3\pi}{2}<x\leq 2\pi$

Multiplicando $\frac{1}{2}$: $\frac{3\pi}{4}<\frac{x}{2}\leq\pi$

Sumando $\frac{\pi}{4}$: $\frac{3\pi}{4}+\frac{\pi}{4}<\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\leq\pi+\frac{\pi}{4}$

$$\Rightarrow\ \pi<\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\leq\frac{5\pi}{4}$$

Véase la figura 7.50 donde se ha presentado los valores de $\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}$, luego obtenemos los valores de $\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$

$$\tan\pi<\underbrace{\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}\leq\tan\frac{5\pi}{4}$$

$$0<\quad f(x)\quad\leq\ 1$$

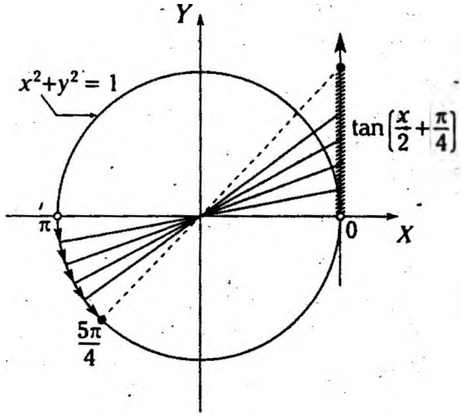


Figura 7.50

Finalmente, $\text{Ran}\,f=\langle 0;1]$

Problema 8

Halle el dominio y el rango de la función f, cuya regla de correspondencia es

$$f(x)=\sqrt{1+\text{sen}^2x}+\sqrt{1+\cos^2x}$$

Resolución

$$f(x)=\sqrt{1+\text{sen}^2x}+\sqrt{1+\cos^2x}$$

De la función f se observa que aparecen funciones seno y coseno, sabemos que están definidas en $\mathbb{R}$, además los radicales no afectan el dominio ya que $1+\text{sen}^2x>0\ \wedge\ 1+\cos^2x>0$; $\forall x\in\mathbb{R}$

Elevando al cuadrado

$$f^2(x)=3+2\sqrt{2+\text{sen}^2x\cos^2x}$$

Extrayendo raíz cuadrada

$$f(x)=\sqrt{3+2\sqrt{2+\text{sen}^2x\cos^2x}}$$

Recordemos

$$-\frac{1}{2}\leq \text{sen}\,x\cos x\leq\frac{1}{2}\quad .... \text{(I)}$$

Formamos f(*x*) a partir de I

Elevamos al cuadrado

$$0\leq\text{sen}^2x\cos^2x\leq\frac{1}{4}$$

Sumamos 2

$$2\leq 2+\text{sen}^2x\cos^2x\leq\frac{9}{4}$$

Extraemos raíz cuadrada

$$\sqrt{2}\leq\sqrt{2+\text{sen}^2x\cos^2x}\leq\frac{3}{2}$$

Multiplicamos 2

$$2\sqrt{2}\leq 2\sqrt{2+\text{sen}^2x\cos^2x}\leq 3$$

Sumamos 3

$$3+2\sqrt{2}\leq 3+2\sqrt{2+\text{sen}^2x\cos^2x}\leq 6$$

Extraemos raíz cuadrada

$$\sqrt{3+2\sqrt{2}}\leq\sqrt{3+2\sqrt{2+\text{sen}^2x\cos^2x}}\leq\sqrt{6}$$

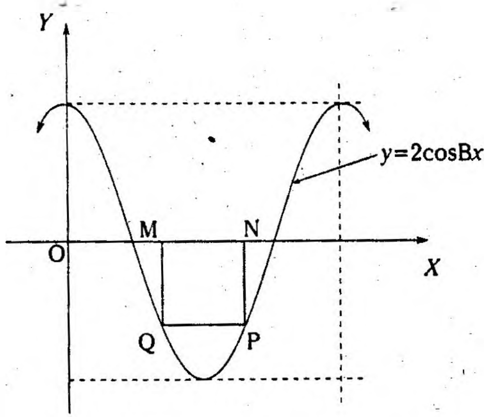
Finalmente

$$\sqrt{2}+1\leq f(x)\leq\sqrt{6}$$

$\therefore$ Ran f $=\left[\sqrt{2}+1;\sqrt{6}\right]$

Problema 9

Del gráfico 7.51(a), calcule el periodo del cosenoide, si el área de la región sombreada es 3 u^2, siendo MNPQ un cuadrado.



(a)

Resolución

Considerando ℓ al lado del cuadrado, entonces

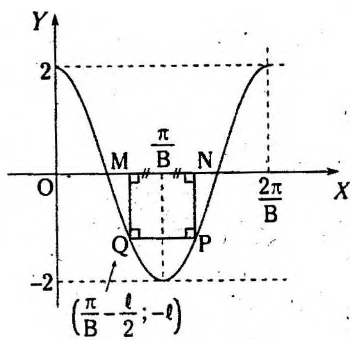
$$\ell^2=3\text{u}^2\Rightarrow\ell=\sqrt{3}\,\text{u}$$

De la ecuación

y=2cosBx

Al periodo lo expresamos como

$$T=2\left(\frac{\pi}{B}\right)\quad .... (1)$$



(b)

Figura 7.51

Del gráfico, el punto $Q\left(\frac{\pi}{B}-\frac{\ell}{2};-\ell\right)$ pertenece a la cosenoide, entonces evaluando en la ecuación, tenemos

$$-\ell=2\cos B\left(\frac{\pi}{B}-\frac{\ell}{2}\right)$$

$$-\sqrt{3}=2\cos\left(\pi-\frac{\sqrt{3}}{2}B\right)$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2}=\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}B\right) \Rightarrow \frac{\sqrt{3}B}{2}=\frac{\pi}{6}$$

Luego, $\frac{\pi}{B}=3\sqrt{3}$

Reemplazando en (1)

$$T=2(3\sqrt{3})=6\sqrt{3} \quad \therefore\ T=6\sqrt{3}$$

Problema 10

Halle la regla de correspondencia de la siguiente senoide.

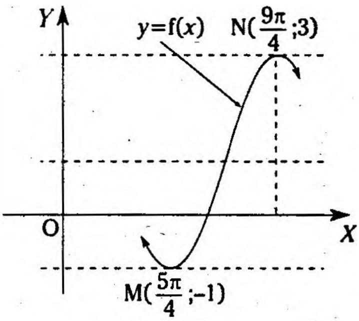


Figura 7.52

Resolución

Consideremos la ecuación de la onda generalizada $f(x)=A\text{sen}(Bx+C)+D$. Para determinar la amplitud del gráfico es conocido: $y_{max}=3$, $y_{min}=-1$. Luego, la amplitud de f es $|A|=\frac{y_{max}-y_{min}}{2}=2$, es decir A=2. La constante B es sabido que se relaciona con el periodo, así:

$T=\frac{2\pi}{B}$ siendo T el periodo de f.

Pero del gráfico, la diferencia entre las abscisas de N y M nos indica la mitad del periodo, así:

$\frac{T}{2}=\frac{9\pi}{4}-\frac{5\pi}{4} \Rightarrow T=2\pi$, luego B=1. La constante D nos indica el desplazamiento vertical que según la gráfica es $D=y_{max}-|A| \Rightarrow D=3-2=1$

Luego, la ecuación quedaría así

$$f(x)=2\text{sen}(x+C)+1 \quad \text{.......... (I)}$$

Evaluemos el punto M: $f\left(\frac{5\pi}{4};-1\right)$ en (I), para calcular C: $\underbrace{f\left(\frac{5\pi}{4}\right)}_{-1}=2\text{sen}\left(\frac{5\pi}{4}+C\right)+1$

$$\Rightarrow \text{sen}\left(\frac{5\pi}{4}+C\right)=-1\ ;\ \frac{5\pi}{4}+C=\frac{3\pi}{2} \Rightarrow C=\frac{\pi}{4}$$

Por lo tanto, la ecuación de f es

$$f(x)=2\text{sen}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+1$$

Problema 11

Determine el periodo de las siguientes funciones

I. $f(x)=2\text{sen}3x-\cos 2x$

II. $h(x)=\tan(\cos x)$

Resolución

Recordemos que para toda función periódica, debe existir un número real T>0, tal que $f(x+T)=f(x)$

De (I) $f(x+T)=2\text{sen}3(x+T)-\cos 2(x+T)$

$f(x+T)=2\text{sen}(3x+3T)-\cos(2x+2T)$;

$f(x)=2\text{sen}3x-\cos 2x$

Se cumple $f(x+T)=f(x)$ si

$$3T=2\pi;4\pi;6\pi;8\pi;.....;2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow T=\frac{2\pi}{3};\frac{4\pi}{3};\boxed{2\pi};\frac{8\pi}{3};.....;2k\frac{\pi}{3},\ k\in\mathbb{Z}$$

También, $2T=2\pi;4\pi;6\pi;8\pi;.....;2n\pi,\ n\in\mathbb{Z}$

$$\Rightarrow T=\pi;\boxed{2\pi};3\pi;4\pi;.....;n\pi;n\in\mathbb{Z}$$

Luego, elegimos al menor valor de T común.

$\therefore$ periodo de f es 2π.

De (II)

$$h(x+T)=\tan[\cos(x+T)]\ ;\ h(x)=\tan(\cos x)$$

Se cumple $h(x+T)=h(x)$

Si $T=2\pi;4\pi;6\pi;.....;2\pi k;k\in\mathbb{Z}$

$\therefore$ periodo de h es 2π.

Problema 12

Halle el rango y construya la gráfica de la siguiente función

$$f(x)=\sqrt{|\csc x|(|\csc x|+\csc x)}$$

tal que $x\in\langle 0;2\pi\rangle-\{\pi\}$

Resolución

Consideremos

I. $0<x<\pi \Rightarrow |\csc x|=\csc x$

II. $\pi<x<2\pi \Rightarrow |\csc x|=-\csc x$

Luego, sustituyendo en $f(x)$.

I. $0<x<\pi$ $\quad f(x)=\sqrt{\underbrace{|\csc x|}_{\csc x}(\underbrace{|\csc x|}_{\csc x}+\csc x)}$

$|\csc x|=\csc x$

se obtiene

$$f(x)=\sqrt{\csc x(\csc x+\csc x)}$$

$$\Rightarrow f(x)=\sqrt{\csc x(2\csc x)}$$

$$f(x)=\sqrt{2\csc^2 x}$$

$$f(x)=\sqrt{2}\,|\csc x|$$

$$f(x)=\sqrt{2}\csc x;\ 0<x<\pi \quad ...(1)$$

II. $\pi<x<2\pi$ $\quad f(x)=\sqrt{\underbrace{|\csc x|}_{-\csc x}(\underbrace{|\csc x|}_{-\csc x}+\csc x)}$

$|\csc x|=-\csc x$

se obtiene $f(x)=\sqrt{(-\csc x)\underbrace{(-\csc x+\csc x)}_{0}}$

$$\Rightarrow f(x)=\sqrt{-\csc x(0)}$$

$$f(x)=0 \quad ;\ \pi<x<2\pi \quad ...(2)$$

De (1) y (2)

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{2}\csc x & ;\ 0<x<\pi\\ 0 & ;\ \pi<x<2\pi\end{cases}$$

y su gráfica correspondiente la podemos apreciar en la figura 7.53.

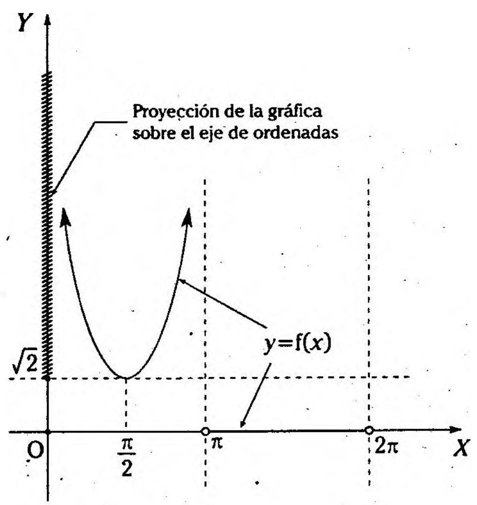


Figura 7.53

Se sabe que la proyección de la gráfica sobre el eje de ordenadas representa el rango de dicha función.

$\therefore$ Ran f $=\left[\sqrt{2};+\infty\right\rangle\cup\{0\}$

Problema 13

Represente el gráfico de la función

$$g(x)=\left|\frac{\sec x-\cos x}{\operatorname{sen} x}\right|+1$$

en el intervalo $\left\langle-\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right\rangle$

Resolución

Antes de graficar llevemos la función g a una forma más simple.

$$g(x)=\left|\frac{\frac{1}{\cos x}-\cos x}{\operatorname{sen} x}\right|+1=\left|\frac{1-\cos^2 x}{\cos x\operatorname{sen} x}\right|+1$$

$$g(x)=\left|\frac{\operatorname{sen} x\,\operatorname{sen} x}{\cos x\,\operatorname{sen} x}\right|+1=|\tan x|+1$$

$$\Rightarrow\ g(x)=|\tan x|+1$$

Donde $\operatorname{sen} x\cos x\neq 0\Rightarrow x\neq\frac{k\pi}{2}$, $k\in\mathbb{Z}$ es decir,

$$x\in\left\langle-\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right\rangle-\left\{0;\frac{\pi}{2};\pi\right\}$$

Luego, la gráfica es la siguiente

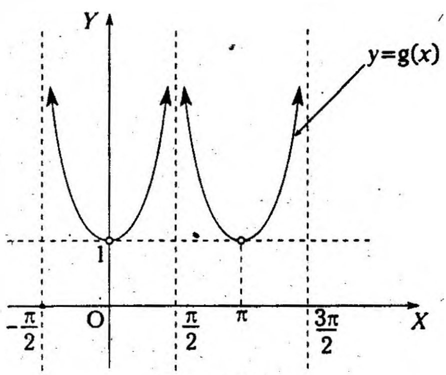


Figura 7.54

Problema 14

Construya el gráfico de

$$f(x)=\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{2}\right)}{\sqrt{1+\cot^2\left(\frac{\pi x}{2}\right)}}+\frac{\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)}{\sqrt{1+\tan^2\left(\frac{\pi x}{2}\right)}}$$

en el intervalo de $0<x<4$

Resolución

Se observa que $\frac{\pi x}{2}\neq\frac{k\pi}{2}\Big/ k\in\mathbb{Z}\ \Rightarrow\ x\neq k$

Luego

$$x\neq\{1;2;3\}$$

Reduciendo la regla de correspondencia

$$f(x)=\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{2}\right)}{\sqrt{\csc^2\left(\frac{\pi x}{2}\right)}}+\frac{\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)}{\sqrt{\sec^2\left(\frac{\pi x}{2}\right)}}$$

En los denominadores aplicación de identidades trigonométricas fundamentales.

$$f(x)=\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{2}\right)}{\left|\csc\frac{\pi x}{2}\right|}+\frac{\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)}{\left|\sec\frac{\pi x}{2}\right|}$$

puesto que $\sqrt{a^2}=|a|$

$$f(x)=\operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{2}\right)\left|\operatorname{sen}\frac{\pi x}{2}\right|+\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)\left|\cos\frac{\pi x}{2}\right|$$

Analizando por intervalos

$$f(x)=\begin{cases}1 & ;\ 0<x<1\\ -\cos\pi x & ;\ 1<x<2\\ -1 & ;\ 2<x<3\\ \cos\pi x & ;\ 3<x<4\end{cases}$$

Luego, graficando tenemos

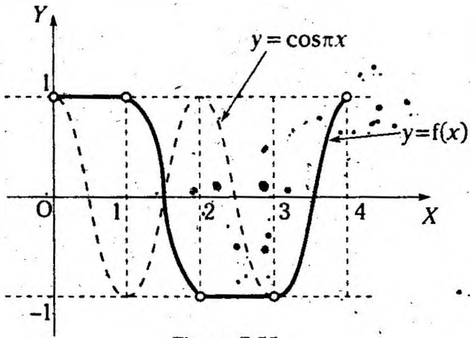


Figura 7.55

Problema 15

¿Para qué valores de x, el gráfico de la función $f(x)=\tan x-\sqrt{2}\operatorname{sen}x$ intersecta al eje de abscisas?

Resolución

Debemos notar que el valor de la función, tal que el gráfico de éste intersecta al eje X, es nulo cuando $f(x)=0$

Entonces $\tan x-\sqrt{2}\operatorname{sen}x=0$

$$\frac{\operatorname{sen}x}{\cos x}-\sqrt{2}\operatorname{sen}x=0$$

$$\operatorname{sen}x(\sec x-\sqrt{2})=0$$

Luego se cumple

$$\operatorname{sen}x=0 \vee \sec x-\sqrt{2}=0 \quad (\sec x=\sqrt{2})$$

$$\Rightarrow \quad x=\pi k \quad \vee \quad x=2\pi k\pm\frac{\pi}{4}; \ (k\in \mathbb{Z})$$

$$\therefore \ x=\left\{\pi k; 2\pi k\pm\frac{\pi}{4}\right\}; \ (k\in \mathbb{Z})$$

Problema 16

Dadas las funciones $f(x) = \operatorname{sen}^4x+\operatorname{sen}x$ y $g(x)=\cos^4x$, halle cuántos puntos de intersección existe entre las funciones dadas en el intervalo $[0;2\pi]$

Resolución

En los puntos de intersección de las gráficas, de dos funciones, se cumple que la abscisa y la ordenada son comunes a ambas gráficas.

Es decir $f(x) = g(x)$

$$\Rightarrow \ \operatorname{sen}^4x+\operatorname{sen}x = \cos^4x$$

$$\Rightarrow \ \operatorname{sen}x = \cos^4x-\operatorname{sen}^4x$$

$$\Rightarrow \ \operatorname{sen}x=\underbrace{(\cos^2x-\operatorname{sen}^2x)}_{1-\operatorname{sen}^2x}\underbrace{(\cos^2x+\operatorname{sen}^2x)}_{1}$$

$$\Rightarrow \ \operatorname{sen}x = 1-2\operatorname{sen}^2x$$

$$\Rightarrow \ 2\operatorname{sen}^2x+\operatorname{sen}x-1=0$$

Factorizando obtenemos

$$(\operatorname{sen}x+1)(2\operatorname{sen}x-1)=0$$

$$\operatorname{sen}x+1=0 \ \vee \ 2\operatorname{sen}x-1=0$$

$$\operatorname{sen}x=-1 \quad \vee \quad \operatorname{sen}x=\frac{1}{2}$$

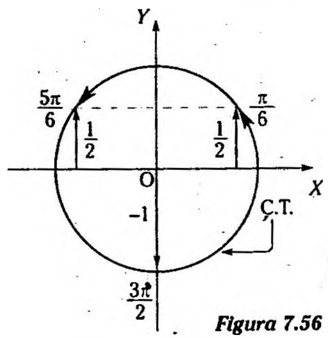


Figura 7.56

Del gráfico adjunto observamos que

$$x=\left\{\frac{\pi}{6};\frac{5\pi}{6};\frac{3\pi}{2}\right\}$$

El número de soluciones en $x\in[0;2\pi]$ es 3.

$\therefore$ el número de puntos de intersección entre los gráficos de f y g es 3.

Problema 17

Esboce la gráfica de la siguiente función g, cuya regla de correspondencia está definida por

$$g(x)=\frac{x\cot x}{\sqrt{\csc^2 x-1}}$$

Resolución

Simplificando la expresión inicial, utilizando identidades trigonométricas

$$g(x)=\frac{x\cot x}{\sqrt{1+\cot^2 x-1}}$$

$$\Rightarrow\ g(x)=\frac{x\cot x}{\sqrt{\cot^2 x}}$$

$$g(x)=\frac{x\cot x}{|\cot x|}$$

Ahora hallamos el dominio de la función

Primero

$$\cot x\neq 0\ \rightarrow\ x\neq(2n+1)\frac{\pi}{2}\Big/ n\in\mathbb{Z}\ \ldots.\ (1)$$

También por definición de cotx

$$x\neq k\pi/k\in\mathbb{Z}\ \ldots.\ (2)$$

De (1) y (2) concluimos $x\neq\frac{m\pi}{2}\Big/ m\in\mathbb{Z}$

De $g(x)=\frac{x\cot x}{|\cot x|};\ x\neq\frac{m\pi}{2}$

Redefiniendo g(x), analizando por intervalos.

$$g(x)=\begin{cases}-x & ;\ \text{si: } -\frac{\pi}{2}<x<0\\ x & ;\ \text{si: } 0<x<\frac{\pi}{2}\\ -x & ;\ \text{si: } \frac{\pi}{2}<x<\pi\\ x & ;\ \text{si: } \pi<x<\frac{3\pi}{2}\end{cases}$$

Finalmente trazamos la gráfica de g, la cual se aprecia en la figura 7.57

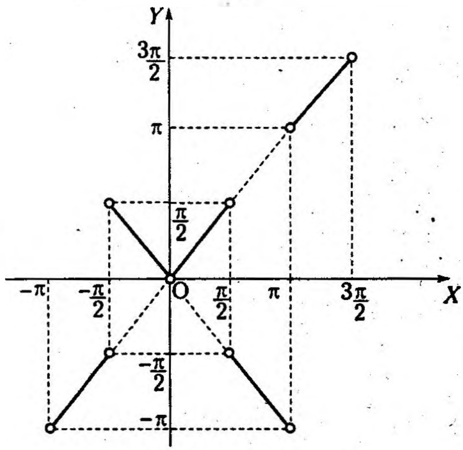


Figura 7.57

Problema 18

La función f está definida por

$$f(x)=\begin{cases}\operatorname{sen}x & ;\ x\leq\frac{\pi}{2}\\ kx+2 & ;\ x>\frac{\pi}{2}\end{cases}$$

Halle k de modo que f sea continua en $x=\frac{\pi}{2}$

Resolución

Para que tenga un mejor entendimiento acerca de este problema se le sugiere revisar el capítulo X.

Para que f sea continua en $x=\frac{\pi}{2}$, se debe verificar la existencia de

I. $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ II. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} f(x)$ III. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} f(x)=f\left(\frac{\pi}{2}\right)$

Analizando cada relación

I. $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}$

$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$, luego $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ existe

II. Aplicamos límites laterales, f tiene doble regla de correspondencia en $x=\frac{\pi}{2}$.

$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-} f(x) \Rightarrow \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \operatorname{sen}x=\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}=1$

$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^+} f(x) \Rightarrow \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^+} kx+2=\frac{k\pi}{2}+2$

Como $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} f(x)$ debe existir

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-} f(x)=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^+} f(x)$

$1=\frac{k\pi}{2}+2$

$-1=\frac{k\pi}{2} \Rightarrow k=-\frac{2}{\pi}$

III. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} f(x)=f\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$

$\therefore k=-\frac{2}{\pi}$ hace que f sea continua en $x=\frac{\pi}{2}$

Problema 19

Si el dominio de la función f definida por $f(x)=x(1-\cos x)$ es $[0;\pi]$, entonces halle los valores de f y bosqueje la gráfica de f.

Resolución

En la figura adjunta, se han graficado las funciones $y=x$ e $y=1-\cos x$ en el intervalo $[0;\pi]$. Entonces los rangos de dichas funciones son respectivamente

$[0;\pi]$ es decir $0\le x\le\pi$...(I)

$[0;2]$ es decir $0\le 1-\cos x\le 2$...(2)

Como las funciones $y=x$ e $y=1-\cos x$ son crecientes en el intervalo $[0;\pi]$, entonces las desigualdades (1) y (2) se pueden multiplicar, de donde se obtiene

$0\le x(1-\cos x)\le 2\pi$

$\Rightarrow 0\le f(x)\le 2\pi \quad \therefore \operatorname{Ran}f=[0;2\pi]$

Aplicando el método de producto de funciones, obtenemos la gráfica de la función

$f(x)=x(1-\cos x)$

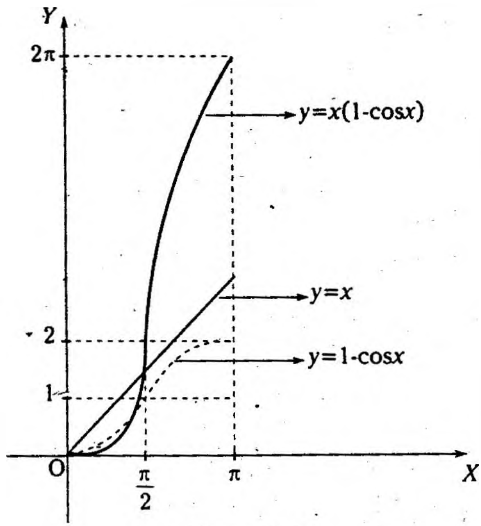


Figura 7.58

Problema 20

Dada la función f; cuya regla de correspondencia presentamos a continuación

$$f(x)=\frac{2\tan x}{1+\tan^2 x}+\frac{1-\tan^2 x}{1+\tan^2 x}$$

Analice la verdad (V) o falsedad (F) de las siguientes proposiciones

I. $\text{Ranf}=\left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right]-\{-1\}$

II. f es una función cuyo periodo es igual a π

III. f es máxima $\forall x=k\pi-\frac{7\pi}{8};k\in\mathbb{Z}$

IV. Si $x\in\left\langle\frac{25\pi}{8};4\pi\right\rangle\Rightarrow$ la función f es creciente

Resolución

Dado $f(x)=\frac{2\tan x}{1+\tan^2 x}+\frac{1-\tan^2 x}{1+\tan^2 x}$

1ro.

Restringimos los valores de la variable angular por estar presente la $\tan x$; $x\neq(2k+1)\frac{\pi}{2};k\in\mathbb{Z}$ por haber cocientes $1+\tan^2 x\neq 0$ (Debido a que esto siempre se cumple, no hay restricción alguna)

Dadas las restricciones se tiene que

$$x\neq(2k+1)\frac{\pi}{2};k\in\mathbb{Z}$$

2do.

Para poder analizarla de manera más sencilla pasaremos a reducir la regla de correspondencia de las identidades de arco doble

$$f(x)=\text{sen}2x+\cos 2x$$

y por propiedad de arcos compuestos f(x) se convierte en

$$f(x)=\sqrt{2}\,\text{sen}\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$$

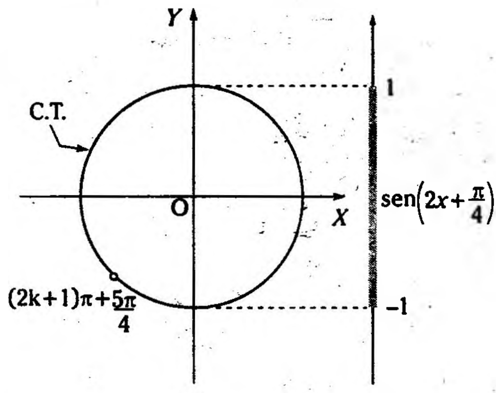
aplicación de $\text{sen}\theta+\cos\theta=\sqrt{2}\,\text{sen}\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)$

Pero $2x+\frac{\pi}{4}\neq(2k+1)\pi+\frac{\pi}{4}$

se deduce de $x\neq(2k+1)\frac{\pi}{2};\ k\in\mathbb{Z}$

Luego $-1\leq\text{sen}\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)\leq 1$

Véase en la C.T. adjunta



(a)

$\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$ puede ser cualquier arco de la C.T.

menos los de la forma $(2k+1)\pi+\frac{\pi}{4}$; $k\in\mathbb{Z}$

- Por $\sqrt{2}$: $-\sqrt{2}\leq\sqrt{2}\,\text{sen}\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)\leq\sqrt{2}$

$$-\sqrt{2}\leq f(x)\leq\sqrt{2}$$

$\Rightarrow \text{Ranf}=\left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right]$

De donde la proposición I es falsa.

- De lo anterior $f(x)=\sqrt{2}\operatorname{sen}\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$......(1)

  Se sabe que si $g(x)=A\operatorname{sen}(Bx+C)+D$

  $\Rightarrow$ El periodo $T=\frac{2\pi}{|B|}$

  Por lo que de (1) se tiene $T_f=\frac{2\pi}{|2|}\Rightarrow T_f=.\pi$

  De donde la proposición II es verdadera.

- También como $f(x)=\sqrt{2}\operatorname{sen}\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$

  f es máxima, si $\operatorname{sen}\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)=1$

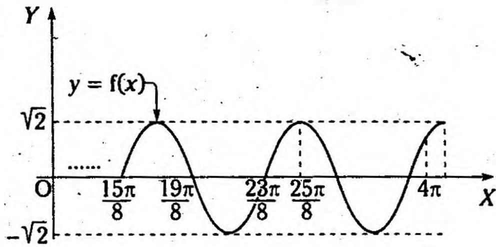
  Luego $2x+\frac{\pi}{4}=2k\pi+\frac{\pi}{2}$

  Despejando x; $x=k\pi+\frac{\pi}{8}$; $K\in\mathbb{Z}$ y un equivalente de este conjunto es $x=k\pi-\frac{7\pi}{8}$; $k\in\mathbb{Z}$

  De donde la proposición III es verdadera.

- Aparte de (1) se tiene $f(x)=\sqrt{2}\operatorname{sen}\left(2x+\frac{7\pi}{4}\right)$; $x\in\left\langle\frac{25\pi}{8};4\pi\right\rangle$

  Graficando f se obtiene la figura 7.59(b)



(b)

Figura 7.59

Dada la gráfica observamos que f en el intervalo solicitado $\left\langle\frac{25\pi}{8};4\pi\right\rangle$ es creciente y decreciente, por lo que la proposición IV es falsa.

Problema 21

Se tiene un circuito digital de un proceso industrial automatizado, formado por una bomba centrífuga, la válvula de control y la tubería. El circuito está encargado de detectar si la bomba está en marcha o parada.

Los valores de salida son 1 si el circuito está funcionando, y 0, en caso contrario. Si la salida depende de la siguiente función:

$$f(t)=\tan\left(\operatorname{sen}\frac{2t}{3}\right), t>0$$

Determine los valores de t para observar en la salida que el circuito no funciona.



Figura 7.60

Resolución

Siendo

$$f(t)=\tan\left(\operatorname{sen}\frac{2t}{3}\right); t>0$$

A partir del enunciado podemos plantear

Si el circuito funciona, la salida es $f(t)=1$

Si el circuito no funciona, la salida es $f(t)=0$

Pero también menciona que se vea la salida, para que el circuito no funcione, por lo que se puede plantear la siguiente ecuación

$$f(t)=0 \quad ......(1)$$

pero

$$f(t)=\tan\left(\operatorname{sen}\frac{2t}{3}\right)......(2)$$

(2) en (1)

$$\tan\left(\operatorname{sen}\frac{2t}{3}\right)=0......(3)$$

Nota

$\operatorname{sen}(k\pi)=0;\ \forall k\in\mathbb{Z}$ $\tan(k\pi)=0;\ \forall k\in\mathbb{Z}$

De (3)

$$\operatorname{sen}\frac{2t}{3}=m\pi;\ m\in\mathbb{Z}$$

Dando valores a m se obtiene la siguiente igualdad

$$\operatorname{sen}\frac{2t}{3}=0;\pm\pi;\pm2\pi;\pm3\pi;\pm4\pi;\ \ ...(4)$$

pero

$$\operatorname{sen}\frac{2t}{3}\in[-1;1]\ ...(5)$$

por lo que de (4) y (5) se obtiene como única posibilidad

$$\operatorname{sen}\frac{2t}{3}=0\ ...(6)$$

Luego, resolviendo (6)

$$\frac{2t}{3}=k\pi;\ k\in\mathbb{Z}^+$$

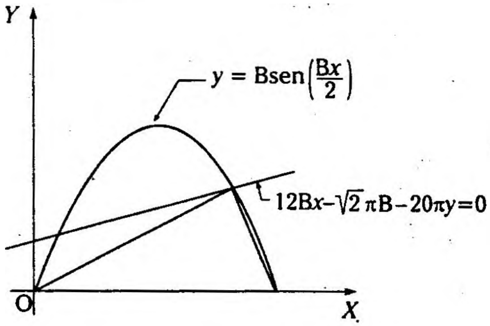
(El sustento de que k sea positivo es porque inicialmente, por condición, se plantea t>0)

Despejando t se obtiene

$$t=\frac{3\pi k}{2};\ k\in\mathbb{Z}^+$$

Problema 22

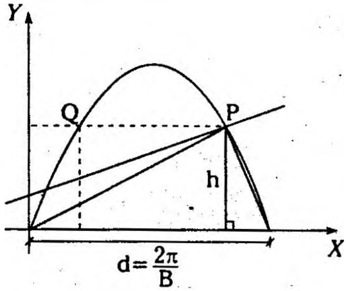
Halle la regla de correspondencia del senoide mostrado (ver figura 7.61(a)) si el área de la región triangular es $\frac{\pi}{\sqrt{2}}u^2$.



(a)

Resolución

Se tiene $y=B\operatorname{sen}\left(\frac{Bx}{2}\right)$ ⇒ el periodo es $T=\frac{4\pi}{B}$



(b)

Entonces $d=\frac{T}{2}=\frac{2\pi}{B}$

El área sombreada es

$$\frac{\frac{2\pi}{B}\times h}{2}=\frac{\pi}{\sqrt{2}}\Rightarrow h=\frac{B}{\sqrt{2}}$$

h es la ordenada del punto P.

Reemplazando en la ecuación de la recta, tenemos

$$12Bx-2\sqrt{2}\pi B=20\pi\times\frac{B}{\sqrt{2}}$$

Despejando x, tenemos $x=\sqrt{2}\pi$

El valor obtenido para x es la abscisa del punto P, entonces las coordenadas del punto P son $\left(\sqrt{2}\pi;\frac{B}{\sqrt{2}}\right)$ las cuales reemplazamos en la ecuación del senoide

$$y=B\operatorname{sen}\left(\frac{Bx}{2}\right)\Rightarrow\frac{B}{\sqrt{2}}=B\operatorname{sen}\left(\frac{B(\sqrt{2}\pi)}{2}\right)$$

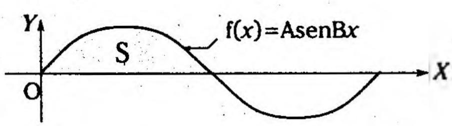
$$\Rightarrow\operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{2}\pi B}{2}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Resolviendo $\frac{\sqrt{2}\pi B}{2}=\frac{3\pi}{4}$ ya que el punto P está ubicado en la rama decreciente del senoide.

Despejando B: $B=\frac{3\sqrt{2}}{4}$, entonces la regla de correspondencia del senoide es

$$y=\frac{3\sqrt{2}}{4}\operatorname{sen}\left(\frac{3\sqrt{2}}{8}x\right)$$

Como un caso particular podemos citar si A>0, B>0



(c)
Figura 7.61

Sea S el área de la región sombreada, entonces S se calcula mediante la siguiente relación:

$$\boxed{S=\frac{2A}{B}}$$

La demostración respectiva se hace en el capítulo X.

Problema 23

Definimos $f(\alpha)=\dfrac{3\tan^2\alpha-\tan\alpha-4}{2\tan^2\alpha-3}$

¿Qué valores debe toma $f(\alpha)$ para que la igualdad sea válida para todo valor admisible de α?

Resolución

Como α va tomar valores admisibles

$$\tan\alpha\in\mathbb{R}\ \wedge\ \tan\alpha\neq\pm\frac{\sqrt{6}}{2}$$

hacemos un cambio de variable: $\tan\alpha=x$; reemplazando en f obtenemos

$$f(\alpha)=\frac{3x^2-x-4}{2x^2-3}$$

Ordenando la ecuación cuadrática en x.

$$(2f(\alpha)-3)x^2+x+(4-3f(\alpha))=0$$

Para tener soluciones reales, la ecuación será válida siempre que el discriminante de dicha ecuación sea mayor o igual a cero, es decir

$$(1)^2-4(2f(\alpha)-3)(4-3f(\alpha))\geq 0$$

Reduciendo y ordenando se tiene

$$f^2(\alpha)-\frac{17}{6}f(\alpha)+\frac{7}{27}\geq 0$$

Completando cuadrados

$$\left(f(\alpha)-\frac{17}{12}\right)^2 \geq \frac{755}{432}$$

De donde

$$f(\alpha)-\frac{17}{12} \geq \frac{\sqrt{755}}{12\sqrt{3}} \quad \vee \quad f(\alpha)-\frac{17}{2} \leq -\frac{\sqrt{755}}{12\sqrt{3}}$$

$$\therefore\ f(\alpha)=\left\langle -\infty; -\frac{\sqrt{755}}{12\sqrt{3}}+\frac{17}{12}\right] \cup \left[\frac{\sqrt{755}}{12\sqrt{3}}+\frac{17}{12}; +\infty\right\rangle$$

Problema 24

Construya el gráfico de f, siendo

$$f(x)=\frac{\cos x}{\sqrt{1-\cos 2x}}+\frac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{1+\cos 2x}}$$

Resolución

Recordando

$$2\operatorname{sen}^2 x = 1-\cos 2x \quad ; \quad 2\cos^2 x = 1+\cos 2x$$

Además tener presente

$$\cos 2x \neq \pm 1$$

es decir, se debe cumplir

$$2x \neq k\pi \quad (k\in \mathbb{Z})$$

$$\Rightarrow x \neq \frac{k\pi}{2}$$

Luego

$$f(x)=\frac{\cos x}{\sqrt{2\operatorname{sen}^2 x}}+\frac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{2\cos^2 x}}$$

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\cos x}{|\operatorname{sen} x|}+\frac{\operatorname{sen} x}{|\cos x|}\right)$$

Al redefinir f por cuadrantes

$$f(x)=\begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}}(\cot x+\tan x) & ;\ \text{si } x\in \text{IC} \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(\cot x-\tan x) & ;\ \text{si } x\in \text{IIC} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}}(\tan x+\cot x) & ;\ \text{si } x\in \text{IIIC} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}}(\cot x-\tan x) & ;\ \text{si } x\in \text{IVC} \end{cases}$$

Por identidades de arco doble

$$\cot x+\tan x = 2\csc 2x$$

$$\cot x-\tan x = 2\cot 2x$$

Entonces f quedará redefinido de la siguiente manera

$$f(x)=\begin{cases} \sqrt{2}\csc 2x & ;\ \text{si } x\in \text{IC} \\ \sqrt{2}\cot 2x & ;\ \text{si } x\in \text{IIC} \\ -\sqrt{2}\csc 2x & ;\ \text{si } x\in \text{IIIC} \\ -\sqrt{2}\cot 2x & ;\ \text{si } x\in \text{IVC} \end{cases}$$

Graficando f en $\langle 0;2\pi\rangle$ se obtiene

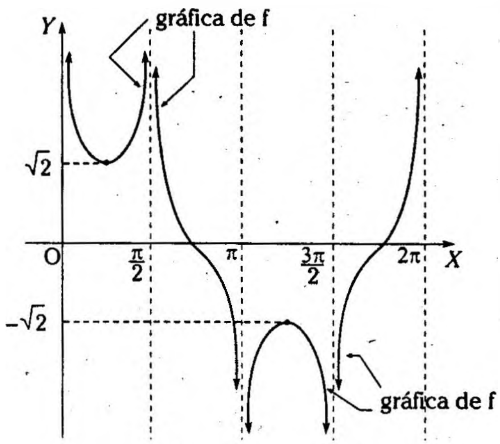


Figura 7.62

Problema 25

De la función $f(x)=\dfrac{\cos 2x}{\cos x-\operatorname{sen} x}$ determine en el siguiente orden:

I. Dominio de f II. Rango de f III. Periodo de f IV. Gráfica de f

Resolución

I. El dominio de f son todos los valores admisibles de x, entonces

$$\cos x-\operatorname{sen} x\neq 0 \Rightarrow \cos x\neq \operatorname{sen} x$$

$$\Rightarrow \tan x\neq 1 \;\Rightarrow\; x\neq k\pi+\frac{\pi}{4};\; k\in \mathbf{Z}$$

Por lo tanto $\operatorname{Dom} f=\mathbf{R}-\left\{k\pi+\dfrac{\pi}{4}\right\}$

II. Una vez que está bien definido el dominio de f, podemos simplificar f para obtener el rango de f.

$$f(x)=\frac{\cos 2x}{\cos x-\operatorname{sen} x}=\frac{\cos^2 x-\operatorname{sen}^2 x}{\cos x-\operatorname{sen} x}=\frac{(\cos x+\operatorname{sen} x)(\cos x-\operatorname{sen} x)}{(\cos x-\operatorname{sen} x)}$$

$$f(x)=\cos x+\operatorname{sen} x$$

Sabemos que $\forall\, x\in \mathbf{R}$ se cumple $-\sqrt{2}\leq \cos x+\operatorname{sen} x\leq \sqrt{2}$

Pero del dominio se deduce que $x\neq k\pi+\dfrac{\pi}{4}$ siendo k cualquier entero, entonces

$$(\operatorname{sen} x+\cos x)\neq \pm\sqrt{2}$$

Por lo tanto, para f $-\sqrt{2}<\underbrace{\cos x+\operatorname{sen} x}_{f}<\sqrt{2} \Rightarrow \operatorname{Ran} f=\left\langle -\sqrt{2};\sqrt{2}\right\rangle$

III. Si T es el periodo de f, éste debe cumplir $f(x+T)=f(x)$

$$\frac{\cos 2(x+T)}{\cos(x+T)-\operatorname{sen}(x+T)}=\frac{\cos 2x}{\cos x-\operatorname{sen} x}$$

La igualdad anterior se verifica si $T=\ldots 2\pi;4\pi;6\pi;\ldots$, es decir, $\forall T=2k\pi$ siendo k un valor entero.

Como el periodo de f es el menor valor de T positivo $(T=2\pi)$

Concluimos que el periodo de f es 2π. En otra palabras, la gráfica de f se "repite" cada 2π unidades en el eje X.

IV. De (II) tenemos que $f(x)=\underline{\cos x+\operatorname{sen} x}$

$$f(x)=\sqrt{2}\operatorname{sen}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$$

A continuación graficamos $f(x)=\sqrt{2}\operatorname{sen}\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$ considerando que $x\neq k\pi+\dfrac{\pi}{4};\; k\in \mathbf{Z}$; $\operatorname{Ran} f=\left\langle -\sqrt{2};\sqrt{2}\right\rangle$ y $T=2\pi$.

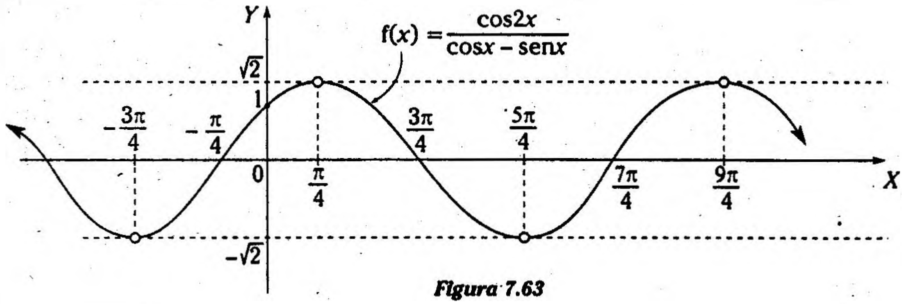


Figura 7.63

Problema 26

Construya el gráfico de $g(x)=\left|\dfrac{\operatorname{sen}4x}{\cos^4 x-\operatorname{sen}^4 x}\right|$

Resolución

Primero simplificamos la expresión, con aplicación de las identidades fundamentales.

$$g(x)=\left|\frac{\overbrace{\operatorname{sen}4x}^{2\operatorname{sen}2x\cos2x}}{\underbrace{(\cos^2x-\operatorname{sen}^2x)}_{\cos2x}\underbrace{(\cos^2x+\operatorname{sen}^2x)}_{1}}\right|$$

$$g(x)=|2\operatorname{sen}2x|\text{; pero }\cos2x\neq0\ \Rightarrow\ x\neq\pi k\pm\frac{\pi}{4},\ k\in\mathbb{Z}$$

Graficando

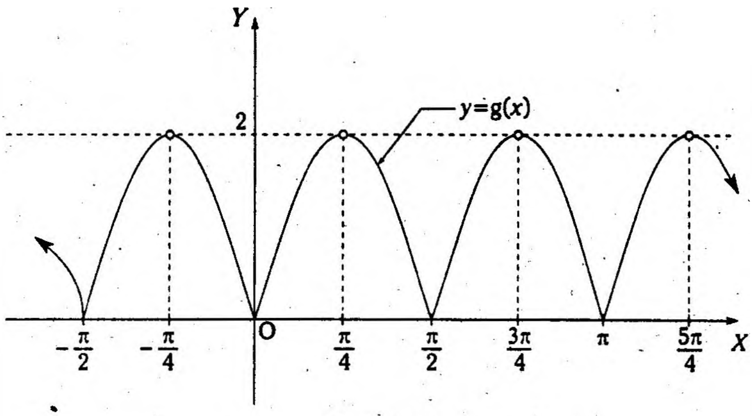


Figura 7.64

Opcionalmente de la gráfica, se tiene

$$\text{Dom f}=\mathbb{R}-\left\{\pi k\pm\frac{\pi}{4}\right\}\quad;\quad \text{Ran f}=[0;2\rangle$$

Problema 27

Calcule el campo de variación de la función f definida por la regla de correspondencia

$$f(x)=\frac{1-\cot x+\sec x\cdot\csc x}{1-\tan x+\sec x\cdot\csc x}$$

Resolución

Recordemos la identidad $\sec x\csc x=\tan x+\cot x$

Sustituyendo en f(x)

$$f(x)=\frac{1-\cot x+\tan x+\cot x}{1-\tan x+\tan x+\cot x}=\frac{1+\tan x}{1+\cot x}$$ es evidente que $x\neq\frac{n\pi}{2};n\in\mathbb{Z}$ .... (I)

Además $1+\cot x\neq 0\Rightarrow\cot x\neq -1$

Donde $x\neq\frac{3\pi}{4}+k\pi;\ k\in\mathbb{Z}$ ....(II)

Reduciendo $f(x)=\dfrac{1+\tan x}{1+\dfrac{1}{\tan x}}=\dfrac{(1+\tan x)}{(\tan x+1)}\tan x=\tan x$

De (I) y (II): $\text{Dom}\,f=\mathbb{R}-\left\{\frac{n\pi}{2};\frac{3\pi}{4}+k\pi\right\};\ n,k\in\mathbb{Z}$

Construimos el gráfico de f, de esa manera determinamos su variación.

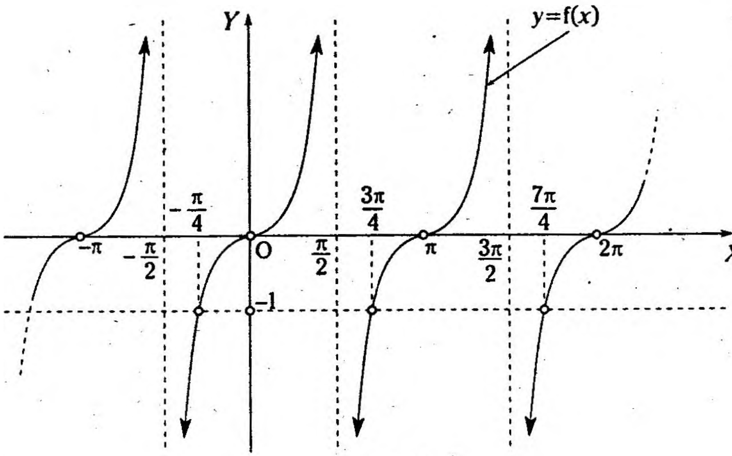


Figura 7.65

Del gráfico, se tiene $f=\mathbb{R}-\{-1;0\}$

Problema 28

Grafique la siguiente función $h(x)=\dfrac{\operatorname{sen}2x}{\operatorname{sen}x+\cos x-1}$

Resolución

Antes de graficar debemos llevar la función **h** a una forma más simple.

$$h(x)=\frac{2\operatorname{sen}x\cos x}{\operatorname{sen}x+\cos x-1}=\frac{(\operatorname{sen}x+\cos x)^2-1}{\operatorname{sen}x+\cos x-1}$$

$$\Rightarrow h(x)=\frac{(\operatorname{sen}x+\cos x-1)(\operatorname{sen}x+\cos x+1)}{\operatorname{sen}x+\cos x-1}$$

$$\Rightarrow h(x)=\operatorname{sen}x+\cos x+1,\quad \text{pero } \operatorname{sen}x+\cos x-1\neq 0$$

$$\Rightarrow h(x)=\sqrt{2}\operatorname{sen}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+1\ ;\quad \sqrt{2}\operatorname{sen}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\neq 1$$

Es decir $$h(x)=\sqrt{2}\operatorname{sen}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+1;\quad \operatorname{sen}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\neq\frac{\sqrt{2}}{2}$$

donde $x+\frac{\pi}{4}\neq\frac{\pi}{4}+2\pi n\ \vee\ x+\frac{\pi}{4}\neq\frac{3\pi}{4}+2\pi n,\ n\in\mathbf{Z}\quad\Rightarrow x\neq 2\pi n\ \vee\ x\neq\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in\mathbf{Z}$

Luego decimos que

- La amplitud de h es $\sqrt{2}$
- El periodo de h es 2π
- El cambio de fase $\left(x+\frac{\pi}{4}=0\right)$ es $-\frac{\pi}{4}$
- El desplazamiento vertical es 1
- Dominio de la función $x\in\mathbf{R}-\left\{2\pi n;\frac{\pi}{2}+2\pi n\right\};n\in\mathbf{Z}$

El gráfico es como se muestra

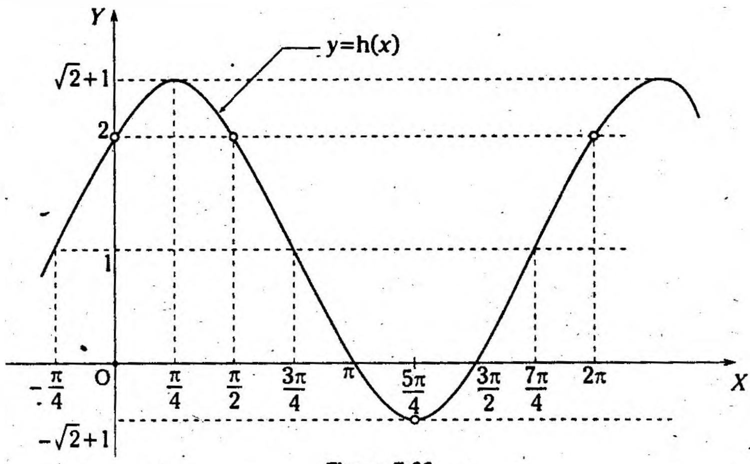


Figura 7.66

Problema 30

Determine el área de la región formada por las funciones $f(x)=\dfrac{3\tan 3x-3\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}\tan 3x}$; $g(x)=3\sqrt{3}$; $h(x)=-3\sqrt{3}$ en el intervalo $\dfrac{\pi}{3}\leq x\leq\dfrac{8\pi}{9}$

Resolución

Antes de graficar las funciones dadas; expresaremos a la función f(x) como sigue

$$f(x)=3\left(\frac{\tan 3x-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}\tan 3x}\right)=3\left(\frac{\tan 3x-\tan\frac{\pi}{3}}{1+\tan\frac{\pi}{3}\tan x}\right)\Rightarrow f(x)=3\tan\left(3x-\frac{\pi}{3}\right),$$ donde su gráfica es una tangentoide con desplazamiento horizontal.

Hacemos $3x-\dfrac{\pi}{3}=0\Rightarrow x=\dfrac{\pi}{9}$ (la tangentoide se desplaza hacia la derecha $\dfrac{\pi}{9}$ unidades)

Además, el periodo es $T=\dfrac{\pi}{3}$

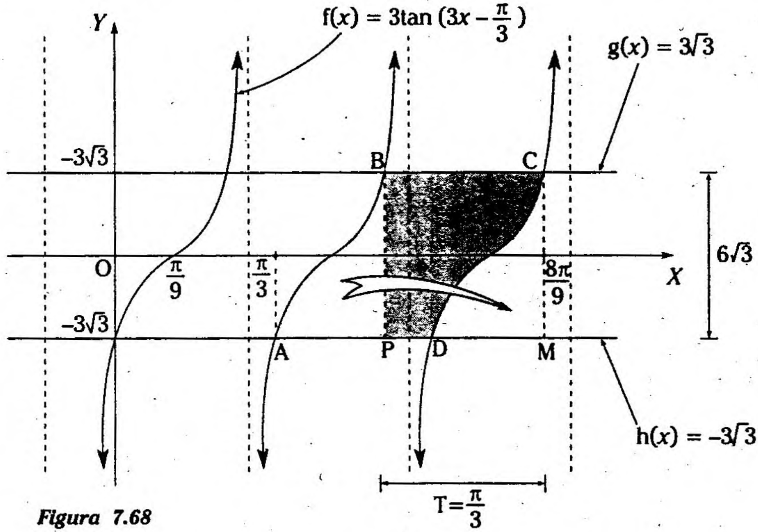


Figura 7.68

Evaluemos el valor de la función en $\dfrac{\pi}{3};\dfrac{8\pi}{9}$:

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right)=3\tan\left(3\times\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{3}\right)=-3\sqrt{3}$$

$$f\left(\frac{8\pi}{9}\right)=3\tan\left(3\times\frac{8\pi}{9}-\frac{\pi}{3}\right)=3\sqrt{3}$$

Luego, el área solicitada está formada por ABCD, que trasladando la región ABP a la región DMC (por simetría) el área a calcular sería el rectángulo PBCM.

$$\therefore\ S=\frac{\pi}{3}\times 6\sqrt{3}=2\pi\sqrt{3}\,u^2$$

Problema 29

Acerca de la función $f(x) = \text{sen}x + 2\cos x$, analice la verdad o falsedad de las siguientes proposiciones

I. $\text{Ran } f = \left[-\sqrt{5}; \sqrt{5}\right]$

II. Si $x \in \left\langle -\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4} \right\rangle \Rightarrow$ f es decreciente

III. Si $x \in \left\langle -\frac{\pi}{8}; 0 \right\rangle \Rightarrow$ f es creciente

IV. El periodo de f es 2π

Resolución

$$f(x) = \text{sen}x + 2\cos x$$

$$f(x) = \sqrt{5}\,\text{sen}(x+\theta) \text{ tal que } \text{sen}\theta = \frac{2}{\sqrt{5}} \wedge \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

Donde $\theta = 63°30'$ aproximadamente.

Graficamos $f(x) = \sqrt{5}\,\text{sen}(x+\theta)$ tal que $\theta \approx 63°30'$, donde la abscisa del punto M es $-63°30'$

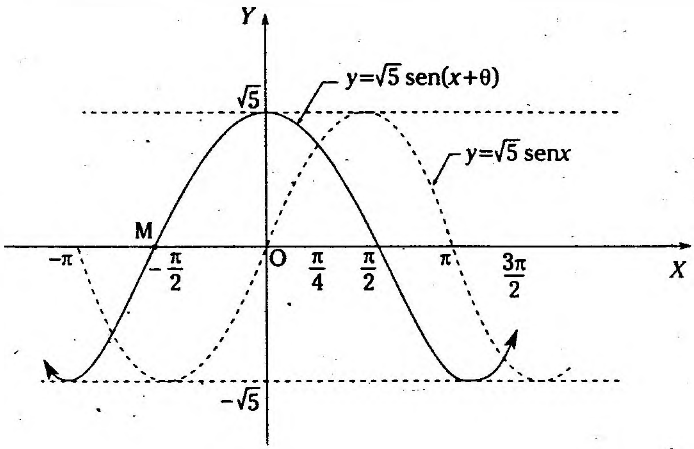


Figura 7.67

Del gráfico

- $Rf = \left[-\sqrt{5}; \sqrt{5}\right] \Rightarrow$ I es verdadera.
- Para $x \in \left\langle -\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4} \right\rangle$ f es creciente y decreciente $\Rightarrow$ II es falsa.
- Para $x \in \left\langle -\frac{\pi}{8}; 0 \right\rangle$ f es creciente $\Rightarrow$ III es verdadera.
- Por definición $f(x+T) = f(x)$

  $\sqrt{5}\,\text{sen}(x+\theta+T) = \sqrt{5}\,\text{sen}(x+\theta)$

  el menor valor que cumple es $T = 2\pi \Rightarrow$ IV es verdadera.

Problema 31

Acerca de la función $f(x)=\tan x-\cot x$, analice la verdad o falsedad de las siguientes proposiciones

I. $\text{Dom } f=\mathbb{R}-\{n\pi\};\ n\in\mathbb{Z}$

II. $\text{Ran } f=\langle-\infty;+\infty\rangle$

III. Si $x\in\left\langle 0;\frac{3\pi}{8}\right\rangle$, entonces $f(x)<2$

IV. Si $x\in\left\langle -\frac{\pi}{2};-\frac{\pi}{8}\right\rangle$, entonces $f(x)\geq 2$

Resolución

$$f(x)=-(\cot x-\tan x)=-2\cot 2x$$

Graficando la función $f(x)$ con periodo $T=\frac{\pi}{2}$. El coeficiente –2 hace que la gráfica de la función $y=\cot 2x$; se reflejen, todos sus puntos respecto al eje X.

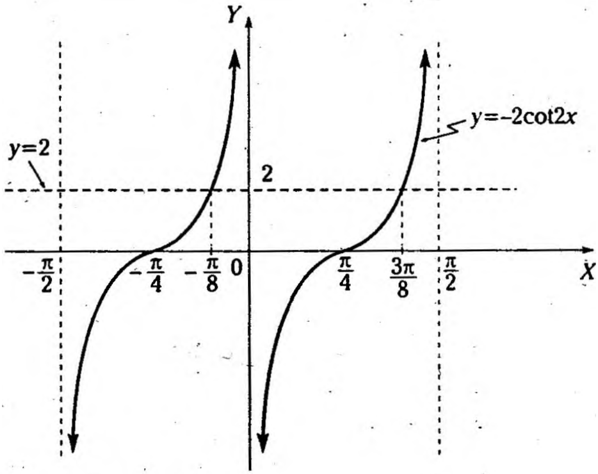


Figura 7.69

Del gráfico. $x\neq \ldots -\frac{\pi}{2};0;\frac{\pi}{2};\pi;\frac{3\pi}{2};\ldots;\frac{n\pi}{2}$

entonces $\text{Dom } f=\mathbb{R}-\left\{\frac{n\pi}{2}\right\}$

$\text{Ran } f=\mathbb{R} \Rightarrow \text{Ran } f=\langle-\infty;+\infty\rangle$

En el intervalo de $\left\langle 0;\frac{3\pi}{8}\right\rangle$ la gráfica de $f(x)$ está por debajo de la recta $y=2$, entonces $f(x)<2$.

En el intervalo de $\left\langle -\frac{\pi}{2};-\frac{\pi}{8}\right\rangle$ la gráfica de $f(x)$ está por debajo de la recta $y=2$, entonces $f(x)<2$.

Luego, afirmamos según las proposiciones

I. F II. V III. V IV. F

Problema 32

Determine el campo de variación de la función $h(x) = e^{\operatorname{sen} x} + \operatorname{sen} x$. **Nota:** considere $e \approx 2,71$

Resolución

El dominio de la función h es todos los números reales, pero es suficiente analizar en $[0;2\pi]$. Ya que el periodo de la función es 2π.

El rango será calculado por una suma de funciones

$$h(x) = f(x)+g(x)\ ; \quad \text{haciendo que } f(x) = e^{\operatorname{sen}x}\ ;\ g(x) = \operatorname{sen}x$$

Determinemos el rango de $f(x) = e^{\operatorname{sen}x}$

$$\Rightarrow \operatorname{Ln} f(x) = \operatorname{Ln} e^{\operatorname{sen}x} \quad \Rightarrow \operatorname{Ln} f(x) = \operatorname{sen}x$$

Pero $\quad -1 \le \operatorname{sen}x \le 1 \ ;\ \forall x \in R$

$$-1 \le \operatorname{Ln} f(x) \le 1$$

$$\operatorname{Ln} e^{-1} \le \operatorname{Ln} f(x) \le \operatorname{Ln} e$$

Como la función logaritmo es creciente $\Rightarrow e^{-1} \le f(x) \le e$

Graficando f(x) y g(x) y luego sumando estas funciones tenemos

> **Observación**
>
> Propiedades de logaritmos neperianos
>
> - $\operatorname{Ln} e^{x} = x$
>
> $\Rightarrow \operatorname{Ln} e = 1\ ;\ \operatorname{Ln} e^{-1} = -1$

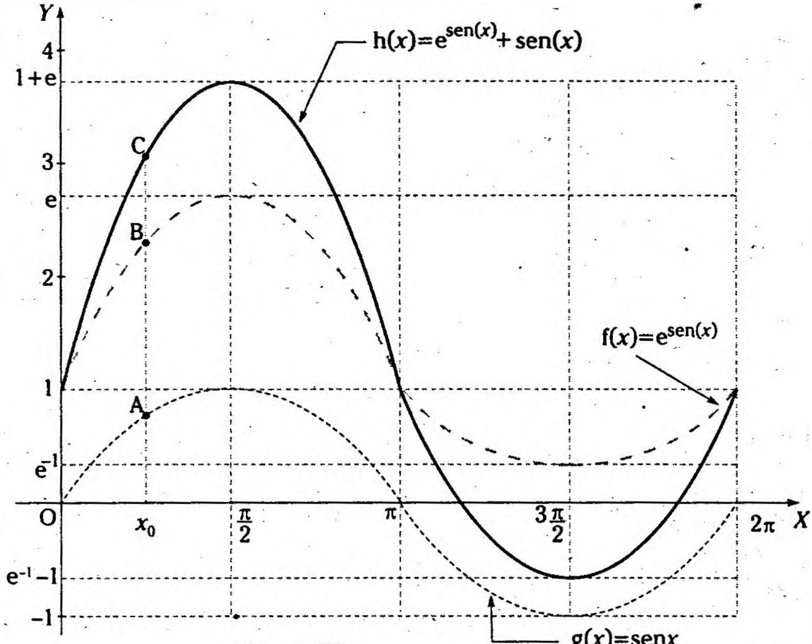


Figura 7.70

Recordando que sólo se suman las ordenadas de cada punto para un mismo elemento del dominio común de las funciones. En tal sentido (observe la gráfica) para x_0 Si a la ordenada del punto B le sumamos la ordenada del punto A, resulta igual a la ordenada del punto C.

En la gráfica de $y = h(x)$ el rango es $\left[e^{-1}-1; e+1\right]$

Problema 33

Sea $f(x)=\sqrt[4]{\operatorname{sen}x-\cos x}$ y $g(x)=\sqrt[3]{\log(\operatorname{sen}x)+\log(\cos x)}$. Halle el dominio de la función h definida por

$h(x)=(f.g)\,(x)$ en el recorrido de $\left\langle 0;\dfrac{13\pi}{4}\right\rangle$

Resolución

Nos piden hallar Dom h=Dom f ∩Domg...(i)

- De $f(x)=\sqrt[4]{\operatorname{sen}x-\cos x} \Rightarrow \operatorname{sen}x-\cos x\geq 0$

  $\Rightarrow \operatorname{sen}x>\cos x$, resolviendo gráficamente (Observe la figura 7.71)

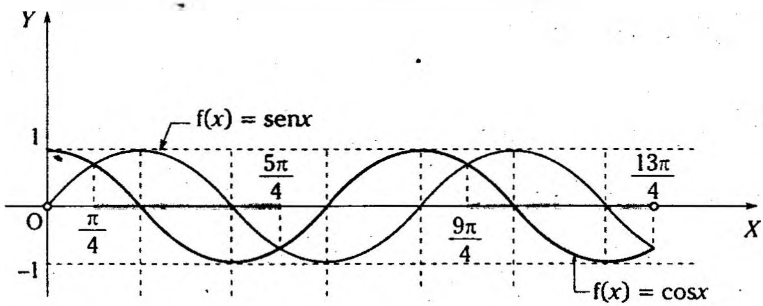


Figura 7.71

$\therefore$ Domf $=\left[\dfrac{\pi}{4};\dfrac{5\pi}{4}\right]\cup\left[\dfrac{9\pi}{4};\dfrac{13\pi}{4}\right\rangle$, $\left(\text{teniendo en cuenta el recorrido}\left\langle 0;\dfrac{13\pi}{4}\right\rangle\right)$

- De, $g(x)=\sqrt[3]{\text{Log}(\operatorname{sen}x)+\text{Log}(\cos x)}$, se tiene $\operatorname{sen}x>0 \wedge \cos x>0 \Rightarrow x\in$ IC

  Es decir Domg $=\left\langle 0;\dfrac{\pi}{2}\right\rangle\cup\left\langle 2\pi;\dfrac{5\pi}{2}\right\rangle$, $\left(\text{teniendo en cuenta el recorrido}\left\langle 0;\dfrac{13\pi}{4}\right\rangle\right)$

  De (i), intersectando los dominios tenemos Domh $=\left[\dfrac{\pi}{4};\dfrac{\pi}{2}\right\rangle\cup\left[\dfrac{9\pi}{4};\dfrac{5\pi}{2}\right\rangle$

Problema 34

Grafique la función $f(x)=|\operatorname{sen}x|+\cos x$

Resolución

En la figura adjunta, se han graficado las funciones $y=|\operatorname{sen}x|$ e $y=\cos x$, estas funciones están definidas para todo $x\in\mathbb{R}$, entonces el dominio de la función $f(x)=|\operatorname{sen}x|+\cos x$ abarcará todos los números reales. Aplicando el método de la adición de funciones se obtiene la gráfica de f.

Siendo $y_1 = |\operatorname{sen} x|$; $y_2 = \cos x$

Tabulando

x	$f(x) = y_1 + y_2$
0	1
$\pi/4$	$\sqrt{2}$
$\pi/2$	1
π	-1
$3\pi/2$	1
$7\pi/4$	$\sqrt{2}$
2π	1

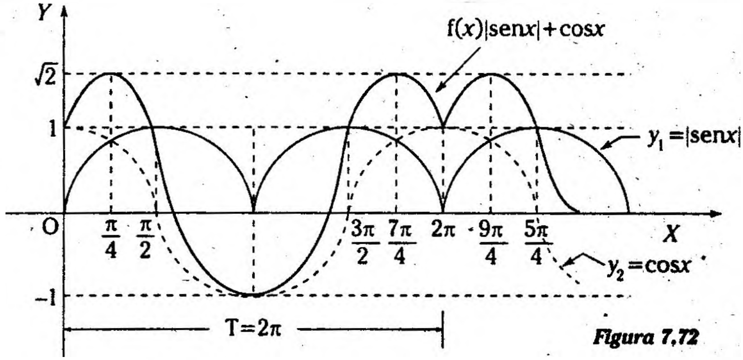


Figura 7,72

Como conclusión a partir del gráfico para la función f, se tiene

$\text{Dom}f = \mathbb{R}$; $\text{Ran}f = [-1;\sqrt{2}]$; $T = 2\pi$

Problema 35

Grafique la siguiente función $f(x) = 4\operatorname{sen}x + \operatorname{sen}3x$

Resolución

Sea $\underbrace{g(x) = 4\operatorname{sen}x}_{T=2\pi}$ y $\underbrace{h(x) = \operatorname{sen}3x}_{T=\frac{2\pi}{3}}$

Graficamos g y h y luego graficamos f, por suma de ordenadas de la siguiente forma, en el intervalo de $[0;2\pi]$.

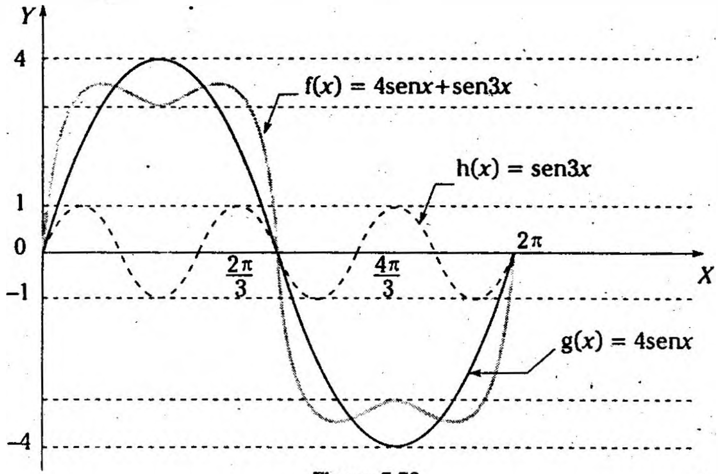


Figura 7.73

Esta gráfica se construye con más precisión mediante la aplicación de técnicas de derivadas, que permite conocer intervalos de crecimiento, decrecimientos, puntos máximos y mínimos, que desarrollaremos en el capítulo X.

FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS

El lector muchas veces encuentra que la teoría de las funciones trigonométricas inversas es muy complicada ya que tiene gran cantidad de fórmulas difíciles de demostrar.

Podemos decir que este capítulo no es difícil, para ello lo desarrollaremos de una forma sencilla y didáctica, sin obviar las definiciones formales, para esto es suficiente conocer lo elemental de Trigonometría.

A manera de introducción, podemos señalar que el tema tiene gran aplicación en diversos campos como mecánica, medicina, astronomía, robótica, etc.

Aquí se tiene una aplicación en la mecánica (carrera militar)

- La carga de un cañón destructor alcanza una velocidad del 1500 pies/s. La distancia que recorre la carga esta dado por **d**, en donde **v** es la velocidad inicial de la carga y θ es el ángulo de elevación del cañón, dicho ángulo θ es tal que la carga hace blanco en un transportador y esta dado por la siguiente expresión

$$\theta=\frac{1}{2}\operatorname{arcsen}\left(\frac{32d}{V^2}\right)$$

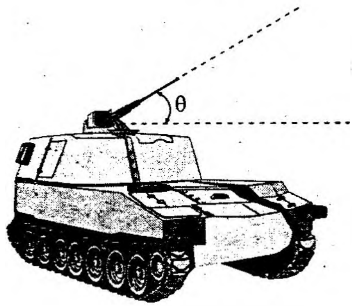


Figura 7.74

NOCIÓN DE LA FUNCIÓN INVERSA

En el capítulo anterior se estableció que una función asigna a cada elemento del dominio, una y solamente una imagen que desde luego puede ser común a varios o a todos los elementos del dominio. Si la función tiene además la propiedad de que la imagen es exclusiva o sea que cada imagen en el recorrido lo es de un solo elemento del dominio, se dice entonces que esta función establece una correspondencia biunívoca o biyectiva entre los elementos del dominio y los del recorrido. Cuando tal es el caso, se puede definir una nueva función, inversa de la función original, cuyo recorrido sea el dominio de la primera. Se dice entonces que cada función es la inversa de la otra.

Definición de una Función Inyectiva

Una función f se llama inyectiva o univalente si y sólo si para todo $x_1, x_2 \in \operatorname{Dom} f$ se cumple

$$f(x_1)=f(x_2) \Rightarrow x_1=x_2$$

llamada también función uno a uno o función univalente.

Si quisiéramos averiguar si una determinada función f es o no inyectiva tendríamos que plantear $f(x_1)=f(x_2)$ y luego de resolver esta igualdad concluir como única solución $x_1=x_2$, en caso se llegue a otra relación diferente afirmaremos que no es inyectiva. El ejemplo siguiente aclara al respecto.

Ejemplo

Identifique si las siguientes funciones son o no univalentes.

I. $f(x) = x^2 - 1$

II. $f(x) = x^3 + 2$

III. $f(x) = \operatorname{sen} x$

IV. $f(x) = \tan x\ ;\ 0 < x < \frac{\pi}{2}$

Resolución

Si se desea averiguar si una función es inyectiva se deberá plantear $f(x_1)=f(x_2)$ y de esta ecuación se debe obtener como única condición $x_1=x_2$.

I. Aplicando la definición

$$f(x_1) = f(x_2)$$
$$x_1^2 - 1 = x_2^2 - 1$$
$$x_1^2 - x_2^2 = 0$$

Por diferencia de cuadrados

$$(x_1 - x_2)(x_1 + x_2) = 0$$
$$\Rightarrow x_1 = x_2 \ \vee\ x_1 = -x_2$$

(obtenemos que se cumple dos condiciones y se debió obtener solo una $x_1=x_2$.)

$\therefore$ f no es univalente, pues no cumple la definición.

II. Aplicando la definición

$$f(x_1) = f(x_2)$$
$$x_1^3 + 2 = x_2^3 + 2$$
$$x_1^3 - x_2^3 = 0$$

Por diferencia de cubos

$$(x_1 - x_2)\left(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2\right) = 0$$
$$\Rightarrow x_1 = x_2 \quad \vee \quad x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 = 0$$

(no tiene soluciones reales excepto $x_1 = x_2 = 0$)

Luego sólo se cumple $x_1=x_2$

$\therefore$ f es univalente.

III. Aplicando la definición

$$f(x_1) = f(x_2)$$
$$\operatorname{sen} x_1 = \operatorname{sen} x_2$$
$$\operatorname{sen} x_1 - \operatorname{sen} x_2 = 0$$
$$2\cos\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{x_1 - x_2}{2}\right) = 0$$
$$\frac{x_1 + x_2}{2} = (2k+1)\frac{\pi}{2} \ \vee\ \frac{x_1 - x_2}{2} = \pi n$$
$$\Rightarrow x_1 + x_2 = (2k+1)\pi \ \vee\ x_1 - x_2 = 2\pi n;\ k, n \in \mathbb{Z}$$

Como x_1 y x_2 se relacionan de muchas formas, no satisface la definición

$\therefore$ f no es univalente

IV. Aplicando la definición

$$f(x_1) = f(x_2)$$
$$\tan x_1 = \tan x_2$$

De donde $x_1 = x_2 + k\pi\ ;\ k \in \mathbb{Z}$ ... (1)

Pero $0 < x_1 < \frac{\pi}{2}$ ... (2)

$0 < x_2 < \frac{\pi}{2}$ ... (3)

De (1) $k = 0 \Rightarrow x_1 = x_2$ (Si se cumple)

De (1) $k = 1 \Rightarrow x_1 = x_2 + \pi$

Como $0 < x_2 < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \pi < \underbrace{x_2 + \pi} < \frac{\pi}{2} + \pi$

$$\pi < x_1 < \frac{3\pi}{2}$$

(Como se puede verificar, esta condición no se cumple porque $0 < x_1 < \frac{\pi}{2}$)

De (1) $k = 2 \Rightarrow x_1 = x_2 + 2\pi$

Como $0 < x_2 < \frac{\pi}{2} \Rightarrow 2\pi < \underbrace{x_2 + 2\pi} < \frac{5\pi}{2}$

$$2\pi < x_1 < \frac{5\pi}{2}$$

(Como se puede verificar, esta condición no se cumple porque $0 < x_1 < \frac{\pi}{2}$)

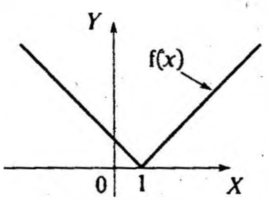
Para k=3; 4; ..., así como para valores negativos notaremos que siguiendo el criterio expuesto, dichas posibilidades no se cumplieron.

$\Rightarrow$ La única que cumple es $x_1=x_2$

$\therefore$ La función f es inyectiva.

Ejemplos aplicativos

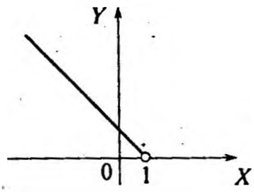
a. La función $f(x) = |x-1|$ no es monótona (revise la página **460**) en todo su dominio, pero si elegimos un intervalo donde f es siempre creciente o decreciente (tal como se muestra en el gráfico adjunto) estas serán univalentes.



Como f no es estrictamente creciente o decreciente
⇒ f no es univalente

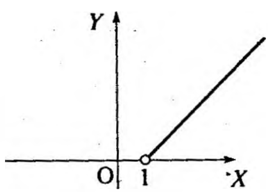
(a)

⇓



$f(x)=|x-1|$; $x<1$
como f es decreciente
⇒ f es univalente

(b)



$f(x)=|x-1|$; $x>1$
como f es creciente
⇒ f es univalente

(c)

Figura 7.75

b. La función $f(x) = \operatorname{sen}x$; $x \in \left\langle \frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2} \right\rangle$

Graficando y considerando sólo el intervalo indicado se tiene

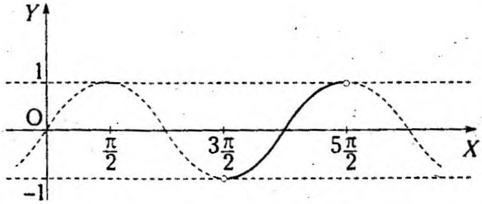


Figura 7.76

Para el intervalo dado $x \in \left\langle \frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2} \right\rangle$ f es creciente, entonces es una función univalente en dicho intervalo.

c. La función $f(x) = \sec x$; $x \in [-\pi; 0] - \left\{ -\frac{\pi}{2} \right\}$

Graficando

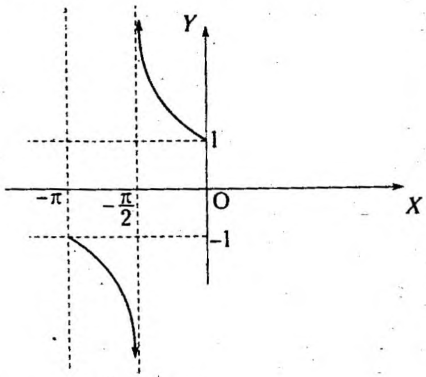


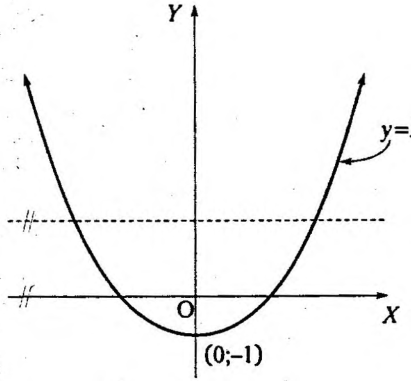
Figura 7.77

Para el intervalo dado $\forall x \in \left\langle -\pi; -\frac{\pi}{2} \right\rangle$, f es decreciente, entonces en dicho intervalo es univalente.

Para el intervalo dado $\forall x \in \left\langle -\frac{\pi}{2}; 0 \right\rangle$, f es decreciente, entonces en dicho intervalo es univalente.

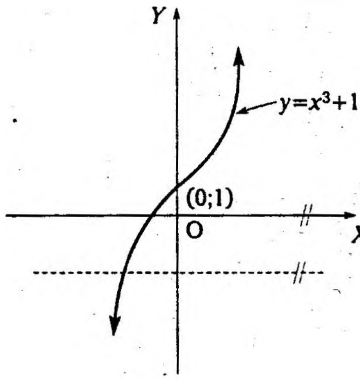
Interpretación Geométrica de una Función Inyectiva

Una función f es inyectiva si cualquier recta horizontal corta a la gráfica de f a lo más en un punto.



(a)

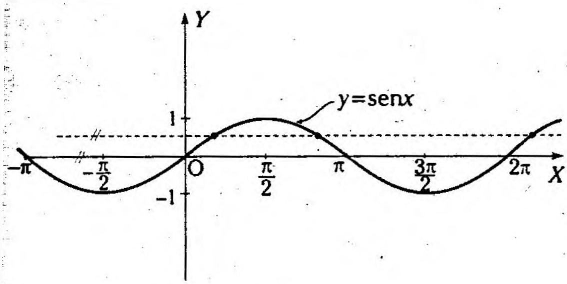
La recta horizontal corta en dos puntos al gráfico de la función $y=x^2-1$, entonces la función no es univalente.



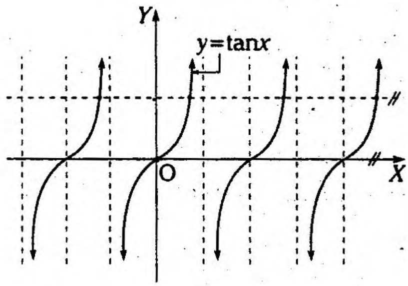
(b)

La recta horizontal corta en un sólo punto al gráfico de la función $y=x^3+1$, entonces la función es univalente.

Ejemplo



(c)



(d)

En este caso la recta horizontal corta al gráfico de la función y = senx en infinitos puntos, entonces la función seno no es inyectiva, de igual forma la recta horizontal en la figura 7.78(d) corta a la función y=tanx en varios puntos por lo que afirmamos que dicha función tangente no es inyectiva.

Figura 7.78

Ejemplo
Indique si la siguiente función es univalente

$$f(x)=\frac{\text{sen}3x}{\text{sen}x};\quad 0<x<\pi/2$$

Resolución
Simplificando

$$f(x)=\frac{\text{sen}x(2\cos 2x+1)}{\text{sen}x}$$

Por la identidad $\text{sen}3x=\text{sen}x(2\cos 2x+1)$

$f(x)=2\cos 2x+1$

(Simplificando $\text{sen}x\neq 0$)

Graficando

$f(x)=2\cos 2x+1$

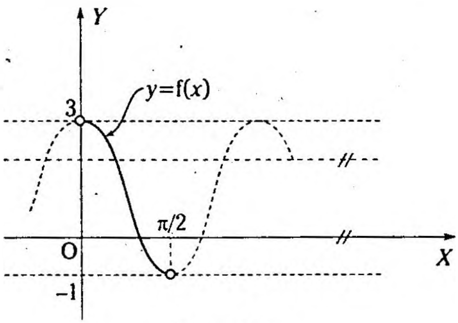


Figura 7.79

Como se observa, la recta horizontal corta al gráfico de f en un solo punto, entonces para $0<x<\frac{\pi}{2}$ la función es inyectiva.

Función Sobreyectiva

Una función f se llama sobreyectiva, suryectiva o sobre si el conjunto de llegada coincide con el rango de f. También podemos definirla de la siguiente forma

> Dada la función f
>
> $A\to B$ si $\forall y\in B\ \exists x\in A/(x;y)\in f$
>
> $\to$ f es sobreyectiva

Ejemplo

La función f: $\left\langle 0;\frac{\pi}{2}\right\rangle\to[0;1]$, $f(x)=\text{sen}x$ no es **sobreyectiva**, dado que

Si $0<x<\frac{\pi}{2}\Rightarrow 0<\text{sen}x<1$

es decir $0<f(x)<1\Rightarrow \text{Ran } f=\langle 0;1\rangle$

y se observa que el conjunto de llegada $[0;1]$ no coincide con el rango $\text{Ran } f=\langle 0;1\rangle$

Función Biyectiva

> Una función f se llama biyectiva si f es inyectiva y sobreyectiva

Ejemplo
La función f: $[0;\pi]\to[-1;1]$, $f(x)=\cos x$, es **biyectiva**, dado que

- $0\leq x\leq\pi\Rightarrow -1\leq\cos x\leq 1\Rightarrow \text{Ran } f=[-1;1]$ entonces la función es sobreyectiva.
- Sea $f(a)=f(b)\Rightarrow \cos a=\cos b$

  $\cos a-\cos b=0$

  $-2\text{sen}\frac{a-b}{2}\text{sen}\frac{a+b}{2}=0$, luego

  $\frac{a+b}{2}=n\pi\ \vee\ \frac{a-b}{2}=k\pi\ ;\ n,k\in\mathbb{Z}$

Con el dominio dado tenemos a=b, entonces la función es inyectiva (véase figura 7.80)

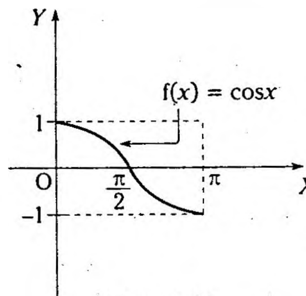


Figura 7.80

Por lo tanto la función $f(x)=\cos x$ es biyectiva

Definición de Función Inversa

Sea f una función biyectiva, entonces f posee inversa denotada por f^{-1} o f^{*}, y se define de la siguiente manera:

$$f^{-1} = \{(y\,;x) / y \in f(x)\,;x \in \text{Dom}\,f\}$$

Observación

- La función f^{-1} también es inyectiva.
- La regla de correspondencia de la función inversa se obtiene a partir de la ecuación: $x=f^{-1}(y)$, sustituyendo simultáneamente x por y, e y por x.
- Luego se concluye que $Df^{-1}=Rf$, $Rf^{-1}=Df$

Ejemplo

Halle la regla de correspondencia de la función inversa de

I. $f(x) = 2x$ II. $f(x) = x^3+2$

Resolución

Como estas funciones son biyectivas, por lo tanto poseen inversa.

I. $y=2x$, despejando x.

$x = \frac{y}{2}$, intercambiando variables (x por y e y por x).

$y = \frac{x}{2}$, es la función inversa.

II. $y=x^3+2$, despejando x

$x=\sqrt[3]{y-2}$, intercambiando variables (x por y e y por x).

$y=\sqrt[3]{x-2}$ es la función inversa de f.

Además Dom $f^{-1}=\mathbb{R}$, Ran $f^{-1}=\mathbb{R}$

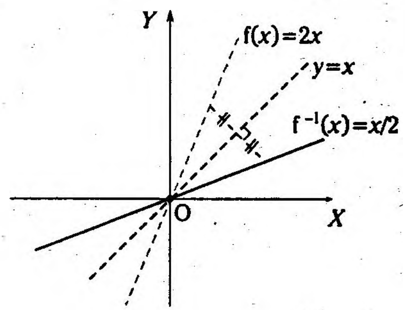
- **Gráfica de una función inversa**

La gráfica de la función inversa $y=f^{-1}(x)$ se obtiene de la gráfica de la función $y=f(x)$ por la representación simétrica de la recta $y=x$.

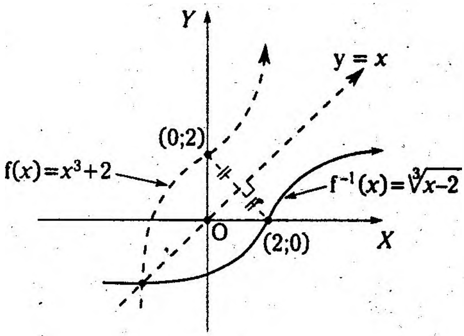
Nota

Para cualquiera que sean los puntos $(x; y)$ e $(y; x)$, son simétricos respecto a la recta $y=x$.

A continuación se muestran los gráficos de las funciones $y=2x$, $y=\sqrt[3]{x-2}$, y de sus respectivas inversas.



(a)



(b)

Figura 7.81

FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS

Recuerde que para que una función tenga inversa la función debe ser biyectiva.

La figura 7.82 muestra una senoide, esta función no es biyectiva, pues todo número de su rango (contradominio o ámbito) es el valor de la función de más de un número de su dominio.

Por consiguiente, la función seno no tiene inversa, obsérvese sin embargo que en el intervalo de $\left[\frac{3\pi}{2};\frac{5\pi}{2}\right]$, cualquier recta horizontal sólo corta a esta porción de la gráfica en un punto. De esta forma la función $y=\operatorname{sen}x$ si $x\in\left[\frac{3\pi}{2};\frac{5\pi}{2}\right]$ es biyectiva, y por tanto, tiene una función inversa.

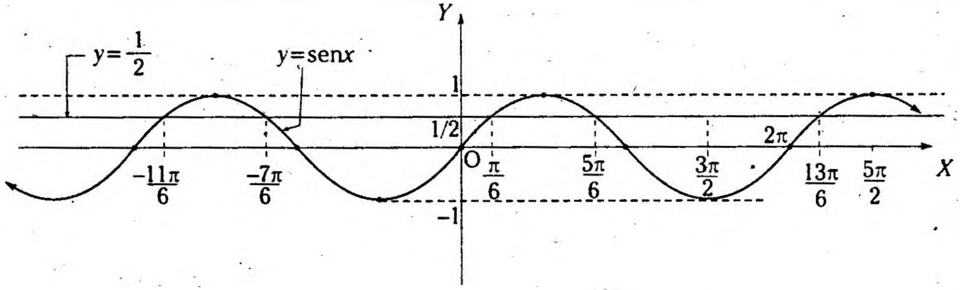


Figura 7.82

Entonces, las Funciones Trigonométricas por ser periódicas no son biyectivas, pero se pueden elegir muchos intervalos de su dominio tal que cumpla la definición de función biyectiva.

Seguidamente consideramos el siguiente cuadro (convencional) de restricciones, para que las funciones trigonométricas sean biyectivas y por tanto tengan inversa.

Función	Dominio	Rango
$y=\operatorname{sen}x$	$\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$	$[-1;1]$
$y=\cos x$	$[0;\pi]$	$[-1;1]$
$y=\tan x$	$\left\langle-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right\rangle$	R
$y=\cot x$	$\langle 0;\pi\rangle$	R
$y=\sec x$	$[0;\pi]-\left\{\frac{\pi}{2}\right\}$	$R-\langle-1;1\rangle$
$y=\csc x$	$\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]-\{0\}$	$R-\langle-1;1\rangle$

En estas restricciones las funciones trigonométricas elementales poseen función inversa, veamos

Observación

Si ft (θ) =n donde θ pertenece al rango de su respectiva función inversa

$$\Rightarrow \theta=\operatorname{arcft}(n) \quad \vee \quad \theta=\operatorname{ft}^{-1}(n)$$

Ejemplos

- $\operatorname{sen}\alpha=\frac{1}{3}\Rightarrow \alpha=\operatorname{arcsen}\frac{1}{3} \wedge \alpha\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$
- $\cos\phi=\frac{1}{2}\Rightarrow \phi=\arccos\frac{1}{2}=\frac{\pi}{3} \wedge \phi\in[0;\pi]$
- $\tan\theta=\sqrt{5}\Rightarrow \theta=\arctan\sqrt{5} \wedge \theta\in\left\langle-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right\rangle$
- $\cot\beta=2\Rightarrow \beta=\operatorname{arccot}2 \wedge \beta\in\langle 0;\pi\rangle$
- $\sec\varphi=-\sqrt{2}\Rightarrow \varphi=\frac{3\pi}{4} \wedge \frac{3\pi}{4}\in[0;\pi]-\left\{\frac{\pi}{2}\right\}$
- $\csc\gamma=14\Rightarrow \gamma=\operatorname{arccsc}14 \wedge \gamma\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]-\{0$

Hacemos la aclaración que los norteamericanos e ingleses emplean $\theta = ft^{-1}(n)$

Para los números reales que son elementos del conjunto solución de la ecuación $\cos\theta = \frac{1}{2}$, tal como $-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}; \frac{5\pi}{3}$; etc., es decir $\theta = 2n\pi \pm \frac{\pi}{3}$; $n \in \mathbb{Z}$ a este conjunto de números se da el nombre especial $\text{Arccos}\frac{1}{2}$ que se puede leer como "arco cuyo coseno es $\frac{1}{2}$", otro ejemplo que podemos citar es

$$\text{Arccos}0 = \left\{\ldots -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2} \ldots\right\}$$

$$\text{Arccos}0 = (2n+1)\frac{\pi}{2};\ n \in \mathbb{Z}$$

Nota

Explicaremos posteriormente la diferencia entre $\text{Arccos}0 = (2n+1)\frac{\pi}{2}$; $n \in \mathbb{Z}$ y $\text{arccos}0 = \frac{\pi}{2}$; sugerimos al lector no confundir estas dos igualdades, la primera indica los valores generales y la segunda indica el valor principal. Inclusive hay discrepancia en algunos autores con referencia a este punto.

Análogamente se definen los conjuntos Arcsen, Arcsec, Arccsc.

Como ejemplos citaremos lo siguiente:

- $\text{Arcsen}1 = \left\{\frac{\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}; \frac{9\pi}{2}; \frac{13\pi}{2}; \ldots\right\}$
- $\text{Arcsen}1 = (4k+1)\frac{\pi}{2}$; $k \in \mathbb{Z}$
- $\text{Arcsen}0 = \{-\pi; 0; \pi; 2\pi; 3\pi; 4\pi; \ldots\}$
- $\text{Arcsen}0 = k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$
- $\text{Arctan}1 = \left\{-\frac{3\pi}{4}; \frac{\pi}{4}; \frac{5\pi}{4}; \frac{9\pi}{4}; \ldots\right\}$
- $\text{Arctan}1 = (4k+1)\frac{\pi}{4}$; $k \in \mathbb{Z}$
- $\text{Arccot}0 = \left\{-\frac{\pi}{2}; 0; \frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}; \ldots\right\}$
- $\text{Arccot}0 = (2k+1)\frac{\pi}{2}$; $k \in \mathbb{Z}$
- $\text{Arcsec}2 = \left\{-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}; \frac{5\pi}{3}; \frac{7\pi}{3}; \ldots\right\}$
- $\text{Arcsec}2 = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$; $k \in \mathbb{Z}$
- $\text{Arccsc}1 = \left\{-\frac{3\pi}{2}; \frac{\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}; \frac{9\pi}{2}; \ldots\right\}$
- $\text{Arccsc}1 = (4k-3)\frac{\pi}{2}$; $k \in \mathbb{Z}$

Función Arco Seno

A partir de la función $y = \text{sen}x$ dado que; $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ obtenemos su función inversa considerando el siguiente procedimiento

- Despejando x, en términos de y
  $x = \text{arcsen}y$ o $x = \text{sen}^{-1}y$
- Cambiando la variable x por y e y por x, se tiene
  $y = \text{arcsen}x$ o $y = \text{sen}^{-1}x$
  (se lee: "y es un arco cuyo seno es x").
  Obteniéndose así la función inversa definida con regla de correspondencia **f(x) = arcsenx**

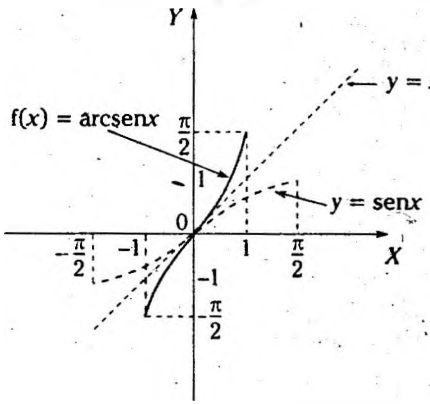


Figura 7.83

Del gráfico observamos que la función

- $\text{Dom}f = [-1;1]$
- $\text{Ran}f = \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$
- es inyectiva
- es impar
- no es periódica
- la función es creciente en todo su dominio.

Función Arco Coseno

A partir de la función $y=\cos x$ dado que $0 \leq x \leq \pi$ obtenemos su función inversa considerando que $x = \arccos y$ ó $x=\cos^{-1}y$ además cambiando la variable x por y e y por x; obteniéndose

$y = \arccos x$ o $y=\cos^{-1}x$

(se lee: "y es un arco cuyo coseno es x")

Obteniéndose la regla de correspondencia **f(x)=arccosx**

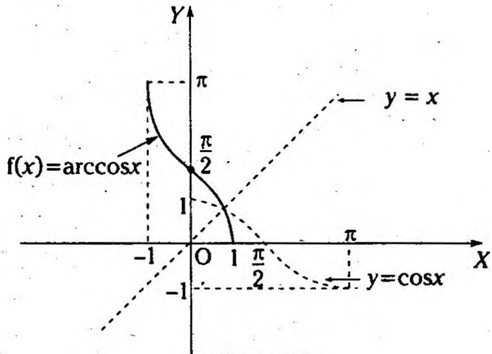


Figura 7.84

Del gráfico observamos que

- Dom f = [–1;1]
- Ran f = [0;π]
- es univalente
- no es par, ni impar
- no es periódica
- la función es decreciente en todo su dominio

Del mismo modo, definimos otras funciones trigonométricas inversas.

Función Arco Tangente

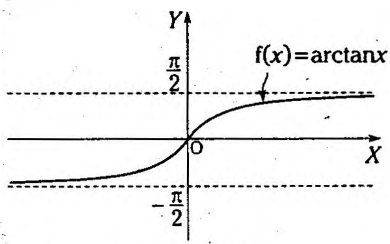


Figura 7.85

Del gráfico observamos que la función **f(x)=arctanx**

- Dominio de f es ℝ
- Rango de f es $\left\langle -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right\rangle$
- La función es impar.
- La función es creciente en todo su dominio

Función Arco Cotangente

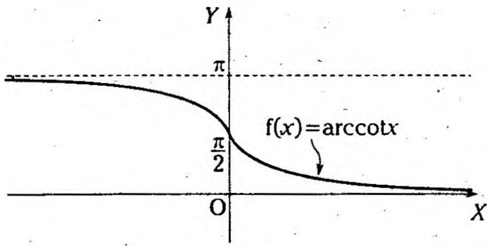


Figura 7.86

Dada la gráfica de la función **f(x)=arccotx** se observa

- Dominio de f es **R**
- Rango de f es $\langle 0; \pi \rangle$
- La función no es par, ni impar.
- La función es decreciente en todo su dominio.

Función Arco Secante

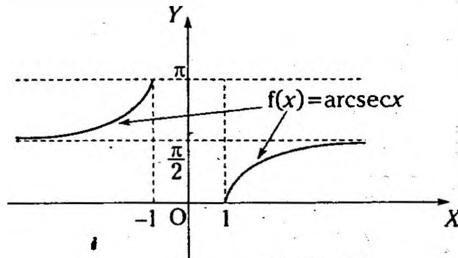


Figura 7.87

Del gráfico observamos que la función **f(x)=arcsecx**

- Dominio de f es **R** – $\langle -1; 1 \rangle$.
- Rango de f es $[0; \pi] - \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$
- La función, no es par ni impar.
- La función es creciente en el intervalo $\langle -\infty; -1 \rangle \vee \langle 1; +\infty \rangle$.

Función Arco Cosecante

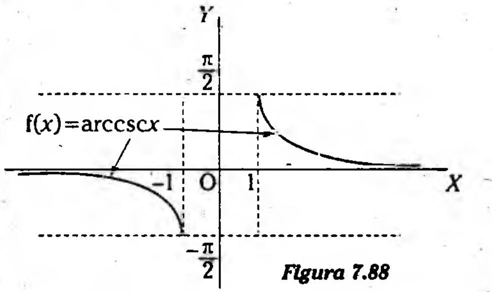


Figura 7.88

Dada la gráfica de la función **f(x)=arccscx** se tiene

- Dominio de f es $\mathbb{R}-\langle -1;\ 1\rangle$
- Rango de f es $\left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right]-\{0\}$
- La función es impar.
- La función es decreciente en el intervalo $\langle -\infty;\ -1\rangle \vee \langle 1;\ +\infty\rangle$

Cuadro de Resumen

Función Inversa	Dominio	Rango
$y=\text{arcsen}\,x$	$-1\le x\le 1$	$-\frac{\pi}{2}\le y\le \frac{\pi}{2}$
$y=\arccos x$	$-1\le x\le 1$	$0\le y\le \pi$
$y=\arctan x$	$x=\mathbb{R}$	$-\frac{\pi}{2}< y< \frac{\pi}{2}$
$y=\text{arccot}\,x$	$x=\mathbb{R}$	$0< y< \pi$
$y=\text{arcsec}\,x$	$x\le -1\ \vee\ x\ge 1$	$0\le y\le \pi;\ y\ne \frac{\pi}{2}$
$y=\text{arccsc}\,x$	$x\le -1\ \vee\ x\ge 1$	$-\frac{\pi}{2}\le y\le \frac{\pi}{2};\ y\ne 0$

Ejemplos

Obtenga el valor de las siguientes expresiones

a. $\text{arcsen}\ \frac{1}{2}$ b. $\arccos\ \frac{\sqrt{2}}{2}$

c. $\arctan\ \sqrt{3}$ d. $\text{arccot}\ (2+\sqrt{3})$

e. arccos 0 f. arctan 1

g. arcsen 0 h. arcsec 2

i. $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ j. $\text{arcsen}\left(-\frac{1}{2}\right)$

k. arctan (−1)

Para poder entender mejor el desarrollo de estos ejemplos es necesario que recuerde las razones trigonométricas de ciertos arcos notables como son:

$$-\frac{\pi}{4};\ \frac{\pi}{6};\ \frac{\pi}{4};\ \frac{\pi}{3};\ \frac{5\pi}{12};\ \ldots,\text{etc.}$$

Resolución

a. Sea $\alpha=\text{arcsen}\,\frac{1}{2}$; entonces α es un arco en el intervalo $\left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right]$ cuyo seno es $\frac{1}{2}$, es decir $\text{sen}\,\alpha=\frac{1}{2}$.

$$\therefore\ \alpha=\frac{\pi}{6}$$

b. Sea $\theta=\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}$; entonces θ es un arco en el intervalo $[0;\ \pi]$ cuyo coseno es $\frac{\sqrt{2}}{2}$, es decir $\cos\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

$$\therefore\ \theta=\frac{\pi}{4}$$

c. Sea $\beta = \arctan\sqrt{3}$; entonces β es un arco en el intervalo $\left\langle -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right\rangle$ cuya tangente es $\sqrt{3}$, es decir $\tan\beta = \sqrt{3}$.

$\therefore\ \beta = \frac{\pi}{3}$

d. Sea $\gamma = \text{arccot}(2+\sqrt{3})$; entonces γ es un arco en el intervalo $\langle 0; \pi \rangle$ cuya cotangente es $2+\sqrt{3}$, es decir $\cot\gamma = 2+\sqrt{3}$.

$\therefore\ \gamma = \frac{\pi}{12}$

e. Sea $\rho = \arccos 0$; entonces ρ es un arco en el intervalo $[0; \pi]$ cuyo coseno es 0, es decir $\cos\rho = 0$.

$\therefore\ \rho = \frac{\pi}{2}$

f. Sea $\lambda = \arctan 1$; entonces λ es un arco en el intervalo $\left\langle -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right\rangle$ cuya tangente es 1, es decir, $\tan\lambda = 1$.

$\therefore\ \lambda = \frac{\pi}{4}$

g. Sea $\psi = \text{arcsen}\, 0$; entonces ψ es un arco en el intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right]$ cuyo seno es 0, es decir $\text{sen}\,\psi = 0$.

$\therefore\ \psi = 0$

h. Sea $\delta = \text{arcsec}\, 2$; entonces δ es un arco en el intervalo $[0; \pi] - \left\{ \frac{\pi}{2} \right\}$ cuyo secante es 2, es decir, $\sec\delta = 2$.

$\therefore\ \delta = \frac{\pi}{3}$

i. Sea $\varepsilon = \arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \right)$, entonces ε es un arco en el intervalo $[0; \pi]$ cuyo coseno es $-\frac{\sqrt{3}}{2}$, es decir $\cos\varepsilon = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

$\therefore\ \varepsilon = \frac{5\pi}{6}$

j. Sea $\tau = \text{arcsen}\left(-\frac{1}{2} \right)$, entonces τ es un arco en el intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right]$ cuyo seno es $-\frac{1}{2}$, es decir, $\text{sen}\,\tau = -\frac{1}{2}$.

$\therefore\ \tau = -\frac{\pi}{6}$

k. Sea $\psi = \arctan(-1)$, entonces ψ es un arco en el intervalo $\left\langle -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right\rangle$ cuya tangente es −1, es decir $\tan\psi = -1$.

$\therefore\ \psi = -\frac{\pi}{4}$

Luego de estos ejemplos, se concluye el siguiente cuadro donde el lector observará la relación entre la función inversa y directa.

Propiedad Fundamental

$\theta = \text{arcsen}k$	$\Leftrightarrow$	$\text{sen}\theta = k \wedge \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right]$
$\theta = \arccos k$	$\Leftrightarrow$	$\cos\theta = k \wedge \theta \in [0; \pi]$
$\theta = \arctan k$	$\Leftrightarrow$	$\tan\theta = k \wedge \theta \in \left\langle -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right\rangle$

$\theta = \text{arccot}k$	$\Leftrightarrow$	$\cot\theta = k \wedge \theta \in \langle 0; \pi \rangle$
$\theta = \text{arcsec}k$	$\Leftrightarrow$	$\sec\theta = k \wedge \theta \in [0; \pi] - \left\{ \frac{\pi}{2} \right\}$
$\theta = \text{arccsc}k$	$\Leftrightarrow$	$\csc\theta = k \wedge \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right] - \{0\}$

Ejemplos

- Si $\theta = \text{arcsen}\frac{1}{3}$

  $\Rightarrow\ \text{sen}\theta = \frac{1}{3} \wedge \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right]$

- Si $\tan\theta = 4 \wedge \theta \in \left\langle -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right\rangle$.

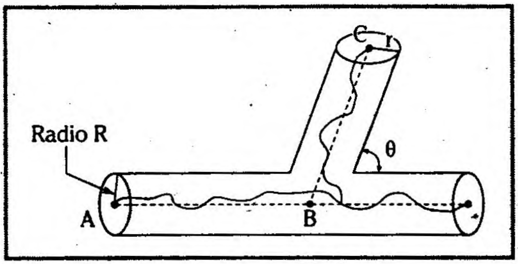
  $\Rightarrow\ \theta = \arctan 4$

- Si $\cos\theta = -\frac{2}{3} \wedge \theta \in [0; \pi]$

  $\Rightarrow\ \theta = \arccos\left(\frac{-2}{3} \right)$

LA FISIOLOGÍA Y LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS
(Ángulo óptimo de ramificación vascular)

En el sistema circulatorio, la circulación de la sangre se realiza con un gasto mínimo de energía. Así es razonable suponer que, cuando una arteria se ramifica, el ángulo entre la arteria "madre" y la "hija" debe hacer mínima la resistencia al flujo de la sangre.
Sea la siguiente ramificación vascular:



Considerando la resistencia de flujo entre A y B también entre B y C, además de la viscosidad de la sangre, se deduce $\theta = \arccos\left(\frac{r^4}{R^4}\right)$



La aplicación de la matemática es necesaria en el estudio y ejercicio de la medicina.

Ejemplos

Calcule el valor de las siguientes expresiones

1. $M = \operatorname{sen}\left(\operatorname{arcsen}\frac{\sqrt{3}}{2} - \arctan 1\right)$
2. $N = \tan\left(2\arctan\frac{1}{3}\right)$
3. $F = \cos\left(\operatorname{arcsen}\frac{4}{5} + \arccos\frac{12}{13}\right)$
4. $D = \tan\left(\arctan\frac{3}{5} + \operatorname{arcsen}\frac{3}{5}\right)$
5. $N = \cos\left(\operatorname{arcsen}\frac{2}{3} - 2\operatorname{arcsen}\frac{1}{3}\right)$
6. $P = \arccos\frac{3}{\sqrt{10}} + \arccos\frac{2}{\sqrt{5}}$
7. $P = \operatorname{sen}\left(2\arctan\frac{2}{3}\right)$
8. $C = \cos\left(3\arccos\frac{1}{3}\right)$
9. $R = \tan\left(\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{3}\right)$
10. $F = \cos\left(4\operatorname{arcsen}\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$
11. $R = \operatorname{sen}(\arctan\sqrt{3} + \operatorname{arccsc}2)$
12. $F = \sec(2\arctan 2)$
13. $A = \tan(3\operatorname{arccot}3)$

Resolución

1. $M = \operatorname{sen}\left(\underbrace{\operatorname{arcsen}\frac{\sqrt{3}}{2}} - \underbrace{\arctan 1}\right)$

$M = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right)$

$M = \operatorname{sen}\frac{\pi}{12}$

$\therefore\ M = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$

2. $N = \tan\left(2\arctan\frac{1}{3}\right)$

Sea $\alpha = \arctan\frac{1}{3} \Rightarrow \tan\alpha = \frac{1}{3}$

$\Rightarrow N = \tan 2\alpha$

$N = \frac{2\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha}$ (Identidad del arco doble)

$N = \frac{2\left(\frac{1}{3}\right)}{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2}$

$\therefore\ N = \frac{3}{4}$

Observación

En forma práctica se puede resolver utilizando

$\tan\left(\frac{37°}{2}\right) = \frac{1}{3}$

$N = \tan\left(2\arctan\frac{1}{3}\right) = \tan\left(2\left(\frac{37°}{2}\right)\right) = \tan 37° = \frac{3}{4}$

3. $F = \cos\left(\operatorname{arcsen}\frac{4}{5} + \arccos\frac{12}{13}\right)$

Si $\alpha = \operatorname{arcsen}\frac{4}{5} \Rightarrow \operatorname{sen}\alpha = \frac{4}{5}$

$\theta = \arccos\frac{12}{13} \Rightarrow \cos\theta = \frac{12}{13}$

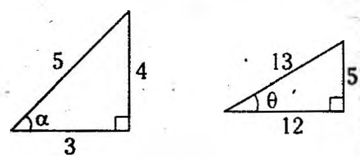


Figura 7.89

$F = \cos(\alpha + \theta)$

$F = \cos\alpha\cos\theta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\theta$

$F = \left(\frac{3}{5}\right)\left(\frac{12}{13}\right) - \left(\frac{4}{5}\right)\left(\frac{5}{13}\right)$

$\therefore\ F = \frac{16}{65}$

$$D=\tan\left(\arctan\frac{3}{5}+\text{arcsen}\frac{3}{5}\right)$$

Si $\tau=\arctan\frac{3}{5}\Rightarrow\tan\tau=\frac{3}{5}$

$\phi=\text{arcsen}\frac{3}{5}\Rightarrow\text{sen}\,\phi=\frac{3}{5}$

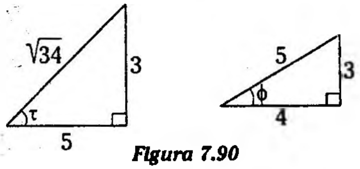


Figura 7.90

$$D=\tan(\tau+\phi)$$

$$D=\frac{\tan\tau+\tan\phi}{1-\tan\tau\tan\phi}$$

$$D=\frac{\frac{3}{5}+\frac{3}{4}}{1-\left(\frac{3}{5}\right)\left(\frac{3}{4}\right)}$$

$$\therefore\ D=\frac{27}{11}$$

$$N=\cos\left(\text{arcsen}\frac{2}{3}-2\text{arcsen}\frac{1}{3}\right)$$

Si $\alpha=\text{arcsen}\frac{2}{3}\Rightarrow\text{sen}\,\alpha=\frac{2}{3}$

$\theta=\text{arcsen}\frac{1}{3}\Rightarrow\text{sen}\,\theta=\frac{1}{3}$

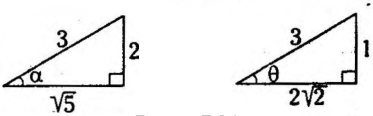


Figura 7.91

$$N=\cos(\alpha-2\theta)$$

$$N=\cos\alpha\cos2\theta+\text{sen}\,\alpha\,\text{sen}\,2\theta\ ......(1)$$

Además se tiene

$$\text{sen}2\theta=2\,\text{sen}\,\theta\cos\theta=2\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)=\frac{4\sqrt{2}}{9}$$

$$\cos2\theta=1-2\,\text{sen}^2\theta=1-2\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{7}{9}$$

En (1)

$$N=\left(\frac{\sqrt{5}}{7}\right)\left(\frac{7}{9}\right)+\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{4\sqrt{2}}{9}\right)$$

$$\therefore\ N=\frac{7\sqrt{5}+8\sqrt{2}}{27}$$

6. $P=\arccos\frac{3}{\sqrt{10}}+\arccos\frac{2}{\sqrt{5}}$

Si $\alpha=\arccos\frac{3}{\sqrt{10}}\Rightarrow\cos\alpha=\frac{3}{\sqrt{10}}$

$\theta=\arccos\frac{2}{\sqrt{5}}\Rightarrow\cos\theta\frac{2}{\sqrt{5}}$

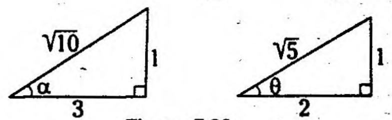


Figura 7.92

$\Rightarrow P=\alpha+\theta$, tomando cosenos

$$\cos P=\cos(\alpha+\theta)$$

$$\cos P=\left(\frac{3}{\sqrt{10}}\right)\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)-\left(\frac{1}{\sqrt{10}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$$

$$\cos P=\frac{5}{5\sqrt{2}}$$

$$\cos P=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\therefore\ P=\frac{\pi}{4}$$

7. $P=\text{sen}\left(2\arctan\frac{2}{3}\right)$

Sea $\phi=\arctan\frac{2}{3}\Rightarrow\tan\phi=\frac{2}{3}$

$$P=\text{sen}\,2\phi$$

$$P=\frac{2\tan\phi}{1+\tan^2\phi}$$

$$P=\frac{2\left(\frac{2}{3}\right)}{1+\left(\frac{2}{3}\right)^2}$$

$$\therefore\ P=\frac{12}{13}$$

8. $C=\cos\left(3\arccos\frac{1}{3}\right)$

Si $W=\arccos\frac{1}{3} \Rightarrow \cos W=\frac{1}{3}$

$C=\cos 3W$

$C=4\cos^3 W-3\cos W$

$C=4\left(\frac{1}{3}\right)^3-3\left(\frac{1}{3}\right)$

$\therefore\ C=-\frac{23}{27}$

9. $R=\tan\left(\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{3}\right)$

Sea $\lambda=\arccos\frac{1}{3} \Rightarrow \cos\lambda=\frac{1}{3}$

$R=\tan\left(\frac{\lambda}{2}\right)$

$R=\sqrt{\frac{1-\cos\lambda}{1+\cos\lambda}}$ si $0<\lambda<\frac{\pi}{2}$

$R=\sqrt{\frac{1-\frac{1}{3}}{1+\frac{1}{3}}}$

$\therefore\ R=\frac{\sqrt{2}}{2}$

10. $F=\cos\left(4\operatorname{arcsen}\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

Sea $\alpha=\operatorname{arcsen}\frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \operatorname{sen}\alpha=\frac{1}{\sqrt{3}}$

$F=\cos 4\alpha$

$F=2\cos^2 2\alpha-1$.......(I)

Como $\cos 2\alpha=1-2\operatorname{sen}^2\alpha$

$\cos 2\alpha=1-2\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2$

$\cos 2\alpha=\frac{1}{3}$

En (I) $F=2\left(\frac{1}{3}\right)^2-1$

$\therefore\ F=-\frac{7}{9}$

11. $R=\operatorname{sen}(\underbrace{\arctan\sqrt{3}}+\underbrace{\operatorname{arccsc}2})$

$R=\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\right)$

$R=\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}$

$\therefore\ R=1$

12. $F=\sec(2\arctan 2)$

Sea $\alpha=\arctan 2 \Rightarrow \tan\alpha=2$

Luego en F

$F=\sec(2\alpha)$

Pero, por identidad de arco doble

$F=\frac{1+\tan^2\alpha}{1-\tan^2\alpha}$

$\Rightarrow F=\frac{1+2^2}{1-2^2}$

$\therefore\ F=-\frac{5}{3}$

13. $A=\tan(3\operatorname{arccot}3)$

Sea $\alpha=\operatorname{arccot}3 \Rightarrow \cot\alpha=3$; $\tan\alpha=\frac{1}{3}$

Luego en A

$A=\tan 3\alpha$

Pero, por identidad de arco triple

$\tan 3\alpha=\frac{3\tan\alpha-\tan^3\alpha}{1-3\tan^2\alpha}$

$\Rightarrow \tan 3\alpha=\frac{3\left(\frac{1}{3}\right)-\left(\frac{1}{3}\right)^3}{1-3\left(\frac{1}{3}\right)^2}$

$\therefore\ \tan 3\alpha=\frac{13}{12}$

oremas y Propiedades de las Funciones rigonométricas Inversas

Teorema

- $\text{arcsen}(-x) = -\text{arcsen}\,x;\ \forall x \in [-1;\ 1]$
- $\text{arccos}(-x) = \pi - \text{arccos}\,x;\ \forall x \in [-1;\ 1]$

emostraciones

Sea $\alpha = \text{arcsen}\,x$ .... (1)

entonces, $\text{sen}\,\alpha = x \ \wedge\ -\frac{\pi}{2} \le \alpha \le \frac{\pi}{2}$

Recordando la identidad

$$\text{sen}(-\alpha) = -\underbrace{\text{sen}\alpha}$$

$$\text{sen}(-\alpha) = -x$$

Como es evidente, también $-\frac{\pi}{2} \le -\alpha \le \frac{\pi}{2}$

entonces $-\alpha = \text{arcsen}(-x)$ .... (2)

Reemplazando (1) en (2) obtenemos

$$-\text{arcsen}\,x = \text{arcsen}(-x)$$

De donde se verifica

$$\text{arcsen}(-x) = -\text{arcsen}(x)$$

- Asimismo, sea $\theta = \text{arccos}\,x$, entonces

$$\cos\theta = x \ \wedge\ 0 \le \theta \le \pi$$

Recordando la identidad

$$\cos(\pi - \theta) = -\underbrace{\cos\theta}$$

$$\cos(\pi - \theta) = -x$$

Como es evidente $0 \le \pi - \theta \le \pi$

Luego $\cos(\pi - \theta) = -x \ \wedge\ 0 \le \pi - \theta \le \pi$ aplicando la propiedad fundamental de la página **528** podemos despejar $\pi - \theta$ para obtener

$$\pi - \underbrace{\theta}_{\text{arccos}\,x} = \text{arccos}(-x)$$

$$\pi - \text{arccos}\,x = \text{arccos}(-x)$$

De donde se verifica

$$\text{arccos}(-x) = \pi - \text{arccos}\,x$$

De forma análoga verifique

$$\text{arctan}(-x) = -\text{arctan}\,x;\ \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\text{arccot}(-x) = \pi - \text{arccot}\,x;\ \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\text{arcsec}(-x) = \pi - \text{arcsec}\,x;\ \forall x \in \mathbb{R} - \langle -1; 1\rangle$$

$$\text{arccsc}(-x) = -\text{arccsc}\,x;\ \forall x \in \mathbb{R} - \langle -1; 1\rangle.$$

A continuación mostramos una serie de ejemplos en cuyos desarrollos se apreciará la utilidad de los teoremas anteriores.

Ejemplos

Determine el valor de los siguientes arcos

- $\alpha = \text{arcsen}\left(-\frac{1}{2}\right)$

$$\Rightarrow \alpha = -\underbrace{\text{arcsen}\frac{1}{2}}_{\frac{\pi}{6}} \quad \therefore\ \alpha = -\frac{\pi}{6}$$

- $\beta = \text{arccos}\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\right)$

$$\Rightarrow \beta = \pi - \underbrace{\text{arccos}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}_{\frac{\pi}{4}} \quad \therefore\ \beta = \frac{3\pi}{4}$$

- $\theta = \text{arctan}(-\sqrt{3})$

$$\Rightarrow \theta = -\underbrace{\text{arctan}(\sqrt{3})}_{\frac{\pi}{3}} \quad \therefore\ \theta = -\frac{\pi}{3}$$

- $\gamma = \text{arccot}(-\sqrt{3})$

$$\Rightarrow \gamma = \pi - \underbrace{\text{arccot}\sqrt{3}}_{\frac{\pi}{6}} \quad \therefore\ \gamma = \frac{5\pi}{6}$$

- $\psi = \text{arcsec}(-1)$

$$\Rightarrow \psi = \pi - \underbrace{\text{arcsec}\,1}_{0} \quad \therefore\ \psi = \pi$$

- $\lambda = \text{arccsc}(-1)$

$$\Rightarrow \lambda = -\underbrace{\text{arccsc}\,1}_{\pi/2} \quad \therefore\ \lambda = -\frac{\pi}{2}$$

Propiedad del Seno Inverso

De la definición

$y = \text{arcsen}x \Leftrightarrow \text{sen}y = x;\ -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2};\ 1 \leq x \leq 1$

se obtiene

- $\text{sen}(\text{arcsen}x) = x\ ;\ -1 \leq x \leq 1$
- $\text{arcsen}(\text{sen}y) = y\ ;\ -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$

Ejemplos

Determine el valor de las expresiones siguientes

I. $\text{sen}\left(\text{arcsen}\frac{2}{9}\right)$

II. $\text{sen}\left(\text{arcsen}\left(-\frac{\sqrt{3}}{6}\right)\right)$

III. $\text{arcsen}\left(\text{sen}\frac{\pi}{8}\right)$

IV. $\text{arc sen}\left(\text{sen}\frac{2\pi}{3}\right)$

Resolución

I. $\text{sen}\left(\text{arcsen}\frac{2}{9}\right) = \frac{2}{9}$; puesto que $\frac{2}{9} \in [-1;1]$

II. $\text{sen}\left(\text{arcsen}\left(-\frac{\sqrt{3}}{6}\right)\right) = -\frac{\sqrt{3}}{6}$; puesto que $-\frac{\sqrt{3}}{6} \in [-1;1]$

III. $\text{arcsen}\left(\text{sen}\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\pi}{8}$; puesto que $\frac{\pi}{8} \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$

IV. $\text{arcsen}\left(\text{sen}\frac{2\pi}{3}\right) \neq \frac{2\pi}{3}$; puesto que $\frac{2\pi}{3} \notin \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$

Para este tipo de ejercicio, debemos hallar el equivalente de $\text{sen}\frac{2\pi}{3}$, tal que se exprese como la razón seno de otro arco en el intervalo $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$, pero que tenga el mismo valor, para esto como es evidente $\text{sen}\frac{2\pi}{3} = \text{sen}\frac{\pi}{3}$; es decir

$$\text{arc sen}\underbrace{\left(\text{sen}\frac{2\pi}{3}\right)} = \text{arcsen}\underbrace{\left(\text{sen}\frac{\pi}{3}\right)} = \frac{\pi}{3}$$

(tienen el mismo valor)

Este ejemplo nos permite concluir que cada vez que se tenga razones trigonométricas de arcos que no corresponden al intervalo de su correspondiente función inversa, se tendrá que buscar un equivalente de dicha razón pero con un arco en el intervalo requerido. Se sugiere repasar sus lecciones de reducción al primer cuadrante.

Sigamos con el siguiente ejemplo para hallar el valor de α.

$$\alpha = \text{arcsen}\left(\text{sen}\frac{5\pi}{6}\right)$$

Observamos que $\frac{5\pi}{6} \notin \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$; por lo que cambiamos por un equivalente $\text{sen}\frac{\pi}{6}$, porque

$\text{sen}\frac{5\pi}{6} = \text{sen}\frac{\pi}{6}$

Luego $\alpha = \text{arcsen}\left(\text{sen}\frac{\pi}{6}\right)$; ahora observamos que $\frac{\pi}{6} \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$. Por lo que aplicando la propiedad seno inverso obtenemos $\alpha = \frac{\pi}{6}$

Propiedad del Coseno Inverso

De la definición

$y=\text{arc}\cos x \Leftrightarrow \cos y = x;\ 0\le y\le\pi;\ 1\le x\le 1$

se obtiene

- $\cos(\text{arc}\cos x) = x;\ -1\le x\le 1$
- $\text{arc}\cos(\cos y) = y;\ \ 0\le y\le\pi$

Ejemplos

Determine el valor de las expresiones siguientes

I. $\cos\left(\text{arc}\cos\left(-\frac{4}{5}\right)\right)$

II. $\cos(\arccos 0{,}7)$

III. $\text{arc}\cos\left(\cos\frac{3\pi}{4}\right)$

IV. $\arccos\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)$

Resolución

I. $\cos\left(\text{arc}\cos\left(-\frac{4}{5}\right)\right) = -\frac{4}{5}$; puesto que $-\frac{4}{5}\in[-1;1]$

II. $\cos(\arccos 0{,}7)=0{,}7$; puesto que $0{,}7\in[-1;1]$

III. $\arccos\left(\cos\frac{3\pi}{4}\right)=\frac{3\pi}{4}$; puesto que $\frac{3\pi}{4}\in[0;\pi]$

IV. $\text{arc}\cos\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)\ne-\frac{\pi}{6}$; puesto que $-\frac{\pi}{6}\notin[0,\pi]$

Pero como sabemos $\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)=\cos\frac{\pi}{6}$, y como $\frac{\pi}{6}\in[0;\pi]$ entonces podemos hacer el cambio respectivo y observar que la respuesta es $\frac{\pi}{6}$.

$$\arccos\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)=\arccos\left(\cos\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\pi}{6}$$

Propiedad do Tangente Inverso

De la definición

$y=\text{arc}\tan x \Leftrightarrow \tan y = x;\ -\frac{\pi}{2}<y<\frac{\pi}{2};\ \forall x\in\mathbf{R}$

se obtiene

- $\tan(\arctan x) = x;\ \forall x\in\mathbf{R}$
- $\arctan(\tan y) = y;\ \ -\frac{\pi}{2}<y<\frac{\pi}{2}$

Ejemplos

Determine el valor de las expresiones siguientes

I. $\tan(\text{arc}\tan(-4))$ II. $\tan(\arctan 2000)$

III. $\arctan\left(\tan\frac{\pi}{12}\right)$ IV. $\arctan(\tan 3)$

Resolución

I. $\tan(\arctan(-4)) = -4$; puesto que $-4\in\mathbf{R}$

II. $\tan(\arctan 2000)=2000$; puesto que $2000\in\mathbf{R}$

III. $\arctan\left(\tan\frac{\pi}{12}\right)=\frac{\pi}{12}$; puesto que $\frac{\pi}{12}\in\left\langle-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right\rangle$

IV. $\text{arc}\tan(\tan 3)\ne 3$; puesto que $3\notin\left\langle-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right\rangle$

Pero tan3 equivale a $\tan(3-\pi)$ y además $(3-\pi)\in\left\langle-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right\rangle$; ver figura 7.93, entonces

$\text{arc}\tan(\tan 3)=\arctan(\tan(3-\pi))=3-\pi$

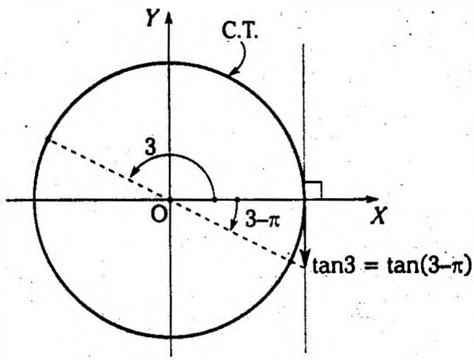


Figura 7.93

Análogamente se cumple

Propiedad de Cotangente Inverso

- $\cot(\text{arc}\cot x) = x\,;\ \ \forall x \in \mathbb{R}$
- $\text{arc}\cot(\cot y) = y;\ \ 0 < y < \pi$

Propiedad de Secante Inverso

- $\sec(\text{arc}\sec x) = x;\ \forall x \in \mathbb{R} - \langle -1;1\rangle$
- $\text{arc}\sec(\sec y) = y;\ \forall y \in [0;\pi] - \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$

Propiedad de Cosecante Inverso

- $\csc(\text{arc}\csc x) = x\,;\ \ \forall x \in \mathbb{R} - \langle -1;1\rangle$
- $\csc(\text{arc}\csc y) = y\,;\ \ \forall y \in \left\langle -\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right\rangle - \{0\}$

Teorema

$$\cos(\text{arcsen}\,x) = \sqrt{1-x^2};\ \forall x \in [-1;1]$$

Demostración

Sea $\alpha = \text{arcsen}x$, entonces

$$\text{sen}\alpha = x \quad \wedge \quad -\frac{\pi}{2} \le \alpha \le \frac{\pi}{2}$$

Observe que en este intervalo $\cos\alpha \ge 0$, lo cual se va a utilizar cuando se despeje $\cos\alpha$ de la identidad que se muestra a continuación.

Sabemos que

$$\cos^2\alpha = 1 - \text{sen}^2\alpha$$

$$|\cos\alpha| = \sqrt{1-\text{sen}^2\alpha}$$

raíz cuadrada a ambos miembros

Debido a que $\cos\alpha \ge 0 \Rightarrow |\cos\alpha| = \cos\alpha$ de donde obtenemos

$$\cos\alpha = \sqrt{1-\text{sen}^2\alpha}$$

y como $\alpha = \text{arcsen}x \ \wedge\ \text{sen}\,\alpha = x$

Finalmente demostramos

$$\cos(\text{arc sen}\,x) = \sqrt{1-x^2}$$

De forma análoga demuestre usted

$$\text{sen}(\text{arccos}\,x) = \sqrt{1-x^2};\ \forall x \in [-1;1]$$

Ejemplos

a) $\cos\left(\text{arcsen}\frac{1}{2}\right)\sqrt{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

b) $\text{sen}\left(\text{arccos}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}$

Teorema

$$\text{arcsen}\,x + \text{arccos}\,x = \frac{\pi}{2};\ \ \forall x \in [-1;1]$$

Demostración

Sea $\alpha = \text{arcsen}x + \text{arccos}x$

$$\text{sen}\,\alpha = \text{sen}(\text{arcsen}x + \text{arccos}x)$$

Aplicando el desarrollo de arcos compuesto (seno de la suma de dos arcos)

$$\text{sen}\alpha = \underbrace{\text{sen}(\text{arcsen}x)}_{x}\underbrace{\cos(\text{arccos}x)}_{x} + \underbrace{\cos(\text{arcsen}x)}_{\sqrt{1-x^2}}\underbrace{\text{sen}(\text{arccos}x)}_{\sqrt{1-x^2}}$$

Observe que cada componente de este desarrollo son propiedades explicadas anteriormente.

Reduciendo obtenemos

$$\text{sen}\,\alpha = x^2 + (1-x^2)$$

$$\text{sen}\,\alpha = 1 \ \wedge\ -\frac{\pi}{2} \le \alpha \le \frac{\pi}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{2}$$

$$\therefore\ \text{arcsen}\,x + \text{arccos}\,x = \frac{\pi}{2}$$

Otra forma

Se sabe que $-\frac{\pi}{2} \leq \arcsen x \leq \frac{\pi}{2}$ ....(1)

$0 \leq \arccos x \leq \pi$ ....(2)

De (2) obtenemos

$-\frac{\pi}{2} \leq \frac{\pi}{2} - \arccos x \leq \frac{\pi}{2}$ ....(3)

De (1) y (3), obtenemos $\arcsen x = \frac{\pi}{2} - \arccos x$

para que esta última igualdad sea verdadera probemos

$\operatorname{sen}(\underbrace{\arcsen x}) = x$

$\underbrace{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \arccos x\right)}_{\text{por arcos complementarios}} = \cos(\arccos x) = x$

Dado lo anterior se verifica

$\arcsen x = \frac{\pi}{2} - \arccos x$

$\therefore \arcsen x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$

De forma análoga demuestre las identidades

$\arctan x + \operatorname{arccot} x = \frac{\pi}{2}; \quad \forall x \in \mathbb{R}$
$\operatorname{arcsec} x + \operatorname{arccsc} x = \frac{\pi}{2}; \quad \forall x \in \mathbb{R} - \langle -1;1 \rangle$

Ejemplo 1

Determine el valor de x en cada uno de los casos siguientes (considere los dominios dados):

- $\arcsen(x-1) + \arccos\frac{3}{4} = \frac{\pi}{2}$

  $\Rightarrow \quad x - 1 = \frac{3}{4} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{7}{4}$

- $\arctan 9x + \operatorname{arccot} 108 = \frac{\pi}{2}$

  $\Rightarrow \quad 9x = 108 \quad \Rightarrow \quad x = 12$

- $\operatorname{arcsec} 24 + \operatorname{arccsc}\frac{x}{3} = \frac{\pi}{2}$

  $\Rightarrow \quad \frac{x}{3} = 24 \quad \Rightarrow \quad x = 72$

Ejemplo 2

Determine el valor de la expresión F

$$F = \cos\left(\arcsen\frac{2}{3} + \arccos\frac{2}{3} + \frac{\pi}{3}\right)$$

Resolución

$$F = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3}\right) = -\operatorname{sen}\frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \therefore F = \frac{-\sqrt{3}}{2}$$

Ejemplo 3

Resuelva la siguiente igualdad

$$2\arcsen x + \arccos x = \frac{5\pi}{6}$$

Resolución

Se tiene $-1 \leq x \leq 1$

$$\arcsen x + \underbrace{(\arcsen x + \arccos x)}_{\frac{\pi}{2}} = \frac{5\pi}{6}$$

$$\arcsen x + \frac{\pi}{2} = \frac{5\pi}{6}$$

$$\arcsen x = \frac{\pi}{3}$$

$$x = \operatorname{sen}\frac{\pi}{3}$$

$$\therefore \quad x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Ejemplo 4

Resuelva la siguiente igualdad $\arcsen x = \arccos x$

Resolución

Como $\arcsen x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow \arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsen x$

Luego reemplazando

$$\arcsen x = \frac{\pi}{2} - \arcsen x$$

$$2\arcsen x = \frac{\pi}{2} \quad ; \quad \arcsen x = \frac{\pi}{4}$$

$$x = \operatorname{sen}\frac{\pi}{4} \quad \therefore \quad x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Teorema

$$\arctan x + \arctan y = \arctan\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)+n\pi$$

siendo

$n=0$, si $xy<1$

$n=1$, si $xy>1 \wedge x>0,\ y>0$

$n=-1$, si $xy>1 \wedge x<0,\ y<0$

Demostración

Sea

$$F=\arctan x + \arctan y \qquad \ldots(1)$$

Tomando tangentes a ambos miembros

$$\tan F=\tan(\arctan x+\arctan y)$$

$$\tan F=\frac{\tan(\arctan x)+\tan(\arctan y)}{1-\tan(\arctan x)\tan(\arctan y)}$$

$$\tan F=\frac{x+y}{1-xy}$$

Resolviendo la ecuación trigonométrica

$$F=n\pi+\arctan\left(\frac{x+y}{1-xy}\right);\quad n\in \mathbb{Z}$$

De (1)

$$\arctan x+\arctan y=\arctan\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)+n\pi \quad\ldots(2)$$

Hallando los valores de n

Por teoría sabemos

$$-\frac{\pi}{2}<\arctan x<\frac{\pi}{2};\quad -\frac{\pi}{2}<\arctan y<\frac{\pi}{2}$$

Sumando estas desigualdades se tiene

$$-\pi<\underline{\arctan x+\arctan y}<\pi$$

$$-\pi<\arctan\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)+n\pi<\pi \qquad\ldots(3)$$

También se tiene

$$-\frac{\pi}{2}<\arctan\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)<\frac{\pi}{2}$$

$$-\frac{\pi}{2}<-\arctan\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)<\frac{\pi}{2} \qquad\ldots(4)$$

Sumando las expresiones 3 y 4

$$-\frac{3\pi}{2}<n\pi<\frac{3\pi}{2} \Rightarrow -\frac{3}{2}<n<\frac{3}{2}$$

Como $n\in\mathbb{Z}$ se tiene $n=\{-1,0,1\}$

Analizamos las condiciones de n

En la expresión 2, tomando cosenos a ambos miembros

$$\cos(\arctan x+\arctan y)=\cos\left(\arctan\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)+n\pi\right)$$

Efectuando

$$\cos(\arctan x)\cos(\arctan y)-\operatorname{sen}(\arctan x)\operatorname{sen}(\arctan y)=\cos\left(\arctan\frac{x+y}{1-xy}\right)\cos(n\pi)$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+y^2}}-\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\cdot\frac{y}{\sqrt{1+y^2}}=\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)^2}}\cdot\cos(n\pi)$$

$$\frac{1-xy}{\sqrt{(1+x^2)(1+y^2)}}=\frac{|1-xy|}{\sqrt{(1+x^2)(1+y^2)}}\cos(n\pi)$$

Luego

$$\cos(n\pi)=\frac{1-xy}{|1-xy|}$$

Si $xy<1\Rightarrow\cos(n\pi)=1\Rightarrow n=0$

$xy>1\Rightarrow\cos(n\pi)=-1\Rightarrow n=-1$ ó $n=1$

También sabemos

- $\arctan x>0\wedge\arctan y>0$

  $\Rightarrow x>0\wedge y>0\Rightarrow n=1$

- $\arctan y<0\wedge\arctan y<0$

  $\Rightarrow x<0\wedge y<0\Rightarrow n=-1$

De esta forma queda demostrado el teorema indicado.

Ejemplo 1

Calcule el valor θ si

$$\theta = \arctan\left(\frac{3}{4}\right) + \arctan\left(\frac{1}{7}\right)$$

Resolución

$$\theta = \arctan\left(\frac{3}{4}\right) + \arctan\left(\frac{1}{7}\right)$$

Aplicando el teorema 3

$$\theta = \arctan\left(\frac{\left(\frac{3}{4}\right)+\left(\frac{1}{7}\right)}{1-\left(\frac{3}{4}\right)\times\left(\frac{1}{7}\right)}\right) + n\pi$$

Como $\left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{1}{7}\right) < 1$ entonces $n=0$

Luego

$$\theta = \arctan\left[\frac{\left(\frac{3}{4}\right)+\left(\frac{1}{7}\right)}{1-\left(\frac{3}{4}\right)\times\left(\frac{1}{7}\right)}\right] = \arctan(1)$$

De donde

$$\theta = \arctan(1) \wedge -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$$

Dado lo anterior obtenemos $\tan\theta = 1$ identificando el valor de θ que cumple con el intervalo

$\left\langle -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right\rangle$ es $\frac{\pi}{4}$

$$\therefore\ \theta = \frac{\pi}{4}$$

Ejemplo 2

Calcule el valor de γ, si

$$\gamma = \arctan 2 + \arctan 4$$

Resolución

Aplicando el teorema 3

$$\gamma = \arctan\left(\frac{2+4}{1-2\times 4}\right) + n\pi$$

Se observa que $2\times 4 > 1$, entonces $n=1$

$$\gamma = \arctan\left(\frac{2+4}{1-2\times 4}\right) + \pi$$

$$\gamma = \arctan\left(\frac{-6}{7}\right) + \pi$$

$$\therefore\ \ \gamma = \pi - \arctan\frac{6}{7}$$

Teorema

$$\operatorname{arcsen} x = \operatorname{arccsc}\left(\frac{1}{x}\right);\ \ -1 \le x \le 1 - \{0\}$$

$$\arccos x = \operatorname{arcsec}\left(\frac{1}{x}\right);\ \ -1 \le x \le 1 - \{0\}$$

$$\arctan x = \operatorname{arccot}\left(\frac{1}{x}\right);\ \ x > 0$$

$$\arctan x = \operatorname{arccot}\left(\frac{1}{x}\right) - \pi;\ \ x < 0$$

Demostración

i) Sea $\theta = \operatorname{arcsen} x$ ....(1)

$\Rightarrow\ \operatorname{sen}\theta = x;\ x \in [-1;1]$

entonces $\csc\theta = \frac{1}{x};\ \ x \neq 0$

$\theta = \operatorname{arccsc}\left(\frac{1}{x}\right)$ .....(2)

Igualando (1) y (2)

$\operatorname{arcsen} x = \operatorname{arccsc}\left(\frac{1}{x}\right)$ siendo $-1 \le x \le 1 - \{0\}$

ii) Demostremos $\arctan x = \operatorname{arccot}\left(\frac{1}{x}\right);\ x>0$

sea θ un arco de la C.T.

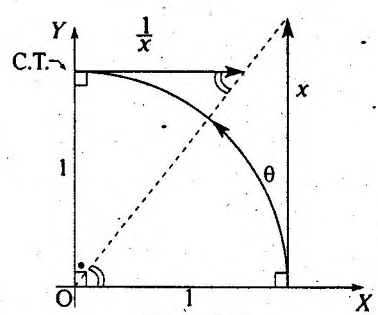


Figura 7.94

De la figura se tiene

- $\tan\theta = x \Rightarrow \theta = \arctan x$ ...(1)

También

- $\cot\theta = \dfrac{1}{x} \Rightarrow \theta = \text{arccot}\left(\dfrac{1}{x}\right)$ ...(2)

Igualando (1) y (2)

$$\arctan x = \text{arccot}\left(\frac{1}{x}\right);\ x>0$$

iii) Demostremos

$$\arctan x = \text{arccot}\left(\frac{1}{x}\right)-\pi;\ x<0$$

Partimos de

$\arctan x = -\arctan(-x)$ como $(-x)>0$

$$\arctan x = -\text{arccot}\left(\frac{1}{-x}\right)$$

$$\arctan x = -\text{arccot}\left(-\frac{1}{x}\right)$$

$$\arctan x = -\left(\pi-\text{arccot}\frac{1}{x}\right)$$

$\therefore \arctan x =$

$\text{arccot}\left(\dfrac{1}{x}\right)-\pi$ (Esto es lo que se buscaba demostrar)

Ejemplos

Se cumple que

- $\text{arcsen}\left(\dfrac{1}{3}\right)=\text{arccsc}3$; $\dfrac{1}{3}\in[-1,1]$
- $\arccos\left(\dfrac{2}{5}\right)=\text{arcsec}\left(\dfrac{5}{2}\right)$; $\dfrac{2}{5}\in[-1,1]$
- $\arctan 4=\text{arccot}\left(\dfrac{1}{4}\right)$; $4>0$
- $\arctan\left(\dfrac{1}{10}\right)=\text{arccot}10$; $\dfrac{1}{10}>0$
- $\arctan\left(\dfrac{24}{25}\right)=\text{arccot}\left(\dfrac{25}{24}\right)$; $\dfrac{25}{24}>0$
- $\arctan\left(-\dfrac{2}{3}\right)=\text{arccot}\left(-\dfrac{3}{2}\right)-\pi$; $-\dfrac{2}{3}<0$
- $\arctan(\sqrt{2}+1)=\text{arccot}(\sqrt{2}-1)$; $(\sqrt{2}+1)>0$
- $\arctan(1-\sqrt{5})=\text{arccot}\left(\dfrac{1}{1-\sqrt{5}}\right)-\pi$;$(1-\sqrt{5})<0$
- $\text{arccot}(-2)=\arctan\left(\dfrac{1}{-2}\right)+\pi$; $\dfrac{1}{-2}<0$
- $\text{arccot}\left(\dfrac{1}{\cos^2x-4}\right)=\arctan(\cos^2x-4)+\pi$;

$\cos^2x-4<0$

A continuación se desarrollarán ejemplos para utilizar el teorema de la página **531**.

Ejemplo 1

Calcule $F=\arctan(2003)+\arctan\left(\dfrac{1}{2003}\right)$

Resolución

$$F=\arctan(2003)+\text{arccot}(2003)$$

Por propiedad $F=\dfrac{\pi}{2}$

Ejemplo 2

Calcule $D=\text{sen}(13\pi+\text{arccsc}(1,5))$

Resolución

$$D=\text{sen}\left(12\pi+\pi+\text{arccsc}\left(\frac{3}{2}\right)\right)$$

$$D=\text{sen}\left(\pi+\text{arccsc}\frac{3}{2}\right)$$

$$D=-\text{sen}\left(\text{arccsc}\frac{3}{2}\right)$$

$D=-\text{sen}\left(\text{arcsen}\dfrac{2}{3}\right)$ dado que $\dfrac{2}{3}\in[-1;1]$

$$\Rightarrow D=-\frac{2}{3}$$

Ejemplo 3

Calcule $N=\tan\left(\operatorname{arccot}(1-\sqrt{2})\right)$

Resolución

$$N=\tan\left(\operatorname{arccot}\left(-(\sqrt{2}-1)\right)\right)$$

$$N=\tan\left(\pi-\operatorname{arccot}(\sqrt{2}-1)\right)$$

$$N=-\tan\left(\operatorname{arccot}(\sqrt{2}-1)\right)$$

$$N=-\tan\left(\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{2}-1}\right)\right);\quad \frac{1}{\sqrt{2}-1}\in R$$

$$N=-\left(\frac{1}{\sqrt{2}-1}\right)$$

$$N=-(\sqrt{2}+1)$$

Ejemplo 4

Calcule $P=\cot(\arctan 2+\arctan 5)$

Resolución

$$(2)(5)=10>1\wedge 2>0\Rightarrow K=1$$

entonces

$$P=\cot\left(\arctan\left(\frac{2+5}{1-2\times 5}\right)+\pi\right)$$

$$P=\cot\left(\arctan\left(-\frac{7}{9}\right)\right)$$

$$P=\cot\left(-\arctan\left(\frac{7}{9}\right)\right)$$

$$P=-\cot\left(\arctan\left(\frac{7}{9}\right)\right)$$

$$P=-\cot\left(\operatorname{arccot}\left(\frac{9}{7}\right)\right)\text{ dado que }\frac{9}{7}\in\mathbb{R}$$

$$\therefore\ P=-\frac{9}{7}$$

Ejemplo 5

Halle el valor de $R=\operatorname{sen}\left(\arctan\frac{1}{3}+\arctan\frac{1}{4}\right)$

Resolución

A partir de la expresión R tenemos

$$R=\operatorname{sen}\left(\arctan\left(\frac{\frac{1}{3}+\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}}\right)+k\pi\right)$$

pero como $\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{4}\right)<1\Rightarrow K=0$

Luego reduciendo $R=\operatorname{sen}\left(\arctan\frac{7}{11}\right)$

sea $\alpha=\arctan\frac{7}{11}\Rightarrow\tan\alpha=\frac{7}{11}$

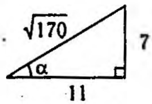


Figura 7.95

de donde $R=\operatorname{sen}\alpha$

$$\therefore\ R=\frac{7\sqrt{170}}{170}$$

Ejemplo 6

Halle el valor de $F=\cos\left(\arcsen\left(\frac{3}{5}\right)+\operatorname{arccot}\left(\frac{1}{3}\right)\right)$

Resolución

A partir de F tenemos

$$F=\cos\left(\arctan\frac{3}{4}+\arctan 3\right)$$

$$F=\cos\left(\arctan\left(\frac{\frac{3}{4}+3}{1-\frac{3}{4}\times 3}\right)+k\pi\right)$$

Pero $\left(\frac{3}{4}\right)(3)>1\wedge\frac{3}{4}>0\Rightarrow k=1$

Luego reduciendo $F=-\cos(\arctan(-3))$

$$\Rightarrow F=\cos(\arctan 3)\quad\therefore\ F=\frac{\sqrt{10}}{10}$$

A continuación desarrollaremos ejemplos gráficos donde se da la regla de correspondencia y se pide dominio, rango y gráfica.

Ejemplo 1

$$y = \text{arcsen}\frac{x}{2}$$

Resolución

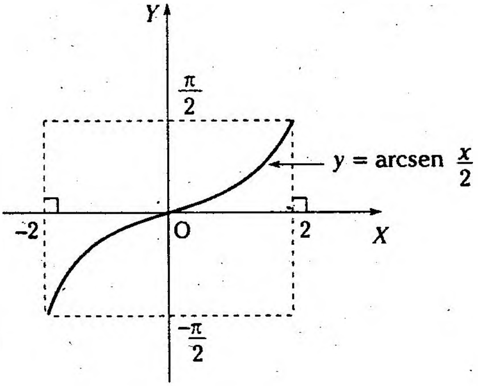


Figura 7.96

- El dominio de la función se determina a partir de

$$-1 \leq \frac{x}{2} \leq 1 \Rightarrow -2 \leq x \leq 2$$

$\therefore$ Dom f = [–2 ; 2]

- El rango de la función es evidente

$$-\frac{\pi}{2} \leq \underbrace{\text{arcsen}\frac{x}{2}}_{y} \leq \frac{\pi}{2}$$

$$-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$$

$$\therefore \text{Ran f} = \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$$

Ejemplo 2

y = arc cos $2x$

Resolución

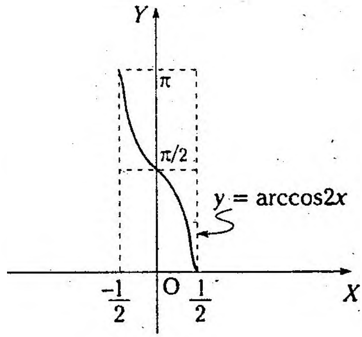


Figura 7.97

- El dominio de la función se determina a partir de $-1 \leq 2x \leq 1 \Rightarrow -\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}$.

$$\therefore \text{Dom f} = \left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]$$

- El rango de la función se halla por

$$0 \leq \underbrace{\text{arc cos} 2x}_{y} \leq \pi$$

$$0 \leq y \leq \pi$$

$\therefore$ Ran f = [0 ; π]

Ejemplo 3

y = 2 arc sen x

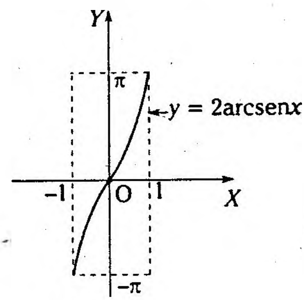


Figura 7.98

Resolución

- El dominio de la función se halla por $-1 \leq x \leq 1$

$\therefore \text{Dom} f = [-1;1]$

- El rango de la función se determina a partir de $-\frac{\pi}{2} \leq \text{arcsen}\, x \leq \frac{\pi}{2}$, multiplicando por 2

entonces $\quad -\pi \leq \underbrace{2\text{arcsen}\, x} \leq \pi$

$$-\pi \leq y \leq \pi$$

$\therefore \text{Ran} f = [-\pi;\pi]$

Ejemplo 4

$$y = \frac{1}{3}\text{arc}\cos x$$

Resolución

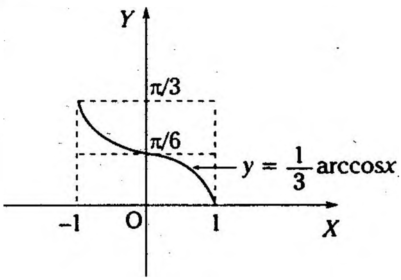


Figura 7.99

- El dominio de la función se halla por $-1 \leq x \leq 1$

$\therefore \text{Dom} f = [-1;1]$

- El rango de la función se determina a partir de $0 \leq \arccos x \leq \pi$, dividiendo entre 3

entonces $\quad 0 \leq \underbrace{\frac{1}{3}\arccos x} \leq \frac{\pi}{3}$

$$0 \leq y \leq \frac{\pi}{3}$$

$\therefore \text{Ran} f = [0;\pi/3]$

Ejemplo 5

$y = \text{arc sen}\,(x-1)$

Resolución

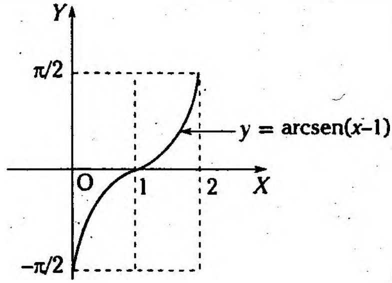


Figura 7.100

- El dominio de la función se halla a partir de $-1 \leq x-1 \leq 1 \Rightarrow 0 \leq x \leq 2$.

$\therefore \text{Dom} f = [0;2]$

- El rango de la función se halla por

$$-\frac{\pi}{2} \leq \underbrace{\text{arc sen}(x-1)} \leq \frac{\pi}{2}$$

$$-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$$

$\therefore \text{Ran} f = \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$

Ejemplo 6

$$y = \arccos\left(\frac{x}{2}+1\right)$$

Resolución

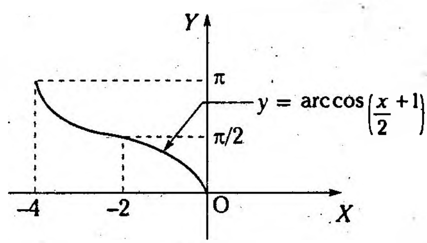


Figura 7.101

- El dominio de la función se halla a partir de

$-1\leq\frac{x}{2}+1\leq 1 \Rightarrow -4\leq x\leq 0$

$\therefore$ Dom f = [−4 ; 0]

- El rango de la función se determina considerando

$$0\leq \underbrace{\arccos\left(\frac{x}{2}+1\right)}\leq\pi$$

$$0\leq \quad y \quad \leq\pi$$

$\therefore$ Ran f = [0; π]

Ejemplo 7

$$y=\frac{\pi}{4}+\operatorname{arcsen}x$$

Resolución

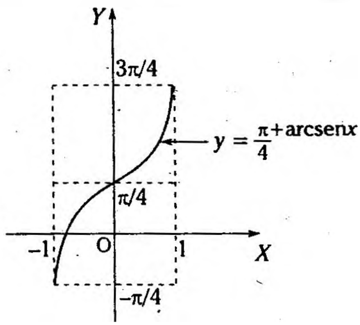


Figura 7.102

- El dominio de la función se conoce $-1\leq x\leq 1$.

$\therefore$ Domf = [−1; 1]

- El rango de la función se halla a partir de

$-\frac{\pi}{2}\leq \operatorname{arcsen}x\leq\frac{\pi}{2}$

$$-\frac{\pi}{4}\leq \underbrace{\frac{\pi}{4}+\operatorname{arc\ sen}x}\leq\frac{3\pi}{4}$$

$$-\frac{\pi}{4}\leq \quad y \quad \leq 3\frac{\pi}{4}$$

$\therefore$ $\operatorname{Ranf}=\left[-\frac{\pi}{4};\frac{3\pi}{4}\right]$

Ejemplo 8

$$y=\operatorname{arc\ cos}x-\frac{\pi}{3}$$

Resolución

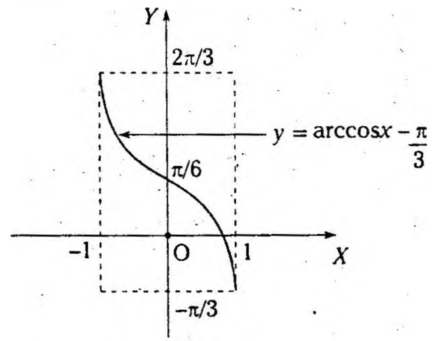


Figura 7.103

- El dominio de la función se conoce $-1\leq x\leq 1$

$\therefore$ Dom f = [−1; 1]

- El rango de la función se halla a partir de

$0\leq \arccos x\leq\pi$

$$-\frac{\pi}{3}\leq \underbrace{\arccos x-\frac{\pi}{3}}\leq\frac{2\pi}{3}$$

$$-\frac{\pi}{3}\leq \quad y \quad \leq\frac{2\pi}{3}$$

$\therefore$ $\operatorname{Ranf}=\left[-\frac{\pi}{3};\frac{2\pi}{3}\right]$

En general

Sea la función $y = A\operatorname{arcsen}(Bx+C)+D$; A, B > 0

El dominio depende de B y C; así

$$-1\leq Bx+C\leq 1 \Rightarrow \frac{-1-C}{B}\leq x\leq\frac{1-C}{B}$$

El rango depende de A y D, así

$$\frac{-\pi}{2}\leq \operatorname{arcsen}(Bx+C)\leq\frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{-\pi}{2}A+D\leq \underbrace{A\operatorname{arcsen}(Bx+C)+D}_{y}\leq\frac{\pi}{2}A+D$$

$$\Rightarrow \frac{-\pi}{2}A+D \quad\leq\quad y \quad\leq\quad \frac{\pi}{2}A+D$$

Como sabemos, del tema sobre las reglas de construcción de gráficos, el parámetro A estira o contrae verticalmente al gráfico de y=arcsen$x$.
El parámetro B estira o contrae horizontalmente al gráfico de y=arcsen$x$
Los parámetros B y C, desplazan a la derecha o izquierda el gráfico de y=arcsen(Bx), una longitud igual a $\left|\frac{C}{B}\right|$ (si $\frac{C}{B}>0$ ó $\frac{C}{B}<0$ respectivamente).
El parámetro D desplaza hacia arriba o abajo el gráfico de y=Aarcsen(Bx+C) una longitud igual a |D| (si D>0 ó D<0 respectivamente).

Observación

- De manera análoga se aplican los criterios indicados en las demás funciones.

Construir el gráfico de las siguientes funciones con regla de correspondencia y=f(x)

Ejemplo 1

$$y=2\text{ arc sen}(x-2)+\frac{\pi}{2}$$

Resolución

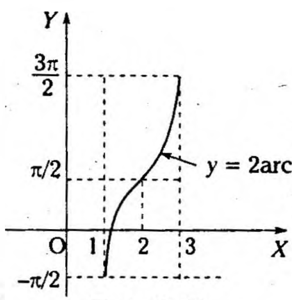


Figura 7.104

El dominio $-1\le x-2\le 1\Rightarrow 1\le x\le 3$

$\therefore$ Dom f = [1;3]

Desplazamiento horizontal: 2 (a la derecha)

El rango $-\frac{\pi}{2}\le \text{arcsen}(x-2)\le\frac{\pi}{2}$; multiplicando por 2

$$-\pi\le 2\text{arcsen}(x-2)\le\pi;\ \text{sumando } \pi/2$$

$$\Rightarrow\ -\frac{\pi}{2}\le \underbrace{2\text{arcsen}(x-2)+\frac{\pi}{2}}\le\frac{3\pi}{2}$$

$$-\frac{\pi}{2}\le\quad y\quad\le\frac{3\pi}{2}$$

$$\therefore\ \text{Ran f}=\left[\frac{-\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right]$$

Desplazamiento vertical $\frac{\pi}{2}$ (hacia arriba)

Ejemplo 2

$$y=4\text{arccos}\left(3x-\frac{1}{2}\right)-1$$

Resolución

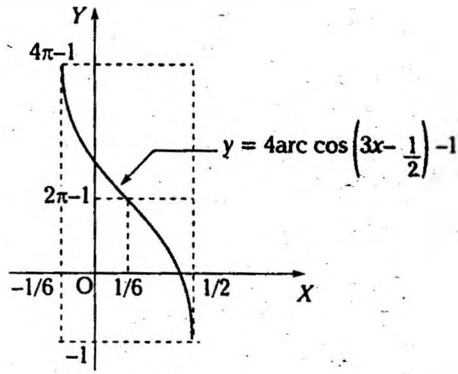


Figura 7.105

El dominio $-1\le 3x-\frac{1}{2}\le 1\Rightarrow -\frac{1}{6}\le x\le\frac{1}{2}$

$$\therefore\ \text{Dom f}=\left[\frac{-1}{6};\frac{1}{2}\right]$$

Desplazamiento horizontal $\frac{1}{6}$ (a la derecha)

El rango $0\le\text{arccos}\left(3x-\frac{1}{2}\right)\le\pi$; multiplicando por 4 y restando 1

$$-1\le\underbrace{4\text{arccos}(3x-\frac{1}{2})-1}_{y}\le 4\pi-1$$

$$\therefore\ \text{Ran f}=[-1;4\pi-1]$$

Problemas Resueltos

Problema 1

¿Qué funciones son inyectivas?

a) $f(x) = 2\cot 2x - \cot x;\ \forall x \in \left\langle \frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right\rangle$

b) $g(x) = \text{sen}\,(\log x)$

c) $h(x) = \cos\,(\text{sen}\,x)$

Resolución

a) Por definición si $f(a)=f(b)$ demostremos que $a=b$ para que la función sea inyectiva.

$f(x) = 2\cot 2x - \cot x\ ;\ \forall x \in \left\langle \frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right\rangle$

$\Rightarrow\ 2\cot 2a - \cot a = 2\cot 2b - \cot b$

$2\cot 2a-(\csc 2a+\cot 2a)=2\cot 2b-(\csc 2b+\cot 2b)$

Efectuando

$\csc 2a-\cot 2a=\csc 2b-\cot 2b \Rightarrow \tan a = \tan b$

$\tan a - \tan b = 0 \Rightarrow \dfrac{\text{sen}(a-b)}{\cos a\cos b}=0$

$\Rightarrow\ a-b = k\pi,\ k\in \mathbb{Z}$

Como $a,\ b\in\left\langle \frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right\rangle$

$\Rightarrow\ \frac{\pi}{2}<a<\frac{3\pi}{2} \wedge \frac{-3\pi}{2}<-b<-\frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow\ -\pi<a-b<\pi \rightarrow -\pi<K\pi<\pi$

$\Rightarrow\ -1<K<1 \Rightarrow K=0$

$\therefore\ a=b$

Si $k=0 \Rightarrow a=b$, es lo que se quería demostrar.

Otra forma

Este es un mecanismo práctico mediante el cual podemos construir el gráfico . Si trazamos una recta horizontal, debe intersectar a la gráfica por lo menos en un solo punto, así

$f(x) = 2\cot 2x - \cot x;\quad x \neq \pi$

$f(x) = 2\cot 2x - (\csc 2x+\cot 2x)$

$f(x) = -(\csc 2x - \cot 2x)$

$f(x) = -\tan x$

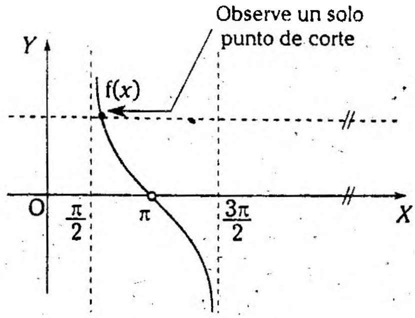


Figura 7.106

Efectivamente la recta horizontal que corta a f es un solo punto, entonces concluimos que es **inyectiva**.

b) Por definición supongamos que $g(a)=g(b)$, dado que $g(x)=\text{sen}(\log x);\ x>0$

Entonces

$\text{sen}\,(\log a) = \text{sen}\,(\log b)$

$\text{sen}\,(\log a) - \text{sen}\,(\log b) = 0$

$2\cos\left(\dfrac{\log a+\log b}{2}\right)\text{sen}\left(\dfrac{\log a-\log b}{2}\right)=0$

$\Rightarrow \cos\left(\dfrac{\log(ab)}{2}\right)\text{sen}\left(\dfrac{\log(a/b)}{2}\right)=0$

$\dfrac{\log(ab)}{2}=(2k+1)\dfrac{\pi}{2}\ \vee\ \dfrac{\log(a/b)}{2}=k\pi$

De este último si $k=0$

$\log(a/b)=0 \Rightarrow a/b=1 \Rightarrow a=b$

$\therefore\ g(x)$ es inyectiva

c) Para este problema podemos aplicar el siguiente criterio.

Por definición de función periódica $h(x+T)=h(x)$

Entonces $\cos\,[\text{sen}(x+T)] = \cos\,(\text{sen}\,x)$

Donde se cumple para $T=\pi\,;2\pi\,;3\pi\,;....$

Entonces, como h es una función periódica y como toda función periódica no es función inyectiva, concluimos que h no es función inyectiva.

blema 2

nstruya el gráfico de la función definida por

$$f(x) = \pi - 3\arccos\left(\frac{x}{4}+\frac{1}{2}\right)$$

solución

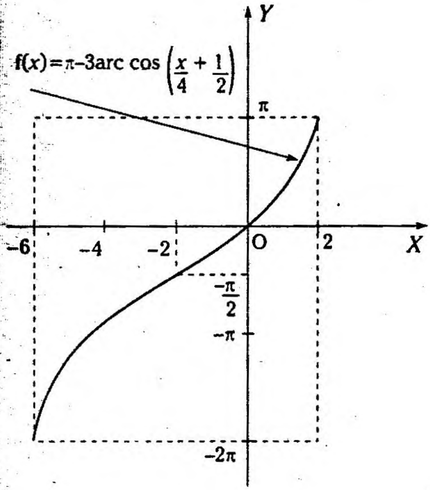


Figura 7.107

lculo del dominio de f

$$-1 \le \frac{x}{4}+\frac{1}{2} \le 1 \Rightarrow -6 \le x \le 2$$

Dom f=[−6; 2]

lculo del rango de f

$$0 \le \arccos\left(\frac{x}{4}+\frac{1}{2}\right) \le \pi$$

$$-3\pi \le -3\arccos\left(\frac{x}{4}+\frac{1}{2}\right) \le 0$$

$$-2\pi \le \underbrace{\pi - 3\arccos\left(\frac{x}{4}+\frac{1}{2}\right)}_{y} \le \pi$$

Ran f = [−2π;π]

Problema 3

Halle la regla de correspondencia de la gráfica de la función f, presentada en la figura 7.108.

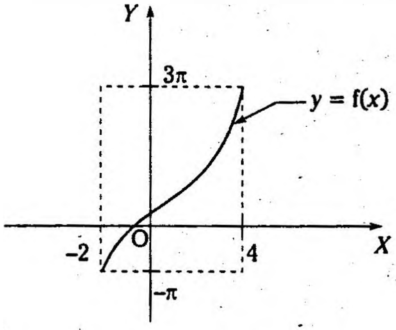


Figura 7.108

Resolución

Sea la ecuación de f: $f(x) = A\arcsen(Bx+C)+D$

Considerando $A, B > 0$

del gráfico $-2 \le x \le 4$

Multiplicando B y sumando C

$$-2B+C \le Bx+C \le 4B+C \quad ......\ (1)$$

Por definición del arco seno

$$-1 \le Bx+C \le 1 \quad ......\ (2)$$

Entonces de (1) y (2) $-2B+C=-1 \ \wedge\ 4B+C=1$

Resolviendo el sistema

$$B = 1/3 \ ; \ C = -1/3$$

Del gráfico $-\pi \le y \le 3\pi$

$$-\pi \le A\arcsen\left(\frac{x-1}{3}\right)+D \le 3\pi$$

Sumamos (−D) y multiplicamos por $\left(\frac{1}{A}\right)$

$$\frac{-\pi-D}{A} \le \arcsen\left(\frac{x-1}{3}\right) \le \frac{3\pi-D}{A} \quad ......\ (3)$$

Por definición $\frac{-\pi}{2} \le \arcsen\left(\frac{x-1}{3}\right) \le \frac{\pi}{2}$ ...... (4)

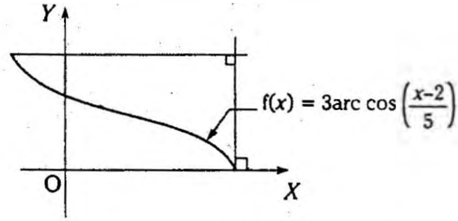
Entonces de (3) y (4) $\frac{-\pi-D}{A} = \frac{-\pi}{2} \ \wedge\ \frac{3\pi-D}{A} = \frac{\pi}{2}$

Resolviendo el sistema $A = 4 \ ; \ D = \pi$

Por lo tanto $f(x) = 4\arcsen\left(\frac{x-1}{3}\right)+\pi$

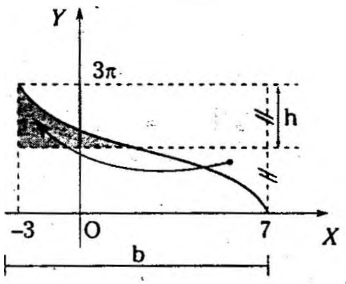
Problema 4

Halle el área de la región sombreada



(a)

Resolución



(b)

Figura 7.109

Trasladando regiones (por simetría) convenientemente, formamos un rectángulo de dimensiones b y h, entonces el área de la región sombreada es

$$S = b\times h \quad ....(1)$$

De la ecuación de la función obtenida

I. $\quad -1\leq \dfrac{x-2}{5}\leq 1 \Rightarrow -3\leq x\leq 7$

II. $\quad 0\leq \operatorname{arccos}\left(\dfrac{x-2}{5}\right)\leq \pi \Rightarrow 0\leq y\leq 3\pi$

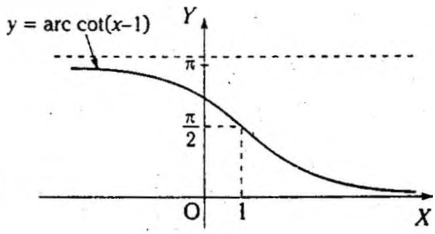
Luego $\quad b=10$; $\ h=\dfrac{3\pi}{2}$

En (1): $\ S = 15\pi\, u^2$

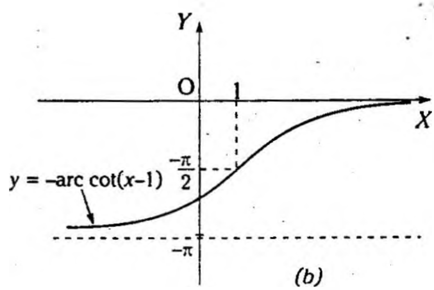
Problema 5

Construya el gráfico de $y=\left|\dfrac{\pi}{4}-\operatorname{arccot}(x-1)\right|$

Resolución

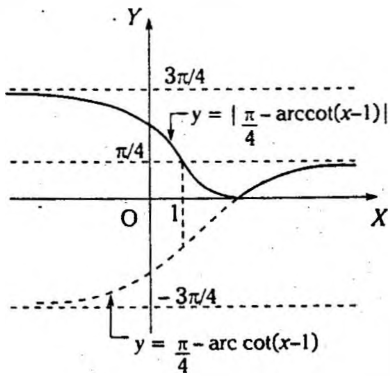


(a)



(b)

Finalmente la gráfica de la función será la curva resaltada en la figura 7.110(c)



(c)

Figura 7.110

Problema 6

Calcule el valor de

$$k = 5\tan\left(\frac{\pi}{4} + 2\operatorname{arccsc}\frac{\sqrt{13}}{2} - \operatorname{arcsec} 2{,}6\right)$$

Resolución

Sea $\operatorname{arc\,csc}\frac{\sqrt{13}}{2} = \alpha \Rightarrow \csc\alpha = \frac{\sqrt{13}}{2}$

Como $\alpha \in \left\langle 0; \frac{\pi}{2}\right\rangle \Rightarrow \operatorname{sen}\alpha = \frac{2}{\sqrt{13}}$

Cálculo de $\cos 2\alpha$

$$\cos 2\alpha = 1 - 2\operatorname{sen}^2\alpha$$

$$\cos 2\alpha = 1 - 2\left(\frac{2}{\sqrt{13}}\right)^2 = \frac{5}{13}$$

$\Rightarrow \sec 2\alpha = 2{,}6$ o sea

$2\alpha = \operatorname{arcsec} 2{,}6$ ... ya que $0 < 2\alpha < \pi$

Reemplazando en la expresión original

$$k = 5\tan\left(\frac{\pi}{4} + \operatorname{arcsec} 2{,}6 - \operatorname{arcsec} 2{,}6\right)$$

$$k = 5\tan\frac{\pi}{4}$$

$\therefore\ k = 5$

Problema 7

Evalúe la expresión

$$k = \operatorname{sen}\left\{2\operatorname{arc\,tan}\left[\sqrt{3}\cos\left(2\operatorname{arcsen}\frac{\sqrt{5}}{3}\right)\right]\right\}$$

Resolución

Sea $\alpha = \operatorname{arcsen}\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right) \Rightarrow \operatorname{sen}\alpha = \frac{\sqrt{5}}{3} \wedge 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$

Cálculo de $\cos 2\alpha$

$$\cos 2\alpha = 1 - 2\operatorname{sen}^2\alpha \Rightarrow \cos 2\alpha = 1 - 2\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2$$

$$\Rightarrow \cos 2\alpha = -\frac{1}{9}$$

Sustituyendo en la expresión original

$$k = \operatorname{sen}\left\{2\arctan\left[\sqrt{3}\left(-\frac{1}{9}\right)\right]\right\}$$

Aplicando $\arctan(-x) = -\arctan x$ y $\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen}x$

$$k = -\operatorname{sen}\left\{2\arctan\frac{\sqrt{3}}{9}\right\} \quad \text{.............(I)}$$

Sea $\theta = \arctan\frac{\sqrt{3}}{9} \Rightarrow \tan\theta = \frac{\sqrt{3}}{9} \wedge 0 < \theta < \frac{\pi}{2}$

Cálculo de $\operatorname{sen} 2\theta$

$$\operatorname{sen} 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1 + \tan^2\theta} = \frac{2(\sqrt{3}/9)}{1 + (\sqrt{3}/9)^2}$$

$$\operatorname{sen} 2\theta = \frac{3\sqrt{3}}{14}$$

Sustituyendo en (I): $k = -\frac{3\sqrt{3}}{14}$

Problema 8

Determine el valor de la expresión

$$\tan\left(\frac{3\pi}{4} + \frac{1}{2}\operatorname{arcsen}\frac{1}{3}\right)$$

Resolución

Sea $\alpha = \operatorname{arcsen}\frac{1}{3} \Rightarrow \operatorname{sen}\alpha = \frac{1}{3} \wedge 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ ....(I)

Recuerde la identidad $\tan\frac{x}{2} = \csc x - \cot x$

Luego

$$\tan\left(\frac{3\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}\right) = \csc\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) - \cot\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right)$$

$$\tan\left(\frac{3\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}\right) = -\sec\alpha + \tan\alpha \quad \text{..........(II)}$$

De la condición (I)

$\operatorname{sen}\alpha = \frac{1}{3} \Rightarrow$

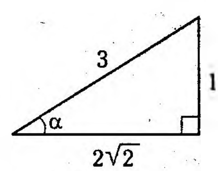


Figura 7.111

En (II)

$$\tan\left(\frac{3\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)=-\left(\frac{3}{2\sqrt{2}}\right)+\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)$$

$$\Rightarrow \tan\left(\frac{3\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\therefore \tan\left(\frac{3\pi}{4}+\frac{1}{2}\operatorname{arcsen}\frac{1}{3}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Problema 9

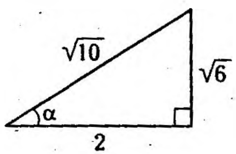
Determine el valor de

$$E=\cos\left(\arctan\frac{\sqrt{6}}{2}-\arccos\frac{1}{5}\right)$$

Resolución

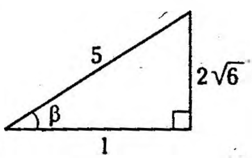
Hacemos que

$$\alpha=\arctan\frac{\sqrt{6}}{2} \Rightarrow \tan\alpha=\frac{\sqrt{6}}{2} \wedge 0<\alpha<\frac{\pi}{2}$$

$\Rightarrow$ 

(a)

También $\beta=\arccos\frac{1}{5} \Rightarrow \cos\beta=\frac{1}{5} \wedge 0<\beta<\frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow$ 

(b)

Figura 7.112

Reemplazando y efectuando por la identidad de arcos compuestos la expresión a calcular

$$E=\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\operatorname{sen}\alpha.\operatorname{sen}\beta$$

$$E=\frac{2}{\sqrt{10}}\cdot\frac{1}{5}+\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{10}}\cdot\frac{2\sqrt{6}}{5}=\frac{14}{5\sqrt{10}}$$

$$\therefore E=\frac{7\sqrt{10}}{25}$$

Problema 10

Determine el dominio y rango de la función

$$f(x)=\frac{\operatorname{arcsen}x}{\arccos x}$$

Resolución

Determinamos el dominio de f considerando

$$\arccos x\neq 0 \Rightarrow x\neq 1$$

$\therefore \operatorname{Dom} f=[-1;1\rangle$

Cálculo del rango de f ; expresando f únicamente con arccos x

$$y=\frac{\operatorname{arcsen}x}{\arccos x}=\frac{\frac{\pi}{2}-\arccos x}{\arccos x}=\frac{\frac{\pi}{2}}{\arccos x}-\frac{\arccos x}{\arccos x}$$

$$y=\frac{\pi}{2\arccos x}-1$$

Del dominio de f: $-1\leq x<1$, se obtiene

$$0<\arccos x\leq\pi$$

$\Rightarrow \frac{1}{\arccos x}\geq\frac{1}{\pi}$ se invirtió puesto que $\arccos x>0$

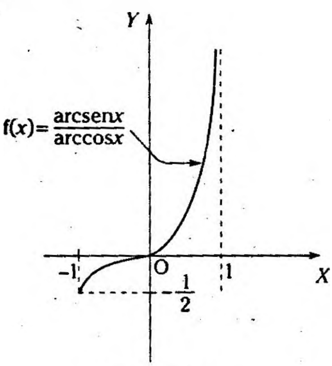


Figura 7.113

Multiplicando por $\left(\frac{\pi}{2}\right)$ $\quad \frac{\pi}{2\arccos x}\geq\frac{1}{2}$

Sumando (−1) $\quad \underbrace{\frac{\pi}{2\arccos x}-1}_{y}\geq-\frac{1}{2}$

$$\therefore \operatorname{Ran} f=\left[-\frac{1}{2};+\infty\right\rangle$$

Problema 11

Determine los valores de la función f y represente su gráfico.

$$f(x)=\text{sen}(\arccos x)\ \cos(\text{arcsen}\ x)$$

Resolución

1ra. forma

$$f(x) = \text{sen}(\text{arc}\cos x)\ .\ \underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\text{arc}\cos x\right)}$$

$$= \text{sen}\ (\text{arc}\cos x)\ \ .\ \ \text{sen}\ (\text{arc}\cos x)$$

$$= \text{sen}^2(\text{arc}\cos x)$$

$$= 1-\cos^2(\text{arc}\cos x);$$

$$f(x) = 1-x^2\ ;\ \forall x\in[-1;1]$$

Del dominio de f: $-1\le x\le 1 \Rightarrow 0\le f(x)\le 1$

La gráfica de la función f se muestra en la figura 7.114

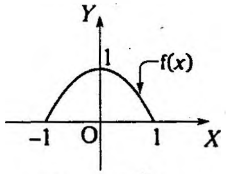


Figura 7.114

2da. forma

Recordando el teorema, de la página **536**

$$\text{sen}(\arccos x)=\sqrt{1-x^2},$$

$$\cos(\text{arcsen}x)=\sqrt{1-x^2}$$

entonces

$$f(x)=\underbrace{\text{sen}(\text{arc}\cos x)}_{\sqrt{1-x^2}}.\underbrace{\cos(\text{arc}\,\text{sen}\,x)}_{\sqrt{1-x^2}}$$

$$f(x)=1-x^2$$

Como es evidente para $-1\le x\le 1$, se obtiene $0\le f(x)\le 1$.

Problema 12

Determine el dominio de la siguiente función f, cuya regla de correspondencia es

$$f(x)=\sqrt{\frac{\arctan|x|}{\text{arccot}x}-1}$$

Resolución

Como es sabido $0<\text{arccot}x<\pi$, entonces no existe un x, tal que arccot$x$=0.

Analizando el radicando de la expresión f(x)

$$\frac{\arctan|x|}{\text{arccot}x}-1\ge 0$$

$\Rightarrow$ arctan$|x|\ge$arccot$x$ ya que arccot$x$ es positivo.

Resolviendo la inecuación gráficamente (ver figura 7.115) se observa que la desigualdad anterior se cumple si $x\ge 1$

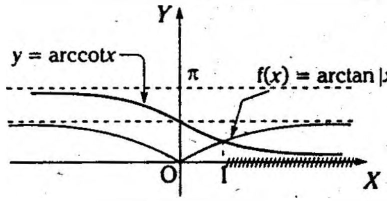


Figura 7.115

$\therefore$ Dom f $=[1;+\infty\rangle$

Problema 13

Exprese W en términos de x

$$W=\text{sen}(\text{sen}^{-1}x-\cos^{-1}2x)\ \ ;\ \ -1<x<0$$

Resolución

También W se puede escribir como

$$W = \text{sen}\ (\text{arc}\ \text{sen}x-\text{arc}\cos 2x)$$

donde $x\in[-1/2;0\rangle$

Sea

- $\theta=\text{arcsen}x \Rightarrow \text{sen}\theta=x\ ;\ -\frac{1}{2}\le x<0$

  $\Rightarrow \cos\theta=\sqrt{1-x^2}$ porque $\theta\in[-\pi/6;0\rangle$

- $\beta=\arccos 2x \Rightarrow \cos\beta=2x\ ;\ -1\le 2x<0$

  $\Rightarrow \text{sen}\beta=\sqrt{1-4x^2}$ porque $\beta\in\left\langle\frac{\pi}{2};\pi\right]$

Efectuando la expresión W aplicando las identidades de arcos compuestos

$$W=\text{sen}(\theta-\beta)=\text{sen}\theta\cos\beta-\cos\theta\text{sen}\beta$$

Sustituyendo valores

$$W=x(2x)-\sqrt{1-x^2}.\sqrt{1-4x^2}$$

$$W=2x^2-\sqrt{1-5x^2+4x^4}$$

Problema 14

Luego de analizar la función $H(x)=4\operatorname{sen}x-\cos 2x$ para todo $x\in\left\langle\frac{\pi}{5};\pi+\arccos\frac{\sqrt{7}}{4}\right]$, determine su rango.

Resolución

Expresando H en términos senos

$$H(x) = 4\operatorname{sen}x-(1-2\operatorname{sen}^2x)$$

se uso la identidad $\cos 2x=1-2\operatorname{sen}^2 x$

$$H(x) = 2(\operatorname{sen}^2x+2\operatorname{sen}x)-1$$

Completando cuadrados

$$H(x) = 2\underbrace{(\operatorname{sen}^2x+2\operatorname{sen}x+1}_{(\operatorname{sen}x+1)^2}-1)-1$$

$$H(x) = 2(\operatorname{sen}x+1)^2-3$$

ya que la función H sólo depende del sen$x$, pues analizamos los valores de éste en el dominio dado.

$$\frac{\pi}{5}<x\le\underbrace{\pi+\arccos\frac{\sqrt{7}}{4}}_{\theta}$$

Si $\theta=\arccos\frac{\sqrt{7}}{4}$

$$\Rightarrow \cos\theta=\frac{\sqrt{7}}{4}\ \wedge\ 0<\theta<\frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \operatorname{sen}\theta=\frac{3}{4}$$

Dibujamos al conjunto de x en la C.T.

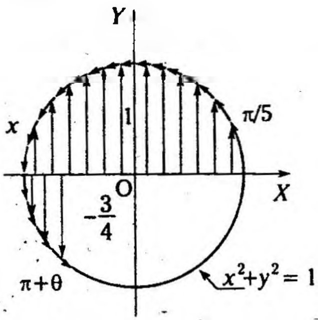


Figura 7.116

Entonces

$$\operatorname{sen}(\pi+\theta)\le\operatorname{sen}x\le 1$$

$$-\operatorname{sen}\theta\le\operatorname{sen}x\le 1$$

$$-\frac{3}{4}\le\operatorname{sen}x\le 1\quad ....(\text{I})$$

A partir de la desigualdad (I) formamos H(x), de donde se obtiene que

$$-\frac{23}{8}\le 2(\operatorname{sen}x+1)^2-3\le 5$$

$$\therefore\ \operatorname{Ran}H=\left[-\frac{23}{8};5\right]$$

Problema 15

Determine el valor de

$$\gamma=\operatorname{arcsen}\left(\cos\frac{9\pi}{11}\right)+\arccos\left(\operatorname{sen}\frac{12\pi}{11}\right)$$

Resolución

Recordando el teorema

$$\operatorname{arcsen}x = \frac{\pi}{2}-\arccos x \qquad \text{ó}$$

$$\arccos x = \frac{\pi}{2}-\operatorname{arcsen}x$$

Entonces

$$\gamma=\frac{\pi}{2}-\arccos\left(\cos\frac{9\pi}{11}\right)+\frac{\pi}{2}-\operatorname{arcsen}\left(\operatorname{sen}\frac{12\pi}{11}\right)$$

$$\gamma=\pi-\arccos\left(\cos\frac{9\pi}{11}\right)-\operatorname{arcsen}\left(\operatorname{sen}\frac{12\pi}{11}\right)\ ..... (1)$$

Utilizando la propiedad de coseno inverso, página **535**

$$\arccos\left(\cos\frac{9\pi}{11}\right)=\frac{9\pi}{11}$$

puesto que $\frac{9\pi}{11}\in[0;\pi]$ .... (2)

Análogamente de la propiedad de seno inverso (ver página **527**)

$$\arcsen\left(\sen\frac{12\pi}{11}\right)\neq\frac{12\pi}{11}$$

puesto que $\frac{12\pi}{11}\notin\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$

pero $\sen\frac{12\pi}{11}=\sen\left(\pi+\frac{\pi}{11}\right)=-\sen\frac{\pi}{11}$

luego

$$\arcsen\left(\sen\frac{12\pi}{11}\right)=\arcsen\left(-\sen\frac{\pi}{11}\right)=-\frac{\pi}{11}\quad ...(3)$$

Finalmente los resultados de (2) y (3) reemplazamos en (1)

$$\gamma=\pi-\left(\frac{9\pi}{11}\right)-\left(-\frac{\pi}{11}\right)$$

$$\therefore\ \gamma=\frac{3\pi}{11}$$

Problema 16

Simplifique la siguiente sumatoria

$$\sum_{k=1}^{5}\arctan(\tan k)$$

Resolución

Designemos S a dicha sumatoria, la cual expresada por extensión resulta

$$S=\arctan(\tan 1)+\arctan(\tan 2)+\arctan(\tan 3)+\arctan(\tan 4)+\arctan(\tan 5)$$

Aquí conviene utilizar la propiedad de la tangente inversa

$$\arctan(\tan y)=y\ ;\quad -\frac{\pi}{2}<y<\frac{\pi}{2}$$

Analizando para cada caso

$\arctan(\tan 1)=1$; puesto que $1\in\left\langle-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right\rangle$

$\arctan(\tan 2)=\arctan(\tan(2-\pi))=2-\pi$

$\arctan(\tan 3)=\arctan(\tan(3-\pi))=3-\pi$

$\arctan(\tan 4)=\arctan(\tan(4-\pi))=4-\pi$

$\arctan(\tan 5)=\arctan(\tan(5-2\pi))=5-2\pi$

En cada una de estas igualdades se buscó el equivalente con un arco $((2-\pi);(3-\pi);(4-\pi);(5-2\pi))$ los cuales se hallan en el intervalo $\left\langle-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right\rangle$

(Véase la figura 7.117)

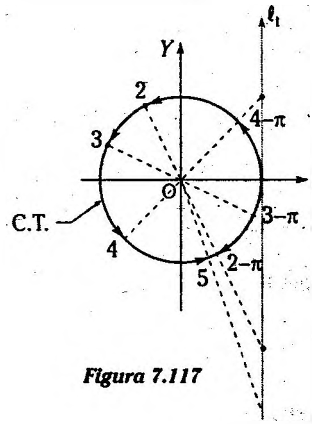


Figura 7.117

Por ejemplo el arco $2\notin\left\langle-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right\rangle$, pero $\tan 2=\tan(2-\pi)$

Luego, sustituyendo valores

$$S=1+(2-\pi)+(3-\pi)+(4-\pi)+(5-2\pi)$$

$$\therefore\ S=15-5\pi$$

Problema 17

Determine el rango de la función

$$f(x)=x\sen(\arcsen x)-2\cos(\arccos x)+1$$

Resolución

Sabemos que

$\sen(\arcsen x)=x;\ x\in[-1;1]\ \wedge\ \cos(\arccos x)=x$
$x\in[-1;1]$

$\Rightarrow\ f(x)=x(x)-2x+1$

$f(x)=(x-1)^2$

Como se sabe el dominio

$-1\leq x\leq 1$

$\Rightarrow\ 0\leq(x-1)^2\leq 4$

También el rango se verifica en la gráfica de f, véase figura 7.118

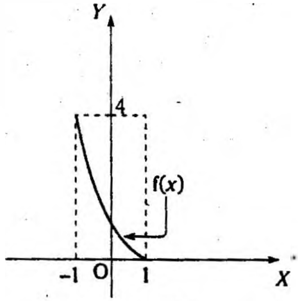


Figura 7.118

$\therefore\ \text{Ran}\,f=[0;4]$

Problema 18

Resuelva $\quad \text{arc sen}x-2\arccos x=\dfrac{\pi}{4}$

Resolución

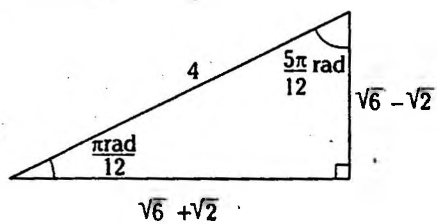


Figura 7.119

Recordamos que

$$\text{arcsen}\,x+\arccos x=\frac{\pi}{2}$$

Reemplazando en la ecuación del problema

$$\Rightarrow\ \text{arcsen}\,x-2\left(\frac{\pi}{2}-\text{arcsen}\,x\right)=\frac{\pi}{4}$$

$$3\,\text{arcsen}\,x=\frac{5\pi}{4}$$

$$\text{arcsen}\,x=\frac{5\pi}{12}$$

$$\Rightarrow\ x=\text{sen}\,\frac{5\pi}{12}\qquad \therefore\ x=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

Problema 19

Resuelva

$$\arccos(x\sqrt{7})+\arccos x=\frac{\pi}{2}$$

Resolución

Utilizando el mismo teorema del problema anterior

$$\arccos(x\sqrt{7})=\frac{\pi}{2}-\arccos x$$

$$\arccos(x\sqrt{7})=\ \text{arcsen}\,x$$

Evaluando cosenos en ambos miembros

$$\cos\left[\arccos(x\sqrt{7})\right]=\cos(\text{arcsen}\,x)$$

Entonces $(x\sqrt{7})=\sqrt{1-x^2}$

Elevando al cuadrado

$$7x^2=1-x^2\ \Rightarrow\ x=\pm\frac{\sqrt{2}}{4}$$

La ecuación original verifica sólo para $x=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$

$$\therefore\ x=\frac{\sqrt{2}}{4}$$

Problema 20

Resuelva

$$\text{arccot}\,x-\text{arccot}\,(x+2)=\frac{\pi}{12}$$

Resolución

Recordamos que

$$\text{arc tan}\,x+\text{arc cot}\,x=\frac{\pi}{2}$$

entonces $\text{arc cot}\,x=\dfrac{\pi}{2}-\text{arc tan}\,x$

Luego sustituyendo en la ecuación original

$$\frac{\pi}{2}-\text{arctan}\,x-\left[\frac{\pi}{2}-\text{arctan}(x+2)\right]=\frac{\pi}{12}$$

Ordenando

$$\text{arc tan}\,(x+2) - \text{arc tan}\,x = \frac{\pi}{12} \quad \text{o}$$

$$\text{arc tan}\,(x+2) + \text{arc tan}(-x) = \frac{\pi}{12}$$

$$\Rightarrow \quad \arctan\left[\frac{(x+2)+(-x)}{1-(x+2)(-x)}\right] = \frac{\pi}{12}$$

$$\Rightarrow \quad \arctan\left[\frac{2}{1+x^2+2x}\right] = \frac{\pi}{12}$$

$$\Rightarrow \arctan\left[\frac{2}{(1+x)^2}\right] = \frac{\pi}{12}$$

$$\Rightarrow \quad \tan\frac{\pi}{12} = \frac{2}{(1+x)^2}$$

$$\Rightarrow \quad 2-\sqrt{3} = \frac{2}{(1+x)^2}$$

Resolviendo obtenemos

$$\therefore\ x = \{-2-\sqrt{3};\ \sqrt{3}\}$$

Problema 21

Determine la abscisa del punto de intersección entre las gráficas de las funciones

$$f(x) = 2\,\text{arc tan}\,x \quad \wedge \quad g(x) = \pi - \text{arcsen}\frac{x}{2}$$

Resolución

Como el enunciado del problema indica que las gráficas de las funciones f y g se intersectan, es decir existen puntos comunes, entonces para dichos puntos se cumple $f(x)=g(x)$, luego el problema se reduce a resolver la ecuación:

$$2\,\text{arc tan}\,x = \pi - \text{arcsen}\frac{x}{2}\ \ldots\ldots\ (1)$$

Sea $\alpha = \text{arc tan}\,x$

$$\Rightarrow \tan\alpha = x \ \wedge\ -\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$$

Cálculo de $\text{sen}2\alpha$. Sabemos que

$$\text{sen}\,2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha}$$

$$\Rightarrow \quad \text{sen}\,2\alpha = \frac{2x}{1+x^2}$$

Sea $\beta = \text{arcsen}\,\dfrac{x}{2}$

$$\Rightarrow \text{sen}\,\beta = \frac{x}{2} \ \wedge\ -\frac{\pi}{2} \le \beta \le \frac{\pi}{2}$$

Sustituyendo y ordenando en (1) obtenemos $2\alpha+\beta=\pi$ y sabemos que para arcos suplementarios se cumple $\text{sen}\,2\alpha = \text{sen}\,\beta$

Sustituyendo el equivalente de cada seno

$$\frac{2x}{1+x^2} = \frac{x}{2}$$

Resolviendo la ecuación obtenemos

$$x = \{-\sqrt{3}\,;0\,;\sqrt{3}\}$$

Pero reemplazando en la ecuación (1), este sólo se verifica para $x=\sqrt{3}$.

Observación

Una forma de determinar el número de soluciones de la ecuación (1) es graficando las funciones f y g, veamos

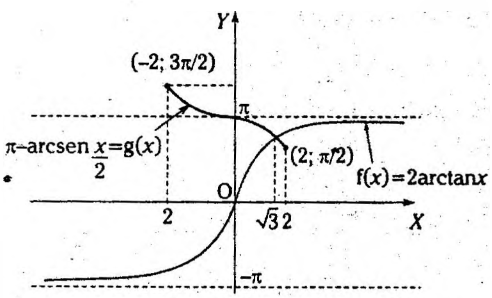


Figura 7.120

Como observamos sólo en un punto se intersectan las gráficas de f y g en $x=\sqrt{3}$

Problema 22

Resuelva la siguiente ecuación

$$\operatorname{arccos}\left(x-\frac{1}{2}\right)+\operatorname{arccos} x+\operatorname{arccos}\left(x+\frac{1}{2}\right)=\frac{3\pi}{2}$$

Resolución

Sean

- $\alpha=\operatorname{arc}\cos\left(x-\frac{1}{2}\right)$

  $\Rightarrow \cos\alpha=x-\frac{1}{2} \wedge 0\leq\alpha\leq\pi$ ...(1)

- $\theta=\operatorname{arc}\cos x$

  $\Rightarrow \cos\theta=x \wedge 0\leq\theta\leq\pi$ ...(2)

- $\beta=\operatorname{arc}\cos\left(x+\frac{1}{2}\right)$

  $\Rightarrow \cos\beta=x+\frac{1}{2} \wedge 0\leq\beta\leq\pi$ ...(3)

Sumando (1) y (3)

$\cos\alpha + \cos\beta = 2x$

$\Rightarrow \cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\theta$

puesto que $x = \cos\theta$

Transformando a producto se tiene

$$\not{2}\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)=\not{2}\cos\theta \ \ldots (4)$$

También tenemos

$$\alpha+\theta+\beta=\frac{3\pi}{2}\Rightarrow\cos\theta=-\operatorname{sen}(\alpha+\beta)$$

Reemplazando en (4)

$$\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)=-\operatorname{sen}(\alpha+\beta)$$

$$\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)=-2\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$$

Tenemos $\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)=0$

$$\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{\pi}{2}\Rightarrow\alpha+\beta=\pi\text{, luego }\theta=\frac{\pi}{2}$$

de donde $x = \cos\theta = 0$

Problema 23

Resuelva

$$\operatorname{arcsen} x+\operatorname{arcsen} 2x = \operatorname{arccos} x$$

Resolución

Una forma de enterarse del número de soluciones que tiene la ecuación es observando los puntos de intersección entre las gráficas de las funciones, así ordenando la ecuación original queda

$$\underbrace{\operatorname{arcsen} x-\operatorname{arccos} x}_{f(x)}=\underbrace{-\operatorname{arcsen} 2x}_{g(x)}$$

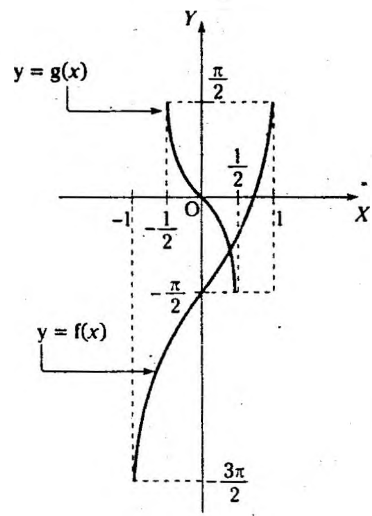


Figura 7.121

Este gráfico indica que la ecuación posee una sola solución, pero no determina dicho valor, en ese sentido procedemos de la siguiente manera:

$$\operatorname{arcsen} x + \operatorname{arcsen} 2x=\frac{\pi}{2}-\operatorname{arcsen} x$$

$$2\operatorname{arcsen} x + \operatorname{arcsen} 2x = \frac{\pi}{2} \ \ldots\ldots (1)$$

Sea $\theta=\operatorname{arcsen} x$

$$\Rightarrow \operatorname{sen}\theta=x\wedge-\frac{\pi}{2}\leq\theta\leq\frac{\pi}{2}$$

En (I)

$$2\theta + \operatorname{arcsen}2x = \frac{\pi}{2}$$

$$\operatorname{arcsen} 2x = \frac{\pi}{2} - 2\theta \Rightarrow \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - 2\theta\right) = 2x$$

$$\Rightarrow \cos 2\theta = 2x \Rightarrow 1 - 2\operatorname{sen}^2\theta = 2x$$

$$\Rightarrow 1 - 2(x)^2 = 2x$$

Ordenando la ecuación cuadrática

$$2x^2 + 2x - 1 = 0$$

de donde $x = \dfrac{\sqrt{3}-1}{2} \vee x = -\left(\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}\right)$

La ecuación sólo admite $x = \dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$

Problema 24

De la ecuación, halle el menor valor de x.

$$\arctan(x) + 2\arctan(2x) = \arctan(7x)$$

Resolución

$$\arctan(2x) + \arctan x = \arctan(7x) - \arctan(2x)$$

Simplificamos cada miembro aplicando el teorema 3 de la página **538**.

$$\arctan\left(\frac{2x + x}{1 - 2x \cdot x}\right) = \arctan\left(\frac{7x - 2x}{1 + 7x . 2x}\right)$$

$$\arctan\left(\frac{3x}{1 - 2x^2}\right) = \arctan\left(\frac{5x}{1 + 14x^2}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{3x}{1 - 2x^2} = \frac{5x}{1 + 14x^2} \Rightarrow x = 0$$

(verifica la ecuación original)

También

$$\frac{3}{1 - 2x^2} = \frac{5}{1 + 14x^2}$$

$$\Rightarrow 52x^2 = 2 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{26} \Rightarrow x = \pm\frac{\sqrt{26}}{26}$$

$\therefore$ El menor valor de x es $-\dfrac{\sqrt{26}}{26}$

Problema 25

Calcule el valor de

$$A = \arctan 4 + \arctan\frac{1}{2} + \arctan\frac{9}{2}$$

Resolución

Expresando como un arco tangente a los dos últimos términos, y aplicando el teorema de la página **538.**

$$A = \arctan 4 + \arctan\left[\frac{\frac{1}{2} + \frac{9}{2}}{1 - \frac{1}{2} \times \frac{9}{2}}\right] + k\pi$$

Para elegir el valor de K, analizamos el producto entre $\frac{1}{2}$ y $\frac{9}{2}$

Así $k = 1$, puesto que $\frac{1}{2} \times \frac{9}{2} > 1$

Entonces

$$A = \arctan(4) + \arctan(-4) + \pi$$

$$\Rightarrow A = \arctan(4) - \arctan(4) + \pi$$

$$\therefore A = \pi$$

Problema 26

Calcule el valor de

$$W = 16\arctan\frac{1}{5} - 4\arctan\frac{1}{239}$$

Resolución

$$W = 4\left(4\arctan\frac{1}{5} - \arctan\frac{1}{239}\right) \ldots\ldots (I)$$

Sea $\theta = \arctan\frac{1}{5} \Rightarrow \tan\theta = \frac{1}{5} \wedge -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$

puesto que $\tan\theta < \tan\frac{\pi}{8}$

$$\Rightarrow 0 < \theta < \frac{\pi}{8}$$

Cálculo del valor de $\tan 2\theta$

$$\tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1 - \tan^2\theta} = \frac{2\left(\frac{1}{5}\right)}{1 - \left(\frac{1}{5}\right)^2} = \frac{5}{12}$$

Cálculo del valor de $\tan 4\theta$

$$\tan 4\theta=\frac{2\tan 2\theta}{1-\tan^2 2\theta}=\frac{2\left(\frac{5}{12}\right)}{1-\left(\frac{5}{12}\right)^2}=\frac{120}{119}$$

Como el arco $4\theta\in\left\langle 0;\ \frac{\pi}{2}\right\rangle \Rightarrow\ 4\theta=\arctan\frac{120}{119}$

Luego en la expresión de la ecuación (I)

$$W=4\left[\arctan\left(\frac{120}{119}\right)+\arctan\left(-\frac{1}{239}\right)\right]$$

$$W=4\left[\arctan\left(\frac{\frac{120}{119}-\frac{1}{239}}{1-\frac{120}{119}\times\frac{-1}{239}}\right)+k\pi\right];$$

pero k=0, puesto que $\frac{120}{119}\wedge\left(-\frac{1}{239}\right)<1$

Efectuando obtenemos

$$W=4(\arctan 1)=4\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\therefore\ W=\pi$$

Observación

Si $x>0\ \wedge\ y>0$

$$\Rightarrow \arctan x-\arctan y=\arctan\left(\frac{x-y}{1+xy}\right)$$

Problema 27

Calcule el valor de

$$y=\arctan 8+\arctan 5+\arctan 2$$

Resolución

Efectuando los dos primeros términos

$$y=\arctan\left(\frac{8+5}{1-8\times 5}\right)+k\pi+\arctan 2$$

El valor de k es 1; puesto que $8\times 5>1$

$$\Rightarrow\ y=\arctan\left(-\frac{1}{3}\right)+\pi+\arctan 2$$

$$\Rightarrow\ y=\pi+\arctan 2+\arctan\left(-\frac{1}{3}\right)$$

$$\Rightarrow\ y=\pi+\arctan\left(\frac{2-\frac{1}{3}}{1+\frac{2}{3}}\right)+n\pi$$

El valor de n es 0; puesto que $2\times\left(-\frac{1}{3}\right)<1$

Luego, $y=\pi+\underbrace{(\arctan 1)}_{\frac{\pi}{4}}$

$$\therefore\ y=\frac{5\pi}{4}$$

Problema 28

Encuentre un equivalente de

$$M=\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots\sqrt{2+\frac{\pi}{2}}}}}}$$

(La expresión contiene n radicales)

Resolución

Haciendo el cambio de variable

$$\frac{\pi}{2}=2\cos\theta\ \ \ldots(\text{I})$$

Reduciendo la expresión M

i) Para un radical

$$M_1=\sqrt{2+\frac{\pi}{2}}=\sqrt{2+2\cos\theta}=\sqrt{2(1+\cos\theta)}$$

$$M_1=\sqrt{2\left(2\cos^2\frac{\theta}{2}\right)}=2\cos\frac{\theta}{2}$$

ii) Para dos radicales

$$M_2=\sqrt{2+\sqrt{2+\pi}}=\sqrt{2+2\cos\theta/2}$$

$$M_2=\sqrt{2(1+\cos\theta/2)}=\sqrt{2(2\cos^2\theta/4)}$$

$$M_2=2\cos\frac{\theta}{2^2}$$

Análogamente para(n–1) radicales se tiene

$$M_{(n-1)}=2\cos\frac{\theta}{2^{n-1}}$$

Entonces la expresión para n radicales será

$$M=\sqrt{2-2\cos\frac{\theta}{2^{n-1}}}=\sqrt{2\left(1-\cos\frac{\theta}{2^{n-1}}\right)}$$

$$M=\sqrt{2\left(2\operatorname{sen}^2\frac{\theta}{2^n}\right)}=2\operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2^n}\right)\quad ....(II)$$

De (I) se obtiene

$$\cos\theta=\frac{\pi}{4}\Rightarrow\theta=\arccos\frac{\pi}{4}$$

Reemplazando en (II)

$$M=2\operatorname{sen}\left(\frac{1}{2^n}\arccos\frac{\pi}{4}\right)$$

Problema 29

Grafique la siguiente función

$$f(x)=\frac{\operatorname{arcsen}x}{|\operatorname{arcsen}|x||}+\frac{|\arccos|x||}{\arccos|x|}+1$$

Resolución

Cálculo del dominio

$\operatorname{arcsen}|x|\neq 0\ \wedge\ \arccos|x|\neq 0$

$\Rightarrow |x|\neq 0\ \wedge\ |x|\neq 1$

$\Rightarrow x\neq 0\ \wedge\ x\neq 1$

$\therefore$ Dom f $\in\langle -1;1\rangle-\{0\}$

Cálculo del rango

i) Sea $0<x<1$

$$f(x)=\frac{\cancel{\operatorname{arcsen}x}}{\cancel{\operatorname{arcsen}x}}+\frac{\cancel{\arccos x}}{\cancel{\arccos x}}+1$$

$f(x)=3$

ii) Sea $-1<x<0$

$$f(x)=\frac{\operatorname{arcsen}x}{|-\operatorname{arcsen}x|}+\frac{|\arccos(-x)|}{\arccos(-x)}+1$$

$$f(x)=\frac{\operatorname{arcsen}x}{-\operatorname{arcsen}x}+\frac{\cancel{\arccos(-x)}}{\cancel{\arccos(-x)}}+1$$

$$f(x)=\cancel{-1}+\cancel{1}+1$$

$f(x)=1$

Luego, redefiniendo la función

$$f(x)=\begin{cases}3;\ 0<x<1\\ 1;\ -1<x<0\end{cases}$$

Si graficamos dicha función obtenemos la figura 7.122

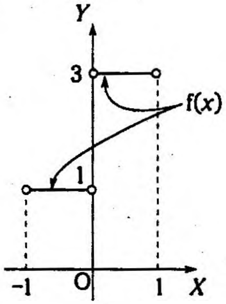


Figura 7.122

Problema 30

Halle el dominio, rango y gráfica de la siguiente función

$$h(x)=\operatorname{arcsen}x^4+\arccos x^4+\arctan x^4+\operatorname{arccot}x^4+\operatorname{arcsec}x^4+\operatorname{arccsc}x^4$$

Indique, si la función es par o impar.

Resolución

i) Cálculo del dominio

De la función arcoseno y arco coseno

$$0\leq x^2\leq 1\Rightarrow -1\leq x\leq 1$$

De la función arcotangente y arco cotangente

$$x\in\mathbb{R}$$

De la función arcosecante y arco cosecante

$$x^4\geq 1\Rightarrow x\leq -1\vee x\geq 1$$

Intersectando los dominios

$\therefore$ Dom h $=\{-1;1\}$

ii) Cálculo del rango de f

$$h(x)=\underbrace{(\operatorname{arcsen}x^4+\arccos x^4)}_{\pi/2}+\underbrace{(\arctan x^4+\operatorname{arccot}x^4)}_{\pi/2}+\underbrace{(\operatorname{arcsec}x^4+\operatorname{arccsc}x^4)}_{\pi/2}$$

$$h(x)=\frac{3\pi}{2}\quad\therefore\quad \operatorname{Ran}h=\left\{\frac{3\pi}{2}\right\}$$

iii) Gráfica de h(*x*)

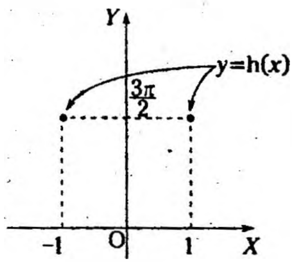


Figura 7.123

Se observa que la función es par

Problema 31

Halle el dominio y el rango de la siguiente función

$$f(x)=\sqrt[4]{\log(\arccos x)}$$

Resolución

Cálculo del dominio de f

- De la función arco coseno

$$-1\le x\le 1 \quad ....(1)$$

- De la función logarítmica

$$0<\arccos x\le\pi$$

$$\Rightarrow\ -1\le x<1 \quad ....(2)$$

- De la raíz cuarta

$$0\le\log(\arccos x)\Rightarrow\ \arccos x\ge 1$$

$$\Rightarrow\ 1\le\arccos x\le\pi$$

$$-1\le x\le\cos 1 \quad ....(3)$$

Intersecando (1), (2) y (3)

$$\operatorname{Dom}f=[-1;\cos 1]$$

Cálculo del Rango de f

Si el dominio es $-1\le x\le\cos 1$ (véase figura 7.124)

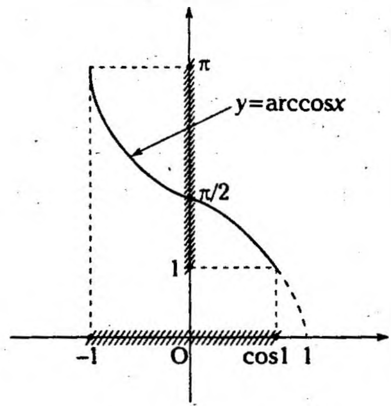


Figura 7.124

$$\Rightarrow\ 1\le\arccos x\le\pi$$

Tomando logaritmos

$$\underbrace{\log 1}_{0}\le\log(\arccos x)\le\log\pi$$

Tomando raíz cuarta

$$0\le\underbrace{\sqrt[4]{\log(\arccos x)}}_{f(x)}\le\sqrt[4]{\log\pi}$$

$$\therefore\ \operatorname{Ran}f=\left[0;\sqrt[4]{\log\pi}\right]$$

Queda para usted verificar que la función $f(x)=\log(\operatorname{arcsen}x)$ tiene como

dominio $\operatorname{Dom}f=\langle 0;1]$

rango $\operatorname{Ran}f=\left\langle -\infty;\log\frac{\pi}{2}\right]$

Para esto siga un procedimiento idéntico al problema resuelto.

Problema 32

Calcule el área de la región definida por el dominio de la siguiente función

$$g(x;y)=\sqrt[4]{\operatorname{arcsen}|x|-|\operatorname{arcsen}(1-|y|)|}$$

Resolución

Hallando el dominio de la función de dos variables g(x;y)

Como $|x|$ y $(1-|y|)$ están afectados del operador trigonométrico inverso podemos plantear

$$0\leq|x|\leq 1 \wedge -1\leq 1-|y|\leq 1$$

$$-1\leq x\leq 1 \wedge -2\leq -|y|\leq 0$$

$$-1\leq x\leq 1 \wedge 0\leq|y|\leq 2x$$

$$\underbrace{-1\leq x\leq 1 \wedge -2\leq y\leq 2}_{(\mathrm{I})}$$

Pero como hay un radical de índice par se tiene que verificar la condición.

$$\operatorname{arcsen}|x|-|\operatorname{arcsen}(1-|y|)|\geq 0$$

$$|\operatorname{arcsen}(1-|y|)|\leq\operatorname{arcsen}|x|$$

$$-\operatorname{arcsen}|x|\leq\operatorname{arcsen}(1-|y|)\leq\operatorname{arcsen}|x|$$

$$-|x|\leq 1-|y|\leq|x|$$

Sea $x>0 \wedge y>0$, y luego lo reflejamos a los ejes

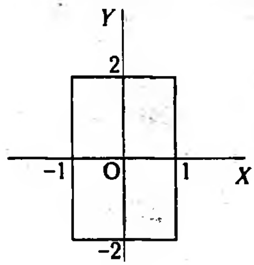
$$-x\leq 1-y\leq x$$

$$-x-1\leq -y\leq x-1$$

$$\underbrace{1-x\leq y\leq 1+x}_{(\mathrm{II})}$$

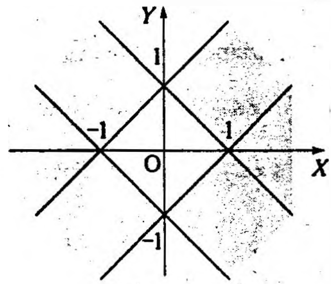
Para obtener el dominio de la función g se tendrá que interceptar las condiciones I y II.

Gráfico de (I)



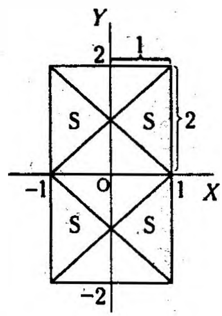
(a)

Gráfico de (II)



(b)

Intersectando ambas regiones se tiene



(c)

Figura 7.125

Las cuatro regiones representan el dominio de g(x,y), nos piden

$$4S=4\left[\frac{1}{\not 2}(\not 2)(1)\right]$$

$$4S=4\left[\frac{1}{\not 2}(\not 2)(1)\right]=4\ u^2$$

∴ El área de la región sombreada es $4\ u^2$.

Problema 33

Grafique las siguientes funciones

I. $f(x)$ = arc sen (sen x)

II. $g(x)$ = arc cos (cos x)

III. $h(x)$ = arc tan (tan$x$)

Resolución

I. $f(x)$ = arcsen(sen$x$), según la regla de la correspondencia, $\forall x \in \mathbb{R}$, $-1 \leq \operatorname{sen} x \leq 1$ entonces establecemos Dom f=R, Ran f = $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$.

Además f es periódica, pues satisface la definición: arcsen[sen(x+T)] = arcsen$x$, para T= 2π. Es decir, analizamos sólo en un intervalo tal como $x \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right]$ para luego extender su gráfico.

Sea $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2} \Rightarrow \operatorname{arcsen}(\operatorname{sen} x) = x \in [-\pi/2\ ;\ \pi/2]$

Sea $\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{3\pi}{2} \Rightarrow \operatorname{arcsen}(\operatorname{sen} x) = \operatorname{arcsen}(\operatorname{sen}(\pi - x)) = (\pi - x) \in [-\pi/2;\pi/2]$

Ordenando $f(x) = \begin{cases} x\ ;\ \text{Si } -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ \pi - x;\ \text{Si } \frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{3\pi}{2} \end{cases}$

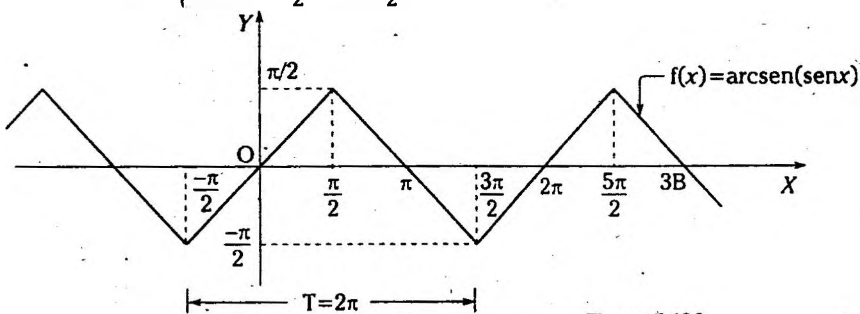


Figura 7.126

II. $g(x)$= arc cos (cos x), análogo del ejercicio anterior

Dom g = R, Ran g= $[0;\pi]$

Periodo de g = 2π

Analizando en el intervalo que $x \in [0;2\pi]$

Sea $0 \leq x \leq \pi \Rightarrow \arccos(\cos x) = x \in [0;\pi]$

$\pi \leq x \leq 2\pi \Rightarrow \arccos(\cos x) = \arccos(\cos(2\pi - x)) = (2\pi - x) \in [0\ ;\pi]$

Ordenando $g(x) = \begin{cases} x\ ;\ 0 \leq x \leq \pi \\ 2\pi - x;\ \pi \leq x \leq 2\pi \end{cases}$

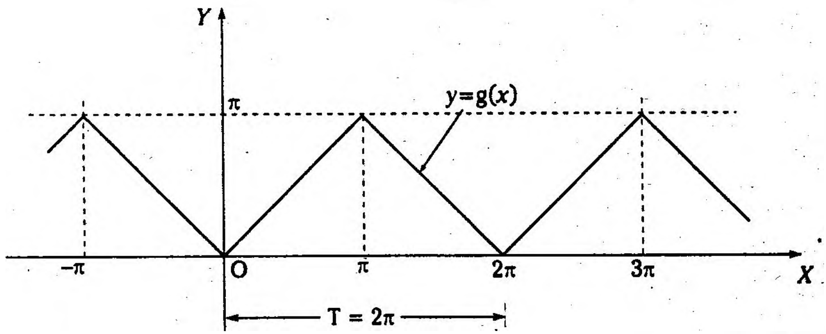


Figura 7.127

III. $h(x) = \arctan(\tan x)$, es evidente que $\forall x \in \mathbb{R} - (2n+1)\frac{\pi}{2}$, $\tan x$ es el conjunto de los números reales.

$$\text{Dom } h = \mathbb{R} - (2n+1)\frac{\pi}{2}, \quad \text{Ran } h = \left\langle -\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right\rangle$$

Además es periódica, puesto que satisface la ecuación

$$\arctan[\tan(x+T)] = \arctan(\tan x), \text{ para } T = \pi$$

Entonces para encontrar la gráfica de h, bastará con graficar la función en $\left\langle -\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right\rangle$

Como $h(x) = \arctan(\tan x)$

Para $x \in \left\langle \frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right\rangle$ se cumple $h(x)=x$

Graficando h se obtiene

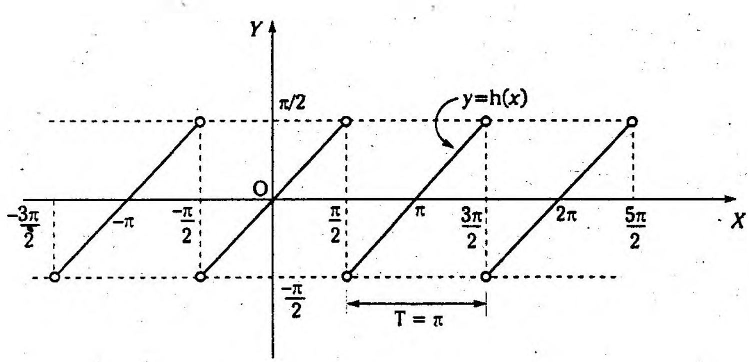


Figura 7.128

Problema 34

Calcule la suma de los **n** primeros términos de la siguiente suma

$$M=\arctan\left(\frac{1}{\cot\theta+2\tan\theta}\right)+\arctan\left(\frac{1}{\cot\theta+6\tan\theta}\right)+\arctan\left(\frac{1}{\cot\theta+12\tan\theta}\right)+\ldots$$

Resolución

Para la simplificación de la expresión M, escribimos sólo en tangentes y buscamos la forma del enésimo término:

$$M=\arctan\left(\frac{\tan\theta}{1+2\tan^2\theta}\right)+\arctan\left(\frac{\tan\theta}{1+6\tan^2\theta}\right)+\arctan\left(\frac{\tan\theta}{1+12\tan^2\theta}\right)+\ldots+\arctan\left(\frac{\tan\theta}{1+n(n+1)\tan^2\theta}\right)$$

$$M=\arctan\left(\frac{2\tan\theta-\tan\theta}{1+2\tan\theta\cdot\tan\theta}\right)+\arctan\left(\frac{3\tan\theta-2\tan\theta}{1+3\tan\theta\cdot 2\tan\theta}\right)+\arctan\left(\frac{4\tan\theta-3\tan\theta}{1+4\tan\theta\cdot 3\tan\theta}\right)+\ldots+\arctan\left(\frac{(n+1)\tan\theta-n\tan\theta}{1+(n+1)\tan\theta\cdot n\,tam\theta}\right)$$

Desarrollando cada uno de los términos como una diferencia de arcos tangentes

$$\arctan\left(\frac{2\tan\theta-\tan\theta}{1+2\tan\theta\times\tan\theta}\right)=\cancel{\arctan(2\tan\theta)}-\arctan(\tan\theta)$$

$$\arctan\left(\frac{3\tan\theta-2\tan\theta}{1+3\tan\theta\times 2\tan\theta}\right)=\cancel{\arctan(3\tan\theta)}-\arctan(2\tan\theta)$$

$$\arctan\left(\frac{4\tan\theta-3\tan\theta}{1+4\tan\theta\times 3\tan\theta}\right)=\cancel{\arctan(4\tan\theta)}-\arctan(3\tan\theta)$$

$$\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots$$

$$\arctan\left(\frac{(n+1)\tan\theta-n\tan\theta}{1+(n+1)\tan\theta\times n\tan\theta}\right)=\arctan[(n+1)\tan\theta]-\cancel{\arctan(n\tan\theta)}$$

Sumando miembro a miembro, obtenemos

$$M=\arctan[(n+1)\tan\theta]-\arctan(\tan\theta)$$

$$M=\arctan\left[\frac{(n+1)\tan\theta-\tan\theta}{1+(n+1)\tan\theta\tan\theta}\right]$$

$$\therefore\ M=\arctan\left[\frac{n\tan\theta}{1+(n+1)\tan^2\theta}\right]$$

Problema 35

Calcule la suma de los n primeros términos en la serie

$$S=\arctan\frac{1}{1+1+1^2}+\arctan\frac{1}{1+2+2^2}+\arctan\frac{1}{1+3+3^2}+\dots$$

Resolución

Es evidente la forma del enésimo término $\arctan\dfrac{1}{1+n+n^2}$

$$S=\arctan\frac{1}{3}+\arctan\frac{1}{7}+\arctan\frac{1}{13}+\dots+\arctan\frac{1}{1+n(n+1)}$$

Pero debe saber que no hay una fórmula para sumar **n** arcos tangentes por lo que buscaremos descomponer cada uno de los sumandos como una diferencia de términos.

Luego, a cada arctan lo expresamos como diferencia, así

$$\arctan\frac{1}{3}=\arctan\frac{2-1}{1+2\times1}=\arctan2-\arctan1$$

$$\arctan\frac{1}{7}=\arctan\frac{3-2}{1+3\times2}=\arctan3-\arctan2$$

$$\arctan\frac{1}{13}=\arctan\frac{4-3}{1+4\times3}=\arctan4-\arctan3$$

$$\arctan\frac{1}{20}=\arctan\frac{5-4}{1+5\times4}=\arctan5-\arctan4$$

$$\vdots$$

$$\arctan\frac{1}{1+n(n+1)}=\arctan\frac{(n+1)-n}{1+(n+1)n}=\arctan(n+1)-\arctan n$$

+

Sumando miembro a miembro

$$S=\arctan(n+1)-\arctan1$$

$$S=\arctan\left[\frac{(n+1)-1}{1+(n+1)\times1}\right]=\arctan\left(\frac{n}{n+2}\right)$$

$$S=\arctan\left(\frac{n}{n+2}\right)$$

Problemas Propuestos

En los problemas del 1 al 6 determine el dominio de las funciones dadas.

1. $y = \cos x \cot x$; $k \in Z$

A) $R - \left\{\frac{k\pi}{2}\right\}$ B) $R - \{k\pi\}$

C) $R - \left\{\frac{k\pi}{4}\right\}$

D) $\frac{k\pi}{3}$ E) $R - \frac{k\pi}{5}$

2. $y = \sqrt{\operatorname{sen} x} + \sqrt{-\cos x}$; $k \in Z$

A) $\left[(4k+1)\frac{\pi}{2}; (2k+1)\pi\right]$

B) $\langle k\pi; (2k+1)\pi\rangle$

C) $R - \frac{k\pi}{3}$

D) $\left\langle 2k\pi + \frac{\pi}{3}; (4k+1)\frac{\pi}{2}\right]$

E) $\left\langle (4k+1)\frac{\pi}{2}; 2k\pi + \frac{2\pi}{3}\right\rangle$

3. $y = \frac{1}{\sec^2 x} + \frac{1}{\csc^2 x}$; $k \in Z$

A) $R - \left\{\frac{k\pi}{3}\right\}$ B) $(4k+1)\frac{\pi}{4}$

C) $R - \left\{\frac{k\pi}{2}\right\}$

D) $R - \left\{\frac{k\pi}{4}\right\}$ E) $R - \{k\pi\}$

4. $y = \sqrt{\csc x - \cot x}$; $k \in Z$

A) $\langle k\pi; (k+1)\pi\rangle$

B) $\left\langle (4k+1)\frac{\pi}{2}; (2k+1)\pi\right\rangle$

C) $\left\langle \frac{k\pi}{4}; (4k+1)\frac{\pi}{2}\right\rangle$

D) $\langle 2k\pi; (2k+1)\pi\rangle$

E) $\left[\frac{k\pi}{3}; (4k+1)\frac{\pi}{2}\right]$

5. $y = 4\csc\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + \sqrt{5}$; $k \in Z$

A) $R - (2k+1)\frac{\pi}{3}$

B) $R - (4k+1)\frac{\pi}{8}$

C) $R - \left\{k\pi + \frac{\pi}{6}\right\}$

D) $R - \left\{\frac{k\pi}{6}\right\}$

E) $R - \left\{\frac{k\pi}{2}\right\}$

6. $y = \tan^2\frac{x}{2} + \sec^2\frac{x}{2}$; $k \in Z$

A) $R - \{k\pi\}$ B) $R - \left\{\frac{k\pi}{2}\right\}$

C) $R - \left\{\frac{k\pi}{4}\right\}$

D) $R - \{2k\pi\}$ E) $R - \{(2k+1)\pi\}$

En los problemas del 7 al 13 determine el rango de las siguientes funciones cuya regla de correspondencia se indican a continuación.

7. $y = \operatorname{sen}x + 2\cos x$

A) $\langle -\sqrt{5};0\rangle$ B) $\left[-\sqrt{5};\sqrt{5}\right]$ C) $\langle 0;\sqrt{5}\,]$

D) $\langle 0;2\rangle$ E) $\langle 2;\sqrt{5}\,]$

8. $y = \cos^2 x + 2\operatorname{sen}x$

A) $[-2;0]$ B) $[0;2]$ C) $[-2;2]$

D) $\left[-1;\frac{1}{4}\right]$ E) $\left\langle -2;\frac{1}{2}\right]$

9. $y = \dfrac{\operatorname{sen}x}{\tan x} + \dfrac{\cos x}{\cot x}$

A) $\langle -\sqrt{2};1\rangle - \{-1\}$

B) $\langle -1;\sqrt{2}\rangle$

C) $\left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right] - \{-1;1\}$

D) $\langle -\sqrt{2};\sqrt{2}\rangle$

E) $\langle -1;\sqrt{2}\,] - \{1\}$

10. $y = \sec^4 x + \tan^4 x$

A) $[1;+\infty\rangle$ B) $\langle 1;+\infty\rangle$ C) $[0;+\infty\rangle$

D) $[1;2\rangle$ E) $\langle 0;1\rangle$

11. $y = \operatorname{sen}^6 x + \cos^6 x$

A) $\left\langle \frac{1}{2};1\right]$ B) $\left\langle \frac{3}{4};1\right]$ C) $\left[\frac{1}{4};1\right]$

D) $\left[\frac{1}{4};\frac{3}{4}\right]$ E) $\left\langle \frac{1}{4};1\right\rangle$

12. $y = \dfrac{\operatorname{sen}x}{\sqrt{1+\cot^2 x}}$

A) $\langle -1;1\rangle$ B) $[-1;0\rangle$ C) $\langle 0;1\rangle$

D) $[-1;1] - \{0\}$ E) $\langle -1;0\rangle$

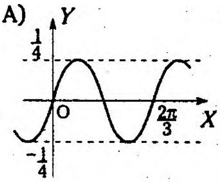
13. $y = \dfrac{\operatorname{sen}x + \cos x - |\operatorname{sen}x - \cos x|}{2}$

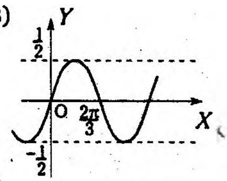
A) $\left[-1;\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$ B) $\left\langle 0;\frac{\sqrt{2}}{3}\right\rangle$ C) $\langle 0;1\rangle$

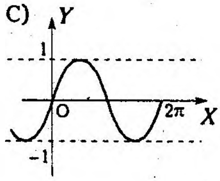
D) $\left\langle 0;\frac{1}{2}\right]$ E) $\langle -1;0]$

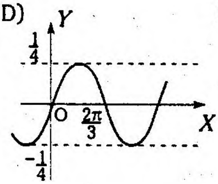
En los problemas del 14 al 19 esboce el gráfico de las siguientes funciones.

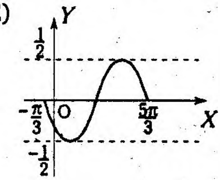
14. $y = \operatorname{sen}x\ \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3} - x\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3} + x\right)$

A)


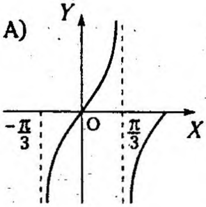
B)


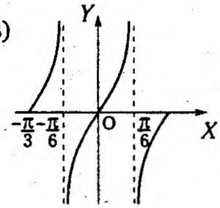
C)


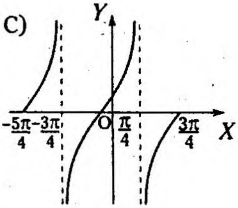
D)


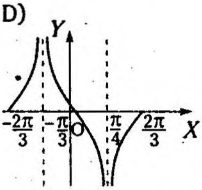
E)


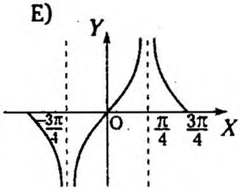
15. $y=\dfrac{\operatorname{sen}x+\cos x}{\cos x-\operatorname{sen}x}$

A) 

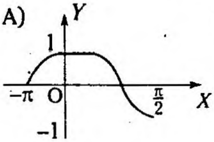
B) 

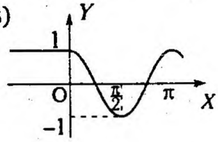
C) 

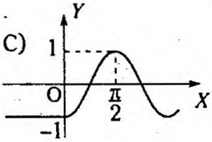
D) 

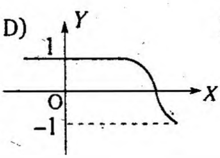
E) 

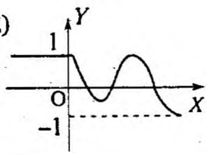
16. $y=\cos(x+|x|)$

A) 

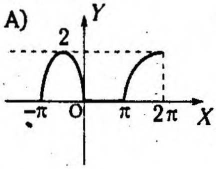
B) 

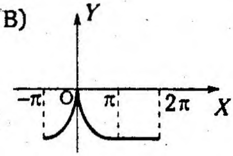
C) 

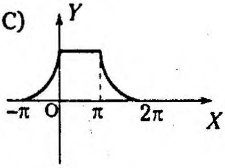
D) 

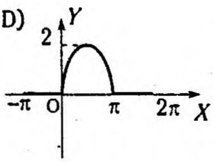
E) 

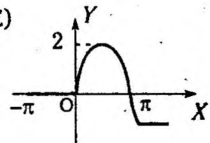
17. $y=\operatorname{sen}x+|\operatorname{sen}x|$

A) 

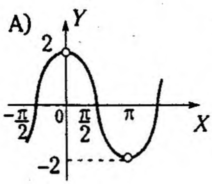
B) 

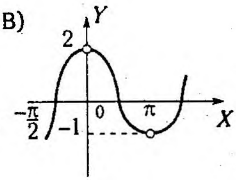
C) 

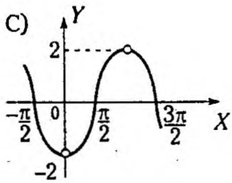
D) 

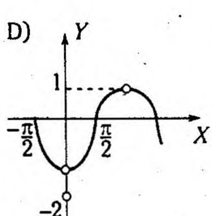
E) 

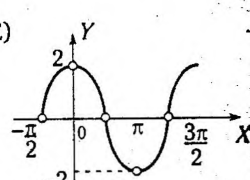
18. $y=\operatorname{sen}2x\csc x$

A) 

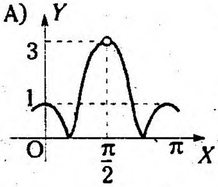
B) 

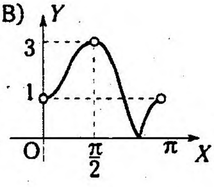
C) 

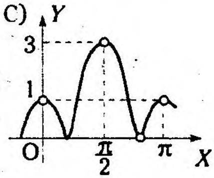
D) 

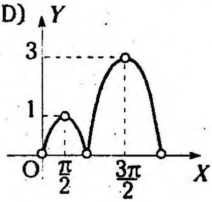
E) 

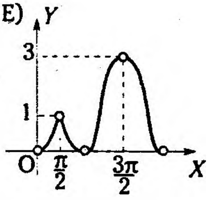
19. $y=\left|\dfrac{\cos 3x}{\cos x}\right|$

A)


B)


C)


D)


E)


En los problemas del 20 al 22 calcule el periodo y amplitud de las funciones dadas.

20. $y=2\cos(-3x)$

A) $\dfrac{2\pi}{3}$; 2 B) $\dfrac{4\pi}{3}$; 2 C) $\dfrac{\pi}{3}$; 2

D) $\dfrac{\pi}{2}$; 2 E) 2π; 2

21. $y=-5\,\text{sen}\left(\dfrac{x}{3}\right)$

A) 3π; 5 B) $\dfrac{5\pi}{3}$; 5 C) 6π; 5

D) $\dfrac{2\pi}{3}$; 5 E) 6π; -5

22. $y=-\pi\,\text{sen}\left(\dfrac{x}{\pi}\right)$

A) $2\pi^2;\pi$ B) $2\pi;\pi$ C) $2;\pi$

D) $\dfrac{\pi^2}{2};2$ E) $\pi^2;\pi$

En los problemas del 23 al 27 identifique si la función es par o impar y si fuera periódica, halle dicho periodo.

23. $y=x\,\text{sen}x$

24. $y=\tan 2x+\text{sen}x$

25. $y=3\,\text{sen}^4\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)$

26. $y=|\text{sen}x|^{|\cos x|}+|\cos x|^{|\text{sen}x|}$

27. $y=(\text{sen}x+\cos x)^2$

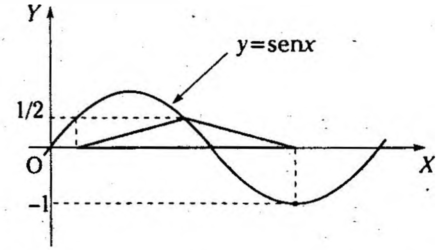
En los problemas del 28 al 30 identifique si la función dada es creciente o decreciente (o ambas) en los intervalos especificados para x

28. $y=\text{sen}x\cos x;\ x\in\left\langle -\dfrac{\pi}{4};\dfrac{\pi}{4}\right\rangle$

29. $y=\text{sen}^2x;\ x\in\left\langle \dfrac{\pi}{2};\ \dfrac{3\pi}{4}\right\rangle$

30. $y=\cot|x|;\ x\in\left\langle -\dfrac{\pi}{4};\dfrac{\pi}{3}\right\rangle-\{0\}$

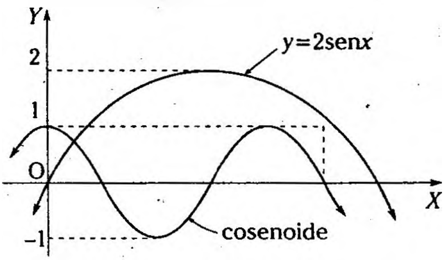
31. Del gráfico adjunto, calcule el área de la región sombreada.



A) $\frac{\pi}{2}u^2$ B) $\frac{\pi}{3}u^2$ C) $\frac{\pi}{4}u^2$

D) $\frac{\pi}{6}u^2$ E) $\frac{\pi}{8}u^2$

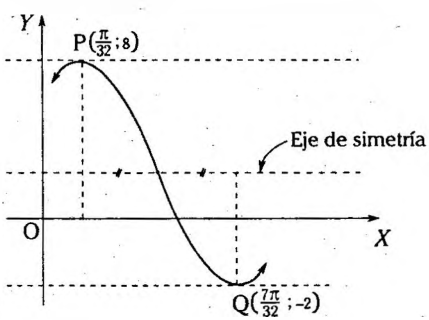
32. De la figura mostrada, determine el periodo de la onda coseno.



A) $\frac{\pi}{2}$ B) $\frac{2\pi}{3}$ C) $\frac{5\pi}{6}$

D) $\frac{3\pi}{4}$ E) $\frac{2\pi}{5}$

33. Halle la regla de correspondencia de la siguiente senoide.



A) $y=5\text{sen}\left(\frac{8x+\pi}{3}\right)+3$

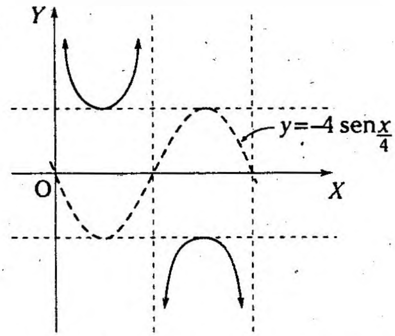
B) $y=5\text{sen}\left(\frac{16x+\pi}{5}\right)+3$

C) $y=5\text{sen}\left(\frac{16x+\pi}{3}\right)+3$

D) $y=5\text{sen}\left(\frac{12x+\pi}{5}\right)+3$

E) $y=5\text{sen}\left(\frac{24x+\pi}{5}\right)+3$

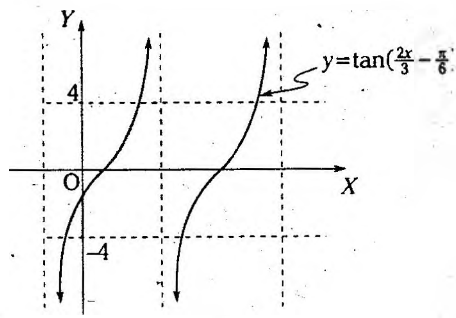
34. Halle la ecuación de la cosecantoide



A) $4\csc\frac{x}{4}$ B) $2\csc\frac{x}{2}$ C) $4\csc x$

D) $\frac{1}{2}\csc\frac{x}{2}$ E) $\frac{1}{4}\csc\frac{x}{4}$

35. Determine el área de la región sombreada



A) $8\pi\ u^2$ B) $9\pi\ u^2$ C) $12\pi\ u^2$

D) $15\pi\ u^2$ E) $16\pi\ u^2$

36. De la función

$$f(x)=\frac{\cos x}{|\cos x|}+\frac{\operatorname{sen}x}{|\operatorname{sen}x|}$$

determine en el siguiente orden: dominio, rango y periodo de f.

A) $\mathbb{R}-k\frac{\pi}{2};(k\in\mathbb{Z}),\{-2;0;2\},T=\pi$

B) $\mathbb{R}-k\pi;(k\in\mathbb{Z}),\{-2;0;2\},T=2\pi$

C) $\mathbb{R}-\frac{k\pi}{2};(k\in\mathbb{Z}),\{-2;0;2\},T=2\pi$

D) $\mathbb{R}-(2k+1)\frac{\pi}{2};(k\in\mathbb{Z}),\{-2;0;2\},T=\frac{3\pi}{2}$

E) $\mathbb{R}-2k\pi;(k\in\mathbb{Z}),\{-2;0;2\},T=2\pi$

37. Calcule los valores de la función h, tal que esté definida por $h(x)=\tan x-2\csc 2x$ sabiendo que

$$-\frac{3\pi}{4}<x\leq-\frac{\pi}{6}$$

A) $\left[-1;\sqrt{3}\right\rangle-\{0\}$

B) $\left\langle-1;\sqrt{3}\right\rangle-\{0\}$

C) $\langle-1;0\rangle$

D) $\left\langle 0;\sqrt{3}\right\rangle$

E) $\left\langle-1;\sqrt{3}\right]-\{0\}$

38. Determine los valores de x para el cual la siguiente función no está definida, siendo

$$f(x)=\frac{\tan 2x\ \operatorname{sen}2x}{\sec 2x-1};\ k\wedge n\in\mathbb{Z}$$

A) $(4n+1)\frac{\pi}{4}$

B) $(4n-1)\frac{\pi}{4}$

C) $\left\{k\pi\cup(4n+1)\frac{\pi}{4}\right\}$

D) $\left\{k\pi\cup(2n+1)\frac{\pi}{4}\right\}$

E) $\frac{k\pi}{4}$

39. Determine el campo de variación de

$$g(x)=\frac{2}{\sec x\csc x+\sqrt{\tan^2x+\cot^2x-2}};\forall x\in\left\langle\frac{3\pi}{4};\pi\right\rangle$$

A) $\mathbb{R}-\langle-1;0\rangle$

B) $\left\langle-1;\frac{1}{2}\right\rangle$

C) $\langle-1;0\rangle$

D) $\langle-\infty;1\rangle$

E) $\langle-\infty;-1\rangle$

40. Acerca de la función f

$$f(x)=\sqrt{2+\sqrt{3}}\cos 2x+\sqrt{2-\sqrt{3}}\operatorname{sen}2x$$

analice la verdad o falsedad de las siguientes proposiciones

i) si $x\in\left\langle\frac{3\pi}{8};\frac{13\pi}{24}\right\rangle$, f es creciente

ii) si $x\in\left\langle\frac{5\pi}{24};\frac{\pi}{3}\right\rangle$, f es decreciente

iii) rango de f es $\left[\sqrt{2-\sqrt{3}};2\right]$

A) VVF B) FVF C) VVV D) FFF E) FFV

41. Sea la función f definida por la siguiente regla de correspondencia

$$f(x)=\frac{2\operatorname{sen}2x}{\sec x}$$, entonces son verdaderas

I) Periodo de f es 2π

II) No está definida en $x=(2n+1)\frac{\pi}{2}$, $(n\in\mathbb{Z})$

III) Es una función impar.

A) solo I y II

B) solo III

C) solo I y III

D) solo II y III

E) I; II y III

42. Calcule la suma de los valores mínimos de las funciones f y g, si

$f(x)=\cos^2x+\cos|x|$ y $g(x)=\text{sen}^2x-\text{sen}|x|$

A) -1 B) $-\frac{1}{2}$ C) $-\frac{1}{4}$
D) $-\frac{1}{3}$ E) $-\frac{1}{6}$

43. Halle el dominio y rango de la función f sabiendo que

$f(x)=\dfrac{\text{sen}(2\cos x)}{\text{sen}(\cos x)}$; $n\in\mathbb{Z}$

A) $\text{Dom}f=\mathbb{R}-(2n+1)\frac{\pi}{2}$;
$\text{Ran}f=[-2;2]$

B) $\text{Dom}f=\mathbb{R}-(2n+1)\frac{\pi}{2}$;
$\text{Ran}f=[2\cos 1;1]$

C) $\text{Dom}f=\mathbb{R}-(4n+1)\frac{\pi}{2}$;
$\text{Ran}\,f=[-2;2]$

D) $\text{Dom}f=\mathbb{R}-(2n+1)\frac{\pi}{2}$;
$\text{Ran}f=\langle 2\cos(-1);2]$

E) $\text{Dom}f=\mathbb{R}-(2n+1)\frac{\pi}{2}$;
$\text{Ran}f=[2\cos 1;2\rangle$

44. Acerca de la función f cuya regla de correspondencia es $f(x)=\dfrac{\text{vers}\,x}{|\text{cov}\,x-1|}$

Analice la verdad o la falsedad de las proposiciones:

i) Si $x\in\langle\pi;2\pi\rangle$; f es creciente.
ii) f es una función par.
iii) Periodo de f es 2π.

A) VVV B) FFV C) FVV
D) FFF E) FVF

45. Determine los valores de crecimiento y decrecimiento pertenecientes al intervalo $[0;\pi\rangle$ de la función

$f(x)=\text{sen}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{4}\right)\left(2\text{sen}\frac{x}{2}+1\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{3x}{4}\right)$

A) $\left\langle 0;\frac{2\pi}{3}\right\rangle$: creciente
$\left\langle \frac{2\pi}{3};\pi\right\rangle$: decreciente

B) $\left\langle 0;\frac{2\pi}{3}\right\rangle$: decreciente
$\left\langle \frac{2\pi}{3};\pi\right\rangle$: creciente

C) $\left\langle 0;\frac{\pi}{3}\right\rangle$: decreciente
$\left\langle \frac{\pi}{3};\pi\right\rangle$: creciente

D) $\left\langle 0;\frac{5\pi}{6}\right\rangle$: decreciente
$\left\langle \frac{5\pi}{6};\pi\right\rangle$: creciente

E) $\left\langle 0;\frac{3\pi}{4}\right\rangle$: decreciente
$\left\langle \frac{3\pi}{4};\pi\right\rangle$: creciente

46. Sea $g(x)=\text{sen}x-\cos x$, analice el valor de verdad de las proposiciones

I. Si $x\in\left[0;\frac{3\pi}{4}\right\rangle$ entonces f es creciente.

II. Si $x=\frac{\pi}{4}+k\pi$; $(k\in\mathbb{Z})$ entonces f es nula.

III. Si $x\in\left[\frac{-3\pi}{4};0\right]$ entonces f es decreciente.

A) VFF B) FVF C) VVF
D) VVV E) FFF

47. De acuerdo a la función definida por la regla siguiente

$$f(x)=\cos^2 x-\cos^2\left(\frac{2\pi}{3}-x\right)+\operatorname{sen}^2\left(\frac{2\pi}{3}+x\right)$$

¿cuáles son verdaderas?

I. La amplitud de f es 2.

II. El periodo de f es π.

III. Si $x\in\left\langle -\frac{\pi}{2};\ 0\right\rangle$ entonces f es creciente.

A) II y III B) I C) I y II
D) II E) III

48. Halle el campo de definición de la siguiente función $f(x)=\dfrac{1}{\sec x+\csc x}$

A) $R-\left\{\frac{k\pi}{2}\right\}$; $(k\in Z)$

B) $R-\left\{\frac{k\pi}{2}\cup k\pi+\frac{\pi}{4}\right\}$; $(k\in Z)$

C) $R-\left\{\frac{k\pi}{2}\cup k\pi-\frac{\pi}{4}\right\}$; $(k\in Z)$

D) $R-\left\{\frac{k\pi}{2}\cup k\pi\pm\frac{\pi}{4}\right\}$; $(k\in Z)$

E) $R-\left\{k\pi\pm\frac{k\pi}{2}\right\}$; $(k\in Z)$

49. Determine el conjunto de todos los valores de x, tal que f no esté definida. $f(x)=\cot(\pi\operatorname{sen}x)$; $(k\in Z)$.

A) $k\pi$ B) $(2k+1)\frac{\pi}{2}$

C) $(4k+1)\frac{\pi}{2}$

D) $(4k-1)\frac{\pi}{2}$ E) $\frac{k\pi}{2}$

50. Halle el rango de la función h definida por

$h(x)=\sec x+\csc x$, tal que $x\in\left\langle \pi;\ \frac{3\pi}{2}\right\rangle$.

A) $\langle-\infty;\ -\sqrt{2}\rangle$

B) $\langle-\infty;\ -\sqrt{2}]$

C) $\langle-\infty;\ -2\sqrt{2}]$

D) $\langle-\infty;\ -\sqrt{2}-1]$

E) $\langle-\infty;\ \sqrt{2}+1]$

51. Sea la función f definida por

$$f(\theta)=\frac{2\operatorname{sen}\theta}{\cos 3\theta+\cos\theta}+\tan\theta;\quad \forall\theta\in\left\langle\frac{\pi}{6};\ \frac{\pi}{2}\right\rangle$$

Halle el campo de variación.

A) $R-\{-1,\ 1\}$

B) $R-\langle 0;\ \sqrt{3}\rangle$

C) $R-Z$

D) $R-\{-1,\ 0,\ 1\}$

E) $R-[0;\sqrt{3}]$

52. Si $f(x)=|\operatorname{sen}x|.\csc x+|\cos x|\sec x$
Halle el dominio y rango de f.

A) Dom f = R y Ran f = $\{-2;0;2\}$

B) Dom f = $R-k\pi$; $(k\in Z)$ y
Ran f = $\{-2;-1;0;1;2\}$

C) Dom f = $R-(2k+1)\frac{\pi}{2}$; $(k\in Z)$ y
Ran f = $\{-2;-1;0;1;2\}$

D) Dom f = $R-\frac{k\pi}{2}$; $(k\in Z)$ y
Ran f=$\{-2;0;2\}$

E) Dom f = $R-\frac{k\pi}{2}$; $(k\in Z)$ y
Ran f = $\{-1;0;1\}$

53. Se dan las funciones f y g si $f(x)=\tan x$ y $g(x)=\cos x$, halle la ordenada del punto de intersección entre las gráficas de ambas funciones, si $\frac{\pi}{2}<x<\pi$

A) $-\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}$ D) $-\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$

B) $2-\sqrt{5}$

C) $-\frac{1}{2}-\sqrt{5}$ E) $\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$

54. De las funciones f, g y h, halle su periodo y calcule la suma de dichos periodos.

I. $f(x) = 40\,\text{sen}\,(28x-\frac{\pi}{20})$

II. $g(x)=2\text{sen}2x(\text{sen}2x-\text{sen}5x)$

III. $h(x)=\text{sen}^6 7x+\cos^6 7x$

A) $\frac{31\pi}{14}$ B) $\frac{15\pi}{7}$ C) $\frac{16\pi}{7}$

D) $\frac{21\pi}{7}$ E) $\frac{20\pi}{7}$

En los problemas del 55 al 60, grafique las funciones empleando adición o multiplicación de funciones.

55. $y = |\text{sen}x|+|\cos x|$

56. $y = x + \cos x$

57. $y=x\cos x$

58. $y=x^2\cos x$

59. $y=\frac{1}{x}\,\text{sen}x$

60. $y=|x|+\text{sen}x$

61. Sea la función definida por
$f(x) = x\csc x - \sec x$

Calcule el rango si

$x\in\left\langle 0;\frac{\pi}{2}\right\rangle$; $k\in\mathbb{Z}$

A) $\langle -\infty;0\rangle$ B) $\mathbb{R}$ C) $\mathbb{R}^+$

D) $\mathbb{R}^-$ E) $\langle 0;+\infty\rangle$

62. Determine el rango de la función

$$f(x)=\left[\frac{(\tan 2x-3\tan 6x)\tan 2x}{\tan^2 2x+2\sec^2 2x-1}\right]^{-1}+\frac{5}{8}\cot 2x$$

A) $\text{Ran}\,f=\left[\frac{\sqrt{3}}{2};+\infty\right\rangle$

B) $\text{Ran}\,f=\left\langle\frac{\sqrt{3}}{2};+\infty\right\rangle$

C) $\text{Ran}\,f=\left[\frac{3}{2};+\infty\right\rangle$

D) $\text{Ran}\,f=\left[\frac{2\sqrt{3}}{2};+\infty\right\rangle$

E) $\text{Ran}\,f=\left\langle\frac{3}{2};+\infty\right\rangle$

63. Halle el área de la región paralelográmica formada por la intersección de f y g siendo

$$f(x)=\frac{\cos x}{1+\text{sen}x}-\frac{1+\text{sen}x}{\cos x}$$

$$g(x)=\frac{\text{sen}x}{1+\cos x}-\frac{1+\cos x}{\text{sen}x}$$

si $x\in\langle 0;2\pi\rangle$

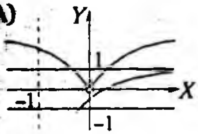
A) $2\pi\,u^2$ B) $3\pi\,u^2$ D) $4\pi\,u^2$

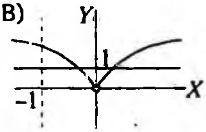
D) $5\pi\,u^2$ E) $6\pi\,u^2$

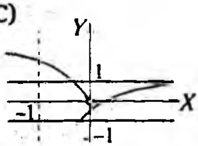
Grafique

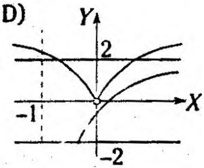
$R=\{(x;y)\in\mathbb{R}^2 / |y|\le[\![|\operatorname{sen}x|+|\cos x|]\!] \wedge$

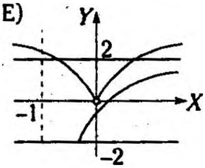
$y\ge(x-1)/(x+3)\wedge y\le\log_{[\![\frac{2x^2+3}{x^2+1}]\!]}(|x+\operatorname{sgn}x|)\}$

A)


B)


C)


D)


E)


65. Sea la función definida por

$$f(x)=\operatorname{sen}\left(\pi[\![x]\!]+\frac{\pi}{12}\right)+\cos\left(\pi[\![x]\!]+\frac{\pi}{12}\right)$$

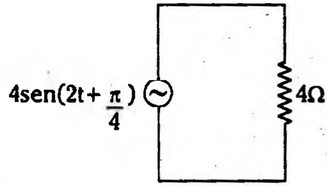
Halle $f_{max}-f_{min}$

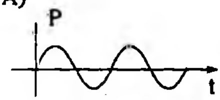
A) $\sqrt{6}$ B) $2\sqrt{6}$ C) $\sqrt{2}$
D) $2\sqrt{2}$ E) 1

66. Si el valor medio del máximo y mínimo valor de la función $f(x)=\operatorname{sen}[\![x]\!]$ tiene la forma pq, siendo p y q números irracionales, determine el menor de ellos cuando $x\in\langle 0;2\pi\rangle$.

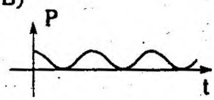
A) sen2,5 B) sen3,5 C) sen4,5
D) cos2,5 E) cos3,5

67. A partir del circuito mostrado, halle el gráfico e indique los valores extremos de la potencia desarrollada por este sistema.

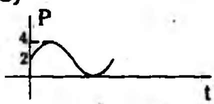


A)


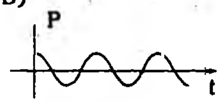
$P_{max}=4$; $P_{min}=-4$

B)


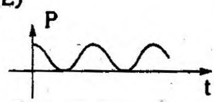
$P_{max}=4$; $P_{min}=0$

C)


$P_{max}=4$; $P_{min}=0$

D)


$P_{max}=2$; $P_{min}=-2$

E)


$P_{max}=4$; $P_{min}=0$

68. Determine la extensión de θ tal que

$\sqrt{\tan^2\theta+|\tan\theta|}>\sqrt{2}\tan\theta$; θ∈ IC o IVC ; k∈ Z

A) $\theta\in\left\langle -\frac{\pi}{4}+2k\pi;\frac{\pi}{4}+2k\pi\right\rangle$; $\theta\ne 2k\pi$

B) $\theta\in\left\langle -\frac{\pi}{4}+k\pi;\frac{\pi}{4}+k\pi\right\rangle$

C) $\theta\in\left\langle -\frac{\pi}{3}+k\pi;\frac{\pi}{3}+k\pi\right\rangle$

D) $\theta\in\left\langle -\frac{\pi}{4}+k\pi;\frac{\pi}{4}+2k\pi\right\rangle$

E) $\theta\in\left\langle -\frac{\pi}{4}+2k\pi;\frac{\pi}{4}+2k\pi\right\rangle$; $\theta\ne 2k\pi$

69. Determine el rango de f definido por

$$f(x)=\tan\left(x+\frac{\pi}{[\![x]\!]}\right)$$

si $0\leq x<\frac{2}{\pi}$

A) $[\tan 1;+\infty\rangle$ B) $[-2;+\infty\rangle$ C) $[-1;1]$

D) $\langle-\infty;+\infty\rangle$ E) $\langle-1;+\infty\rangle$

70. Sea $f(\text{sen}\,\alpha)=\cos 2\alpha-6\,\text{sen}\,\alpha+10$, entonces el rango de f es

A) $[7;13]$ B) $[11;13]$ C) $[6;10]$

D) $[5;10]$ E) $[13;17]$

71. Determine el valor numérico de

$$N=\text{sen}\left(\arctan(-\sqrt{3})+\text{arcsen}\,1\right)$$

A) $\frac{1}{4}$ B) $-\frac{1}{4}$ C) $\frac{1}{2}$

D) $-\frac{1}{2}$ E) 0

72. Calcule

$$M=\tan\left[\frac{\pi}{2}-\arccos\left(-\frac{1}{3}\right)\right]$$

A) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ B) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ C) $\frac{\sqrt{2}}{4}$

D) $-\frac{\sqrt{2}}{4}$ E) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

73. Calcule $M=\text{sen}(\pi+2\arctan 3)$

A) $-\frac{3}{10}$ B) $-\frac{3}{7}$ C) $\frac{3}{5}$

D) $-\frac{3}{5}$ E) $\frac{3}{10}$

74. Determine el valor de

$$P=\text{sen}\left[\arctan\frac{3}{4}+\arccos\left(-\frac{1}{8}\right)\right]$$

A) $\frac{12\sqrt{7}-3}{40}$ B) $\frac{12\sqrt{7}}{39}$ C) $\frac{3\sqrt{7}}{40}$

D) $\frac{\sqrt{7}}{10}$ E) $\frac{12\sqrt{7}+3}{40}$

75. ¿Cuál es el valor de $\arccos\left[\text{sen}\left(-\frac{11\pi}{3}\right)\right]$?

A) $\frac{\pi}{3}$ B) $\frac{\pi}{6}$ C) $-\frac{\pi}{4}$

D) $\frac{\pi}{4}$ E) $-\frac{\pi}{3}$

76. Halle el dominio y rango de la función f, si

$$f(x)=4\arccos\left(\frac{x}{2}+1\right)$$

A) Domf $=[-4;0]$
Ranf $=[0;4\pi]$

B) Domf $=[-2;0]$
Ranf $=[0;\pi]$

C) Domf $=[-2;1]$
Ranf $=[2\pi;4\pi]$

D) Domf $=[-4;0]$
Ranf $=[0;4]$

E) Domf $=[-1;1]$
Ranf $=[0;4]$

77. El campo de existencia y campo de variación de

$$h(x)=\frac{1}{4}\operatorname{arccsc}(x^2-2x)$$

es

A) $\text{Domh}=\langle-\infty;\ -\sqrt{2}+1]\cup[\sqrt{2}+1;\ \infty\rangle$

$\text{Ranh}=\left\langle 0;\ \frac{\pi}{4}\right]\cup\left\{-\frac{\pi}{8}\right\}$

B) $\text{Domh}=\langle-\infty;\ -\sqrt{2}+1]\cup[2\sqrt{2}+1;\ \infty\rangle$

$\text{Ranh}=\left\langle 0;\ \frac{\pi}{8}\right]\cup\left\{-\frac{\pi}{8}\right\}$

C) $\text{Domh}=\langle-\infty;\ -\sqrt{2}+1]\cup[\sqrt{2}+1;\ \infty\rangle$

$\text{Ranh}=\left\langle 0;\ \frac{\pi}{8}\right]\cup\left\{-\frac{\pi}{8}\right\}$

D) $\text{Domh}=\langle-\infty;\ -\sqrt{2}+1]\cup[\sqrt{2}+1;\ \infty\rangle$

$\text{Ranh}=\left\langle 0;\ \frac{\pi}{4}\right]\cup\left\{-\frac{\pi}{8}\right\}$

E) $\text{Domh}=\langle-\infty;\ -1]\cup[1;\ \infty\rangle$

$\text{Ranh}=\left\langle -\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{4}\right]\cup\left\{\frac{\pi}{2}\right\}$

78. Calcule el rango de la función g, si

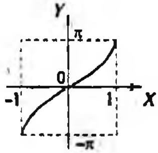
$$g(x)=\left|\frac{2}{3}\operatorname{arcsen}\left(\frac{2x-3}{5}\right)+\frac{\pi}{6}\right|$$

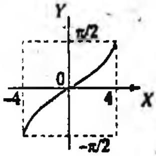
A) $\left[0;\ \frac{\pi}{2}\right\rangle$　　B) $\left\langle 0;\ \frac{\pi}{2}\right\rangle$

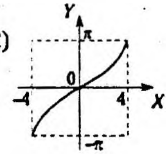
C) $\langle 0;\ \pi\rangle$

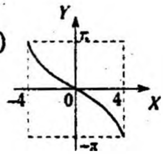
D) $\left[0;\ \frac{\pi}{2}\right]$　　E) $\left[\frac{\pi}{4};\ \frac{\pi}{2}\right]$

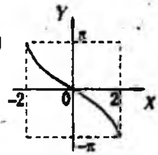
79. Indique el gráfico correspondiente a la función g si $g(x)=\operatorname{arcsen}\left(\frac{x}{4}\right)$

A)


B)


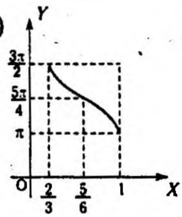
C)


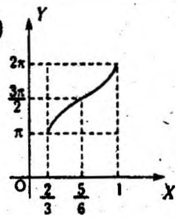
D)


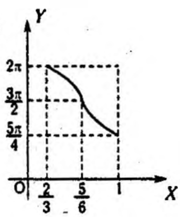
E)


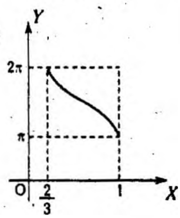
80. Construya el gráfico de

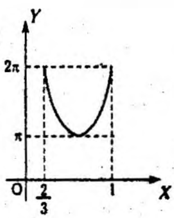
$$f(x)=\arccos(6x-5)+\pi$$

A)


B)


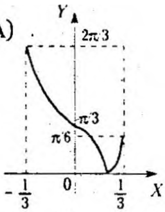
C)


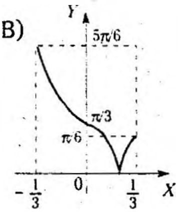
D)


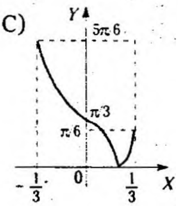
E)


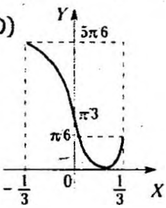
81. Realice el bosquejo de la función h, si

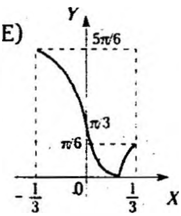
$$h(x)=\left|\operatorname{arcsen}3x-\frac{\pi}{3}\right|$$

•A) 

B) 

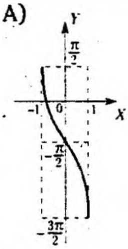
C) 

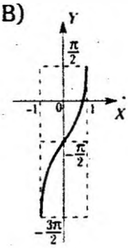
D) 

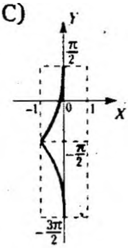
E) 

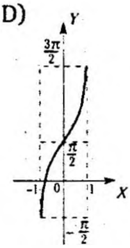
82. Realice la gráfica de la función g, si

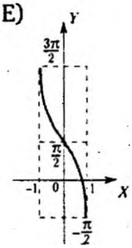
$$g(x)=\operatorname{arcsen}x-\arccos x$$

A) 

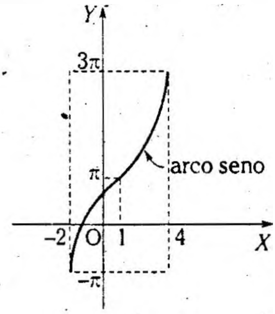
B) 

C) 

D) 

E) 

83. Halle la regla de correspondencia de la curva



A) $f(x)=4\operatorname{arcsen}\left(\frac{2x-1}{3}\right)+\pi$

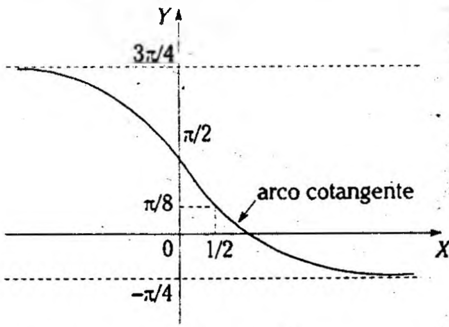
B) $f(x)=2\operatorname{arcsen}\left(\frac{x-1}{3}\right)+2\pi$

C) $f(x)=4\operatorname{arcsen}\left(\frac{x-1}{3}\right)+\frac{\pi}{3}$

D) $f(x)=4\operatorname{arcsen}\left(\frac{x-1}{4}\right)+\pi$

E) $f(x)=4\operatorname{arcsen}\left(\frac{x-1}{3}\right)+\pi$

84. Determine la ecuación de la gráfica



A) $f(x)=\operatorname{arccot}(2\sqrt{2}x+1)+\frac{\pi}{8}$

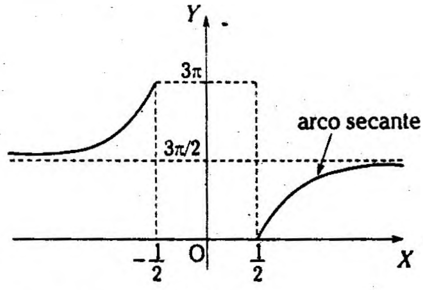
B) $f(x)=\operatorname{arc\,cot}(\sqrt{2}x+1)+\frac{\pi}{4}$

C) $f(x)=\operatorname{arccot}(2\sqrt{2}x+1)+\frac{\pi}{4}$

D) $f(x)=\operatorname{arccot}(2\sqrt{2}x-1)+\frac{\pi}{4}$

E) $f(x)=\operatorname{arccot}(2\sqrt{2}x-1)-\frac{\pi}{4}$

85. ¿Cuál es la regla de correspondencia de la gráfica?



A) $h(x)=\text{arcsec}\left(\frac{x}{2}\right)-\frac{\pi}{6}$

B) $h(x)=2\text{arcsec}\left(\frac{x}{2}\right)$

C) $h(x)=3\text{arcsec}\left(\frac{x}{2}\right)$

D) $h(x)=3\text{arcsec}\, x$

E) $h(x)=3\text{arcsec}\, 2x$

86. ¿Qué dominio y rango tiene la función h si $h(x)=\text{sen}(\text{arcsen}\, x-\text{arccos}\, x)$?

A) $\text{Domf}=[-1;\ 1]$
$\text{Ranf}=[-1;\ 1]$

B) $\text{Domf}=\mathbb{R}$
$\text{Ranf}=[-1;\ 1\rangle$

C) $\text{Domf}=\langle -1;\ 1\rangle$
$\text{Ranf}=\langle -1;\ 1\rangle$

D) $\text{Domf}=[0;\ 1]$
$\text{Ranf}=\left[0;\ \frac{\pi}{4}\right]$

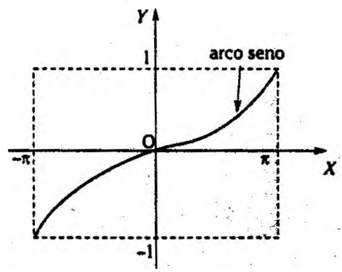
E) $\text{Domf}=\left[-\frac{1}{2};\ \frac{1}{2}\right]$
$\text{Ranf}=\left\langle -\frac{3}{5};\ 1\right]$

87. ¿Cuáles son los valores de la siguiente función $g(x)=x\text{sen}(\text{arcsen}x)-2\cos(\text{arccos}\, x)+1$?

A) $[0;\ 2]$ B) $[0;\ 3\rangle$ C) $\langle 0;\ 4\rangle$

D) $\langle 0;\ 4]$ E) $[0;\ 4]$

88. Halle la regla de correspondencia de la región sombreada.



A) $-1\le y\le \text{arcsen}\left(\frac{x}{\pi}\right)$

B) $-1\le y\le 2\text{arcsen}(\pi x)$

C) $-1\le y\le 2\pi\ \text{arcsen}\left(\frac{x}{\pi}\right)$

D) $-1\le y\le \frac{2}{\pi}\ \text{arcsen}(\pi x)$

E) $-1\le y\le \frac{2}{\pi}\ \text{arcsen}\left(\frac{x}{\pi}\right)$

89. Determine el campo de definición de la función g, si $g(x)=\sqrt{\text{arcsen}|x|-\text{arccos}|x|}$

A) $\left[-1;\ -\frac{\sqrt{2}}{2}\right]\cup\left\langle \frac{\sqrt{2}}{2};\ 1\right\rangle$

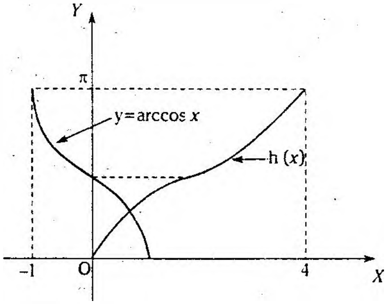
B) $\left\langle -1;\ -\frac{\sqrt{2}}{2}\right\rangle\cup\left\langle \frac{\sqrt{2}}{2};\ 1\right\rangle$

C) $\left[-1;\ -\frac{\sqrt{2}}{2}\right]\cup\left[\frac{\sqrt{2}}{2};\ 1\right]$

D) $[-1;\ 1]$

E) $\langle -1;\ 1\rangle$

90. En la figura, halle la ecuación de la función h, sabiendo que h es un arco seno



A) $\text{arcsen}\left(\frac{x}{2}+1\right)+\frac{\pi}{2}$

B) $\text{arcsen}\left(\frac{x}{2}-1\right)+\pi$

C) $\text{arcsen}\left(\frac{x}{2}-1\right)+\frac{\pi}{2}$

D) $\text{arcsen}(2x+1)+\frac{\pi}{2}$

E) $\text{arcsen}\left(2x+\frac{1}{2}\right)-\frac{\pi}{2}$

91. Calcule el valor de

$$P=\cos\left(2\arctan\frac{1}{\sqrt{5}}\right)+\text{sen}\left(2\arctan\frac{1}{3}\right)$$

A) $\frac{15}{17}$ B) $\frac{17}{12}$ C) $\frac{17}{13}$

D) $\frac{17}{15}$ E) $\frac{19}{15}$

92. Si $0\leq x<\frac{\pi}{4}$, además

$$A=\text{arccot}\left(\frac{\cos x+\text{sen}x}{\cos x-\text{sen}x}\right)$$

$$B=\arctan\left(\frac{1-\text{sen}2x-\cos 2x}{1-\text{sen}2x+\cos 2x}\right)$$

Halle A–B

A) $\frac{\pi}{3}$ B) $\frac{\pi}{6}$ C) $-\frac{\pi}{4}$

D) $\frac{\pi}{4}$ E) $\frac{3\pi}{5}$

93. Determine el valor de

$$N=\frac{\text{arcsen}(\text{sen}5)+\arccos(\cos 6)}{\text{arccot}(\cot 3)-\arctan(\tan 4)+1}$$

A) $-\pi$ B) π^{-1} C) $-\pi^{-1}$

D) $-\pi^2$ E) $\frac{\pi}{2}$

94. Indique cuál es el campo de variación de la función f, si

$$f(x)=2\cos^2x+4\text{sen}x$$

sabiendo que

$$\arctan\left(-\frac{\sqrt{2}}{4}\right)\leq x\leq\pi-\arctan\frac{\sqrt{2}}{4}$$

A) $\left\langle\frac{4}{9};4\right\rangle$ B) $\left[\frac{4}{9};4\right]$ C) $\langle 2;4]$

D) $\left\langle\frac{9}{4};4\right]$ E) $\langle 2;4\rangle$

95. Indique para qué valores de x esta definida la función f, si

$$f(x)=\sqrt{\text{arccot}^2x-5\text{arccot}\,x+4}$$

A) $\langle-\infty;1]\cup[4;+\infty\rangle$

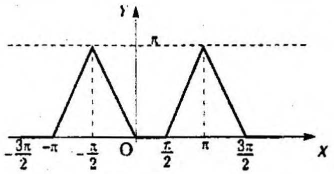
B) $\langle\cot 1;+\infty\rangle$

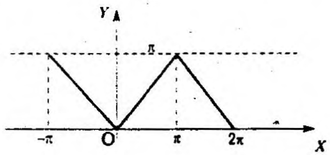
C) $\langle-\infty;-1\rangle\cup[4;+\infty\rangle$

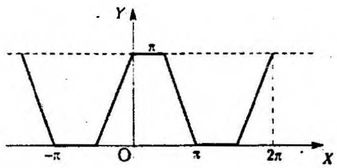
D) $\left\langle\frac{\pi}{4};+\infty\right\rangle$

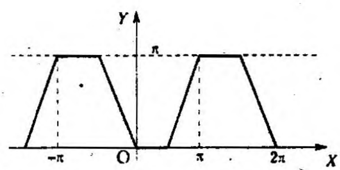
E) $[\cot 1;+\infty\rangle$

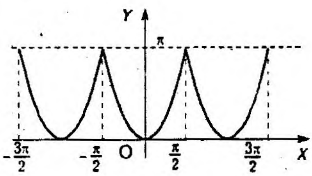
96. Construya el gráfico de la función
$h(x)=\arccos(\cos x)-\operatorname{arcsen}(\operatorname{sen} x)$

A)


B)


C)


D)


E)


97. Calcule el área de la región triangular determinada por la intersección de las gráficas de $f(x)=\operatorname{arcsen} x$, $g(x)=\arccos x$, $x=1$

A) $\dfrac{\pi(2+2\sqrt{2})}{4}u^2$

B) $\dfrac{\pi(2+\sqrt{2})}{8}u^2$

C) $\dfrac{\pi(2-\sqrt{2})}{8}u^2$

D) $\dfrac{\pi(2+3\sqrt{2})}{8}u^2$

E) $\dfrac{\pi(2+3\sqrt{2})}{4}u^2$

98. Calcule el valor de

$$M=\operatorname{sen}\left[3\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{11}}\right)-2\arctan\left(\frac{\sqrt{27}-\sqrt{11}}{4}\right)\right]$$

A) $\frac{1}{2}$ B) 0 C) 1

D) $-\frac{1}{2}$ E) – 1

99. De la igualdad $\cos^{-1}x+\cos^{-1}y+\cos^{-1}z=2\pi$

Calcule el valor de $\dfrac{x^2+y^2+z^2-1}{xyz}$

A) 2 B) –2 C) 3
C) 4 E) –4

100. Indique cuál es el valor de

$$\cot\left[\arctan\frac{2}{11}+2\arctan\frac{1}{7}\right]$$

A) $\frac{3}{2}$ B) 2 C) –2

D) $-\frac{1}{2}$ E) $\frac{1}{2}$

101. Calcule el valor de

$$M=27\cos\left(\operatorname{arcsen}\frac{2}{3}-2\operatorname{arcsen}\frac{1}{3}\right)$$

A) $7\sqrt{5}-8\sqrt{2}$ B) $7\sqrt{5}-4\sqrt{2}$

C) $7\sqrt{5}+4\sqrt{2}$

D) $7\sqrt{5}+8\sqrt{2}$ E) $7\sqrt{5}-2\sqrt{2}$

102. Halle el valor de

$$\gamma=\arccos\frac{3}{\sqrt{10}}+\text{arcsen}\frac{1}{\sqrt{5}}$$

A) $\frac{\pi}{6}$ B) $\frac{\pi}{4}$ C) $\frac{\pi}{3}$

D) $\frac{5\pi}{12}$ E) $\frac{\pi}{2}$

103. Calcule

$$M=\arctan 4+\arctan\frac{1}{2}+\arctan\frac{9}{2}$$

A) $\frac{3\pi}{4}$ B) $\frac{\pi}{2}$ C) π

D) $2\arctan 4$ E) $\pi-\arctan 4$

104. ¿A qué es igual la siguiente expresión?

$$\text{sen}^{-1}(\text{sen}4)+\cos^{-1}(\cos 5)+\tan^{-1}(\tan 9)$$

A) 0 B) π C) 2
D) -1 E) $-\pi$

105. Acerca de la función

$$f(x)=\arccos x-|\text{arcsen}\, x|$$

¿cuáles de las proposiciones siguientes son correctas?

I) $\text{Ranf}=\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$

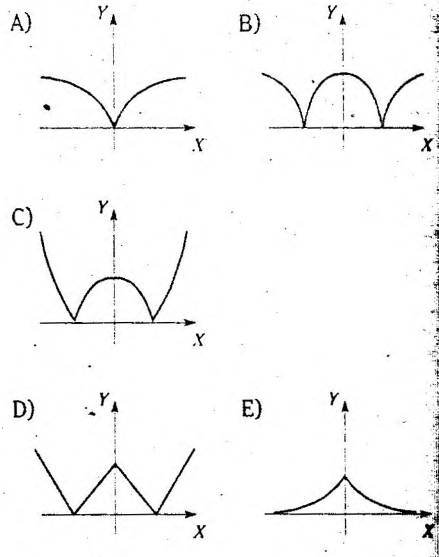
II) f no es creciente

III) f intersecta al eje X en $\frac{\sqrt{2}}{2}$

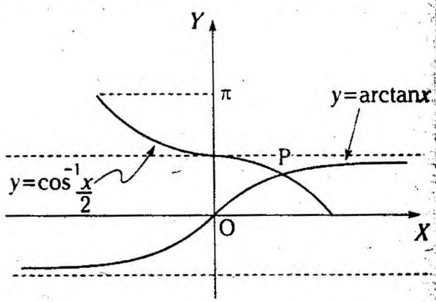
A) Solo I B) I y II C) I y III
D) Solo III E) I, II y III

106. De las siguientes gráficas, ¿cuál corresponde a la función f ?

$$f(x)=\left|\tan\left[\arctan\left(\frac{e^{x}+e^{-x}}{2}\right)\right]-2\right|$$



107. Del gráfico, determine la abscisa del punto



A) $\sqrt{\frac{\sqrt{17}-1}{2}}$ B) $\sqrt{\frac{\sqrt{17}+1}{2}}$ C) $\sqrt{\frac{\sqrt{17}-2}{2}}$

D) $\sqrt{\frac{\sqrt{17}+2}{2}}$ E) $\sqrt{\frac{\sqrt{17}-1}{3}}$

108. Sea la función

$g(x)=\text{arcsen}(\text{sen}|x|)+\cos x$, halle el núme de puntos de intersección de la gráfica de con el eje de abscisas en el intervalo $\langle -2\pi; 2$

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

109. Si $\arctan(x-1)+\text{arcsec}(x+1)=n\pi$; $n\in \mathbb{Z}$ calcule

$$N=\arctan(\cot x)+\text{arccot}\left(\tan\frac{1}{x}\right)$$

A) $\frac{\pi}{2}-\frac{17}{4}$ B) $\frac{\pi}{2}-\frac{1}{4}$ C) $\frac{\pi}{2}-4$

D) $\pi-\frac{1}{4}$ E) $2\pi-\frac{17}{4}$

Resuelva las siguientes ecuaciones (del problema 110 al 113)

110. $\text{arccot}\,x+\text{arc cot}2x=\frac{3\pi}{4}$

A) $\frac{\sqrt{17}-3}{4}$ B) $\frac{\sqrt{17}+3}{4}$ C) $\frac{\sqrt{17}+3}{8}$

D) $\frac{\sqrt{17}-3}{8}$ E) $\frac{\sqrt{17}+9}{4}$

111. $\arctan\left(\frac{x-1}{x-2}\right)+\arctan\left(\frac{x+1}{x+2}\right)=\frac{\pi}{4}$

A) $\pm\sqrt{2}$ B) $\sqrt{2}$ C) $-\sqrt{2}$

D) $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$ E) ± 1

112. $\text{arcsen}\,x-\arccos x=\text{arcsen}\,(3x-2)$

A) $1;\ -\frac{1}{2}$ B) $-1;\ \frac{1}{2}$ C) $1;\ \frac{1}{2}$

D) $-1;\ -\frac{1}{2}$ E) ±1

113. $\arccos\left(\frac{1-a^2}{1+a^2}\right)+\arccos\left(\frac{1-b^2}{1+b^2}\right)=2\arctan x$

A) $\frac{a+b}{1-ab}$ B) $\frac{a-b}{1-ab}$ C) $\frac{a-b}{1+ab}$

D) $\frac{a-b}{a+b}$ E) $\frac{a+b}{a-b}$

114. Halle el área de la región limitada por el eje X y la función f definida por

$$f(x)=\text{arcsen}\left(\sqrt{x}\right)+\arccos\left(\sqrt{1-x}\right)$$

Dato: $\pi=3{,}1416$

A) 1,5700 u^2 B) 1,5708 u^2 C) 1,780 u^2

D) 3,1416 u^2 E) 6,2832 u^2

115. $\text{arcsen}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)-\text{arcsen}\sqrt{1-x}=\frac{\pi}{2}$

A) 1 B) 1/2 C) 1/4

D) 1/3 E) 1/16

116. $\text{arcsen}\left(x-\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi}{6}+\arccos\frac{x}{2}$

A) $\frac{\sqrt{33}+3}{6}$ B) $\frac{\sqrt{33}-3}{6}$ C) $\frac{3-\sqrt{33}}{6}$

D) $\frac{2\sqrt{33}+3}{6}$ E) $\frac{6+\sqrt{33}}{6}$

Resuelva las siguientes inecuaciones (del problema 117 al 119)

117. $\text{arcsen}x\leq\arccos x\leq\arctan x$

A) $[0;\ 1]$ B) $\left[0;\ \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$ C) $\left[0;\ \frac{\sqrt{2}}{2}\right\rangle$

D) $[0;1\rangle$ E) $\left[0;\ \frac{1}{2}\right]$

118. $\arccos(\cos x)>\text{arcsen}(\text{sen}x)$; $x\in\langle 0;\ 2\pi\rangle$

A) $\left\langle 0;\ \frac{\pi}{2}\right\rangle$ B) $\left\langle \pi;\ \frac{3\pi}{2}\right\rangle$ C) $\left\langle \frac{\pi}{2};\ 2\pi\right\rangle$

D) $\left\langle \frac{3\pi}{2};\ 2\pi\right\rangle$ E) $\langle\pi;\ 2\pi\rangle$

119. $\cos x < \dfrac{3}{2\pi}\text{arcsec}(\sec x)$; $n \in \mathbb{Z}$

A) $\left\langle (4n-1)\dfrac{\pi}{2};\ (4n+1)\dfrac{\pi}{2} \right\rangle$

B) $\left\langle (2n-1)\dfrac{\pi}{2};\ (2n+1)\dfrac{\pi}{2} \right\rangle$

C) $\left\langle 2n\pi;\ (4n+1)\dfrac{\pi}{2} \right\rangle$

D) $\left\langle (4n+1)\dfrac{\pi}{2};\ (2n+1)\pi \right\rangle$

E) $\left\langle \dfrac{\pi}{3}+2n\pi; \dfrac{5\pi}{3}+2n\pi \right\rangle - \left\{(2n+1)\dfrac{\pi}{2}\right\}$

120. Si arccos a+arccos b+arccos c= $\dfrac{2\pi}{3}$, calcule los valores de x en la desigualdad arcsen a+arcsen b+ arcsen c $\leq$ 5 arcsen x

A) $\left[\dfrac{1}{2}; 1\right]$ B) $\left[\dfrac{\sqrt{3}}{2}; 1\right]$ C) $\left[\dfrac{1}{2}; \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right]$

D) $\left[\dfrac{1}{2}; \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right]$ E) $\left[\dfrac{\sqrt{2}}{2}; 1\right]$

121. Sea la función h cuya regla de correspondencia es

$$h(x)=\text{sen}^2\left[\arccos\sqrt{\frac{x-1}{2}}\right]$$

Calcule el dominio y rango

A) Dom f=[0;1] ; Ran f=[0;1]

B) Dom f=[1;2] ; Ran f=[0;1/2]

C) Dom f=[0;3] ; Ran f=[0;1]

D) Dom f=[-1;3] ; Ran f=[0; 1/2]

E) Dom f=[1;3] ; Ran f=[0;1]

122. Si $\text{sen}^{-1}x + \text{sen}^{-1}2x+\text{sen}^{-1}3x= \dfrac{\pi}{2}$

calcule $\dfrac{x^3}{7}+\dfrac{x^2}{6}$

A) $\dfrac{5}{84}$ B) $\dfrac{7}{11}$ C) $\dfrac{1}{14}$

D) $\dfrac{1}{84}$ E) $\dfrac{11}{84}$

123. Simplifique Z+W si

$$Z=\text{arccot}\left(\frac{2-\text{sen}\frac{\pi}{7}}{\cos\frac{\pi}{7}}\right)$$

$$W=\text{arccot}\left(\frac{1-2\text{sen}\frac{\pi}{7}}{\cos\frac{\pi}{7}}\sqrt[3]{\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{3\pi}{7}}\right)$$

A) $\dfrac{\pi}{14}$ B) $\dfrac{\pi}{7}$ C) $\dfrac{5\pi}{14}$

D) $\dfrac{9\pi}{14}$ E) $\dfrac{3\pi}{7}$

124. Indique verdadero (V) o falso (F).

i. $\tan^{-1}1+\tan^{-1}2 + \tan^{-1}3= \pi$

ii. $\text{arcsec}x=\text{arccsc}\left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}\right)$

iii. si tan (a) = n $\rightarrow$ a=arctan(n)

A) VVV B) FFF C) VFV

D) VFF F) VVF

125. De las siguientes proposiciones, indique verdadero o falso:

i. Si $\operatorname{arccsc}x_1 > \operatorname{arccsc}x_2 \rightarrow x_1 > x_2$

ii. Si $\arccos x_1 > \arccos x_2 \rightarrow x_1 < x_2$

iii. Si $y = \arctan(\tan 2x) \rightarrow T = \frac{\pi}{2}$

iv. Si $y = \pi + |\operatorname{arcsen} x|$ entonces es una función univalente.

A) VVVF B) FVVF C) FVVV
D) FFVF E) FVFF

126. Reduzca

$$f(n) = \tan^{-1}\left(\frac{1}{1+n}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{1}{1-n}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{2}{n^2}\right)$$

A) $f(n) = \begin{cases} 0; \forall n \in \mathbf{R} - [-1;1] \\ \pi; \forall n \in \langle -1;1 \rangle \end{cases}$

B) $f(n) = \begin{cases} \pi; \forall n \in \mathbf{R} - [-1;1] \\ -\pi; \forall n \in -\langle -1;1 \rangle \end{cases}$

C) $f(n) = 0; \forall n \in \mathbf{R} - \{-1; 0, 1\}$

D) $f(n) = \pi; \forall n \in \mathbf{R} - [-1;1]$

E) $f(n) = \begin{cases} 0; \forall n \in \mathbf{R} - [-1;1] \\ -\pi; \forall n \in \langle -1;1 \rangle \end{cases}$

127. Resuelva $\frac{x^2}{3} = \operatorname{arcsen}\left(\sqrt{\frac{\operatorname{Vers}2x}{2}}\right)$

A) $\frac{\sqrt{9+11\pi}-3}{2}$

B) $\pm\frac{\sqrt{9+11\pi}-3}{2}$; 0

C) $\pm\frac{\sqrt{9+12\pi}-3}{2}$; 1

D) ± 1

E) 0; $\pm\frac{\sqrt{9+12\pi}-3}{2}$

128. ¿Cuál de las siguientes funciones trigonométricas son inyectivas?

i. $f(x) = 2\operatorname{sen}4x;\ x \in \left\langle \frac{\pi}{8}; \frac{3\pi}{8} \right\rangle$

ii. $g(x) = \frac{1}{4}(\cos^4 x - \operatorname{sen}^4 x); x \in \left\langle \frac{\pi}{6}; \frac{2\pi}{3} \right\rangle$

iii. $h(x) = \csc\frac{4x}{3} + \cot\frac{4x}{3}; x \in \left\langle \frac{-3\pi}{4}; \frac{3\pi}{4} \right\rangle$

A) Sólo i B) Sólo ii C) i y ii
D) i y iii E) Sólo iii

129. Siendo $x \in \left\langle -\frac{\pi}{2}; 0 \right\rangle$, reduzca la expresión

$$M = \cos\left(\frac{1}{2}\operatorname{arccsc}\left(2e^x\sqrt{1-e^{2x}} + \frac{(1-2e^{2x})^2}{2e^x\sqrt{1-e^{2x}}}\right)\right)$$

Siendo e base de los logaritmos neperianos

A) e^x B) $-e^{-x}$ C) e^{-x}
D) -1 E) 1

130. Halle x en la siguiente igualdad

$$\tan^{-1}\frac{1}{7} + \tan^{-1}\frac{1}{18} + \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{\sqrt{65}}{65}\right) - \cot^{-1}x = 0$$

A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{1}{2}$ C) 2
D) 3 E) 4

131. En un triángulo ABC cuyos lados son $2[\![\operatorname{arcsen}\theta]\!]$ u y 4 u, el ángulo formado por dichos lados es θ, calcule la variación del área de dicha región triangular.

A) [1; 2sen1]
B) [sen(sen1); 4sen1]
C) $\langle 0; 3\operatorname{sen}1]$
D) [sen(sen1); 4sen1]
E) [4sen(sen1); 4 sen1]

132. Definimos

$f(x; y)=\arccos x - \arccos y$

Para los valores de x e y en el recinto $[-1;1]$

m_1 representa el valor de f(a;b) cuando $a \geq b$

m_2 representa el valor de f(a;b) cuando $a<b$

calcule m_1-2m_2 en términos de a y b.

A) $3\arccos\left(ab+\sqrt{1-a^2}\sqrt{1-b^2}\right)$

B) $-3\arccos\left(ab-\sqrt{1+a^2}\sqrt{1+b^2}\right)$

C) $3\arccos\left(ab+\sqrt{1+a^2}\sqrt{1-b^2}\right)$

D) $6\arccos\left(ab+\sqrt{1-a^2}\sqrt{1-b^2}\right)$

E) $6\arccos\left(ab-\sqrt{1-a^2}\sqrt{1+a^2}\right)$

133. Definimos el polinomio en x (polinomio de Chébichev).

$$T_n(x)=\frac{(x+\sqrt{x^2-1})^n+(x-\sqrt{x^2-1})^n}{2^n}$$

$\forall n \in \mathbb{Z}_0^+$

Halle el equivalente

$$\frac{\cos(2\arccos x)}{T_2(x)}$$

A) 8 B) 2 C) 16

D) 32 E) 1/2

134. Determine el valor de la expresión

$$F=\arctan\sqrt{\frac{a(a+b+c)}{bc}}+\arctan\sqrt{\frac{b(a+b+c)}{ca}}+\arctan\sqrt{\frac{c(a+b+c)}{ab}}$$

A) $\frac{\pi}{3}$ B) $\frac{\pi}{6}$ C) $\frac{\pi}{4}$

D) $\frac{\pi}{2}$ E) π

135. Se define

$f(x)=\cos(\arctan(\text{sen}(\text{arccot}x)))$

Determine el rango de f

A) $\text{Ranf}=\langle 0;1\rangle$

B) $\text{Ranf}=[0;1]$

C) $\text{Ranf}=\left\langle \frac{\pi}{3};1\right]$

D) $\text{Ranf}=\left[\frac{\sqrt{2}}{2};1\right\rangle$

E) $\text{Ranf}=\left[\frac{\sqrt{2}}{4};\frac{1}{2}\right\rangle$

136. Calcule el valor de la expresión

$$\arctan\left(\frac{1}{2}(\cos 2\alpha \,\text{sen}\, 2\beta+\cos 2\beta \sec 2\alpha)\right)-\arctan(\tan^2(\alpha+\beta)\tan^2(\alpha-\beta))$$

A) $\frac{\pi}{3}$ B) $\frac{\pi}{4}$ C) $\frac{\pi}{2}$

D) $\frac{\pi}{8}$ E) $\frac{3\pi}{4}$

137. En un triángulo ABC (recto en A), la hipotenus tiene por longitud **a**, es dividida en **n** parte iguales con n entero impar. La parte centra subtiende un ángulo α en el vértice A, **h** es l perpendicular de A hacia el segmento BC. Determine α en términos de n, a y h.

A) $\arctan\left(\frac{4nh}{an+a}\right)$

B) $\arctan\left(\frac{2nh}{an^2+2a}\right)$

C) $\arctan\left(\frac{4nh}{an^2-a}\right)$

D) $\arctan\left(\frac{2nh}{an^2-1}\right)$

E) $\arctan\left(\frac{4nh}{an^2+a}\right)$

138. Sea la función cuya regla de correspondencia es $f(x)=\arccos\left(\dfrac{1-x^2}{1+x^2}\right)$

¿Cuáles de las siguientes proposiciones son correctas?

I. Es función creciente en $\langle 0;+\infty\rangle$

II. Es función decreciente en $\langle -\infty;0\rangle$

III. Es función constante

IV. $\text{Ranf}=[0\,;\pi\,]$

A) Solo I
B) I y III
C) I y II
D) I y IV
E) Todas son correctas

139. Al resolver la ecuación

$$\text{arcsen}\left(\frac{3x}{5}\right)+\text{arcsen}\left(\frac{4x}{5}\right)=\text{arcsen}\,x$$

indique el número de soluciones

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

140. Simplifique la expresión que contiene n términos.

$$\arctan\frac{1}{2}+\arctan\frac{3}{4}+\arctan\frac{6}{7}+\arctan\frac{10}{11}\ldots$$

A) $\arctan\left(\dfrac{1}{n+1}\right)$

B) $\arctan\left(\dfrac{n}{n+1}\right)$

C) $n\pi-\arctan\left(\dfrac{n}{n+1}\right)$

D) $\dfrac{n\pi}{4}+\arctan\left(\dfrac{n}{n+1}\right)$

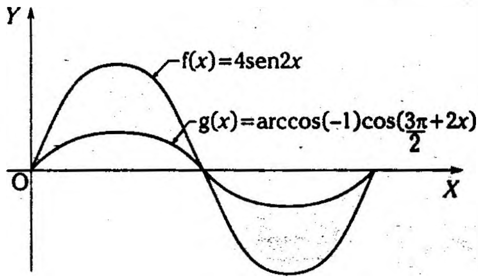
E) $\dfrac{n\pi}{4}-\arctan\left(\dfrac{n}{n+2}\right)$

141. Determine el rango de f definido por

$$f(x)=\text{arcsen}\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right)$$

A) $[-1\,;1]$ B) $\mathbb{R}$ C) $[0\,;1]$
D) $[0\,;1\rangle$ E) $[-1;1\rangle$

142. Halle el área de la región sombreada.



A) 4π B) $4-6\pi$ C) $8-2\pi$
D) $6\pi-4$ E) $8\pi-2$

143. En cuántos puntos se cortan las gráficas de las funciones f y g siendo

$$f(x)=\arccos x+\arccos x^3+\arccos x^5$$

$$g(x)=\arccos(-1)+\text{arcsen}(1)+\frac{3\pi}{2}$$

A) 4 B) 3 C) 2
D) 1 E) 0

144. Dadas la funciones f y g definidas por

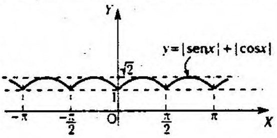
$f(x)=\text{sen}(\text{arcsen}x)\ \wedge\ g(x)=\cos(\arccos x)$

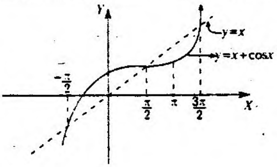
halle los valores de x tal que los valores de f no sean menores a los valores de g.

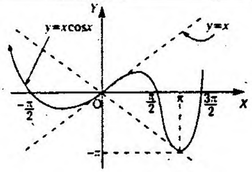
A) $\mathbb{R}$ B) $[-1\,;1]$ C) 1
D) 0 E) -1

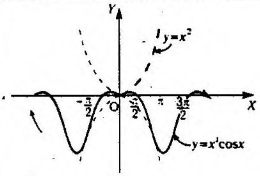
Claves

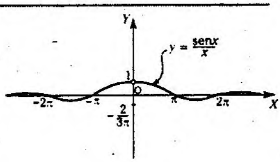
N°	Clave	N°	Clave	N°	Clave	N°	Clave
1	B	14	A	28	Función creciente	42	B
2	A	15	C	29	Función decreciente	43	E
3	C	16	B	30	Creciente para $\langle\pi/4, 0\rangle$ Decreciente en $\langle 0, \pi/3\rangle$	44	C
4	D	17	D	31	B	45	B
5	C	18	A	32	B	46	C
6	E	19	A	33	C	47	A
7	B	20	A	34	C	48	C
8	C	21	C	35	C	49	E
9	C	22	A	36	C	50	C
10	A	23	Par, no ordenado	37	E	51	E
11	C	24	Impar, periodo es 2π	38	D	52	C
12	D	25	Ninguno, periodo es $\pi/2$	39	E	53	A
13	A	26	Par, periodo es $\pi/2$	40	B	54	B
		27	Ninguno, π	41	E		

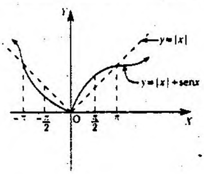
55


56


57


58


59


60


61	A
62	C
63	D
64	C
65	A
66	B
67	B
68	E
69	A
70	E
71	C
72	D
73	D
74	A
75	A
76	A
77	C
78	D
79	B
80	D
81	C
82	B
83	E
84	E
85	E
86	A
87	E
88	E
89	C
90	C

Claves

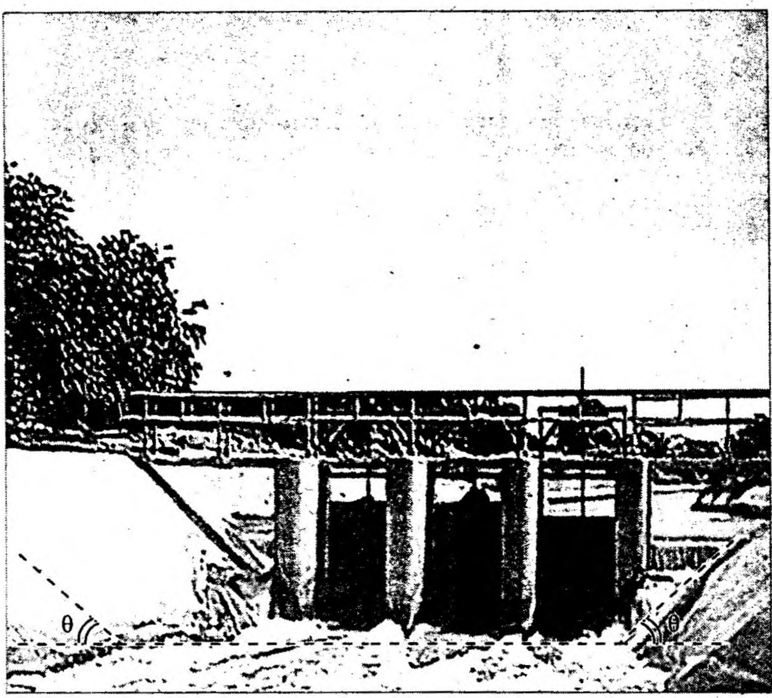
91 E	104 A	118 C	132 C
92 D	105 E	119 E	133 B
93 C	106 C	120 A	134 E
94 B	107 A	121 E	135 D
95 E	108 D	122 D	136 B
96 D	109 E	123 D	137 C
97 C	110 A	124 D	138 C
98 B	111 D	125 B	139 C
99 A	112 C	126 A	140 E
100 B	113 A	127 E	141 D
101 D	114 A	128 D	142 C
102 B	115 A	129 A	143 D
103 C	116 A	130 D	144 B
	117 B	131 E	

Claves

CAPÍTULO

VIII

Ecuaciones trigonométricas



Aprovechamiento hidráulico

Aquí tenemos una presa hidráulica en forma trapezoidal, que sirve para transformar energía hidráulica en eléctrica. Si la parte inferior y los lados del canal mide 8m, siendo θ el ángulo formado entre el lado del canal y el nivel del piso. Y el área de la región transversal del canal es $48\sqrt{3}\ m^2$; se debe resolver $4\operatorname{sen}\theta(1+\cos\theta)=3\sqrt{3}$ para determinar θ.

L E C T U R A

LAS ECUACIONES Y LA EVOLUCIÓN DE UN CAPITAL

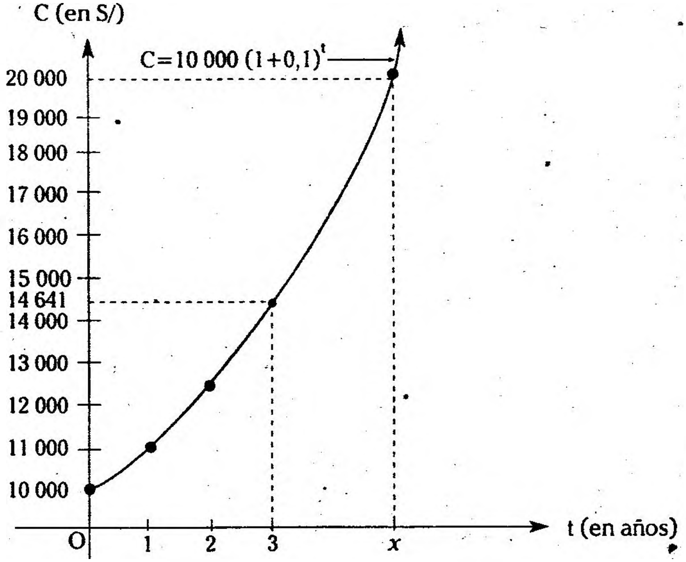
En matemática, al igual que en la vida cotidiana, el primer grado evoca lo que es simple e inmediato. El segundo grado, en cambio, indica que existe en sentido oculto, una solución no evidente que hay que buscar.

¿Es posible clasificar todos los problemas?

Es lo que esperaban los matemáticos cuando lograron asociar claramente curvas y ecuaciones de grado preciso. Sin embargo, cuando examinaban ciertas curvas o ciertos problemas, debieron convenir que no eran ni de primero, ni de segundo ni de ningún grado. Los problemas donde participan los senos y los cosenos son de este tipo, como los problemas de intereses.

Ejemplo:

La cantidad de 10 000 nuevos soles se coloca al 10% anual.
¿Podríamos saber en todo momento cómo evoluciona el capital?
La solución exacta depende de una curva (de una función) que no tiene grado. Es una función cuyo nombre es exponencial.



En la figura, C es el capital obtenido a un tiempo t (en años). Por ejemplo, al cabo de 3 años ($t=3$) se obtiene un capital de $C=14641$ nuevos soles (ver figura). Para que el capital se duplique, se tendría que resolver la ecuación $20\ 000 = 10\ 000\ (1+0,1)^x$. Con el uso de una calculadora se puede determinar que dentro de 7 años con 3 meses se logra que el capital se duplique a 20 000.

Ecuaciones trigonométricas

OBJETIVOS

- Diferenciar las definiciones de una identidad y una ecuación.
- Conocer las diversas formas de resolver una ecuación trigonométrica elemental o cualquier ecuación que pueda ser reducida a dicha forma.
- Relacionar la periodicidad de las funciones triogonométricas y las propiedades de las funciones trigonométricas inversas para determinar las soluciones de una ecuación trigonométrica.
- Interpretar geométricamente las soluciones de una ecuación e inecuación.

INTRODUCCIÓN

La resolución de ecuaciones y de sistemas de ecuaciones, se da con bastante énfasis en todo lugar donde se enseña o desarrolla la matemática.

Esta atención para las ecuaciones no puede considerarse casual, ya que se explica por la importancia que tienen las ecuaciones en las aplicaciones prácticas de la matemática, ingeniería y otras disciplinas. Veamos algunos ejemplos donde se aprecia su gran utilidad:

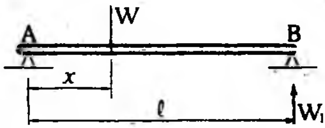


Figura 8.1

Determinación del centro de gravedad de un cuerpo

Se coloca un cuerpo sobre apoyos en A y B, siendo W el peso del cuerpo y si se toma un eje de momentos del extremo A, generalmente la ecuación

$$xW - \ell W_1 = 0\ ;\ \text{de donde:}\ \ x = \frac{\ell W_1}{W}$$

x es la distancia del extremo A al centro de gravedad del cuerpo, y W_1 es la reacción en el extremo B.

Determinación de las oscilaciones de una barra de hierro

Para hallar la frecuencia x de las oscilaciones de una barra de hierro con extremos empotrados, sometidos a un golpe, se debe resolver la ecuación

$$e^x + e^{-x} = \frac{2}{\cos x}\ ;\ \text{donde } e=2{,}7182...$$

En matemática existen diversas formas de resolver ecuaciones. En el presente capítulo se desarrolla en forma esquemática las ecuaciones trigonométricas, a partir de las identidades fundamentales podemos reducir a expresiones como una ecuación de grado uno, y aplicar los conceptos vertidos en Circunferencia Trigonométrica.

También es necesario que el lector recuerde el dominio y rango de las funciones trigonométricas inversas que son válidas para la resolución de ecuaciones.

En reiterados problemas será necesario interpretar las soluciones de una ecuación o inecuación, por ello se sugiere la construcción de gráficos de funciones.

ECUACIÓN TRIGONOMÉTRICA

¿Qué es una ecuación con una incógnita?

Sean **f** y **g** dos funciones, a la igualdad de dos funciones con una misma cantidad variable, es decir **f(*x*)=g(*x*)**, se denomina ecuación con una incógnita. La variable ***x*** que figura en la ecuación se denomina incógnita y los valores de ***x*** que la satisfacen se llaman soluciones de la ecuación.

- A continuación se presentan ejemplos de dos funciones que relacionan a una ecuación:

1. Si $f(x)=2x$, $g(x)=x^2+1$; luego, la ecuación es $2x=x^2+1$
2. Si $f(x)=x^3-3x$, $g(x)=2x^2-1$; luego, la ecuación es $x^3-3x=2x^2-1$
3. Si $f(x)=x^5+\sqrt{2}\,x^4+\sqrt{3}\,x$, $g(x)=2$; luego, la ecuación es $x^5+\sqrt{2}x^4+\sqrt{3}x=2$
4. Si $f(x)=\sqrt{x-1}+x^2$, $g(x)=-2x$; luego, la ecuación es $\sqrt{x-1}+x^2=-2x$
5. Si $f(x)=\cos x$, $g(x)=\tan x$; luego, la ecuación es $\cos x=\tan x$
6. Si $f(x)=2^{x-1}$, $g(x)=8^{x-2}-4^{x-2}$; luego, la ecuación es $2^{x-1}=8^{x-2}-4^{x-2}$.
7. Si $f(x)=x\cos x$, $g(x)=\operatorname{sen}x$; luego, la ecuación es $x\cos x=\operatorname{sen}x$
8. Si $f(x)=\log^2(5x-1)$, $g(x)=\log(12x+1)$; luego, la ecuación es $\log^2(5x-1)=\log(12x+1)$
9. Si $f(x)=x$, $g(x)=\operatorname{sen}x$; luego, la ecuación es $x=\operatorname{sen}x$
10. Si $f(x)=\csc x$, $g(x)=\cot x$; luego, la ecuación es $\csc x=\cot x$

Una ecuación se llama algebraica si cada una de las funciones contenidas en $f(x)$ y $g(x)$ es algebraica (racional o irracional), donde además una de estas funciones puede ser constante. Los ejemplos del 1 al 4 son ecuaciones algebraicas.

Una ecuación se llama trascendente si por lo menos una de las funciones contenidas en f o g no es algebraica. Los ejemplos del 5 al 8 son ecuaciones trascendentes.

Nota

Si una ecuación es válida para cualquier valor admisible de la variable x, entonces la ecuación será una identidad.

¿Qué es una ecuación trigonométrica?

En primer lugar, una ecuación trigonométrica es de tipo trascendente cuando cada una de las funciones contenidas en f(x) y g(x) son funciones constantes o funciones trigonométricas de la forma $FT^n(ax+b)$, donde $a; b \in \mathbb{R}(a \neq 0)$ y $n \in \mathbb{Z}-\{0\}$

Ejemplos

1. $\operatorname{sen}\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=1-\cos\left(4x-\frac{2\pi}{3}\right) \Rightarrow f(x)=\operatorname{sen}2x-\frac{\pi}{3} \wedge g(x)=1-\cos\left(4x-\frac{2\pi}{3}\right)$

2. $\operatorname{sen}^2 x-\cos 2x=1 \Rightarrow f(x)=\operatorname{sen}^2 x-\cos 2x \wedge g(x)=1$

3. $\tan^3\left(\frac{x}{3}+\frac{\pi}{4}\right)=-2 \Rightarrow f(x)=\tan^3\left(\frac{x}{3}+\frac{x}{4}\right) \wedge g(x)=-2$

¿Cómo reconocer una ecuación trigonométrica?

En una ecuación trigonométrica se verifica que los arcos o ángulos de la forma x, ax o $(ax+b)$, se encuentran afectados siempre de algún operador trigonométrico, como sen, cos, tan, etc.

Ejemplos

1.	$\operatorname{sen}x+\cos 2x = 1$	sí es ecuación trigonométrica.
2.	$x^2+\cos x=2$	no es ecuación trigonométrica (porque x^2 no está afectado por ningún operador trigonométrico).
3.	$\tan^2\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+1=\tan x$	sí es ecuación trigonométrica.
4.	$\operatorname{sen}^2 x+\cos^2 x=1$	es identidad, ya que la igualdad se cumple $\forall x \in \mathbb{R}$
5.	$\operatorname{sen}(\cos x)-x = 0$	no es ecuación trigonométrica.

La mayor parte de este capítulo está abocado a resolver ecuaciones trigonométricas. Para esto, partimos de la ecuación trigonométrica elemental.

ECUACIÓN TRIGONOMÉTRICA ELEMENTAL

Es de la forma $\boxed{FT(ax+b)=N}$ donde a, b y N son constantes reales y x es la variable o incógnita; además $a \neq 0$ y N debe tomar valores correspondientes a la FT (por ejemplo, si FT fuese el operador seno, entonces $N \in [-1; 1]$).

A continuación se presentan ejemplos de ecuaciones trigonométricas elementales

$$\operatorname{sen}\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2};\ \cos 3x=0;\ \tan 3x=-\sqrt{3}$$

$$\cot\left(3x+\frac{\pi}{7}\right)=-1;\ \operatorname{sen}\frac{x}{2}=1;\ \sec\left(4x-\frac{\pi}{8}\right)=\frac{4}{3}$$

Antes de plantear reglas generales para resolver una ecuación trigonométrica elemental, resolveremos algunas de estas, sin necesidad de ninguna regla (utilizaremos definiciones en circunferencia trigonométrica).

Ejemplo 1

Resuelva la ecuación $\operatorname{sen} x = \frac{1}{2}$

Resolución

Los valores de x que resuelven la ecuación están dados por $\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$ y sus respectivos coterminales (véase figura 8.2).

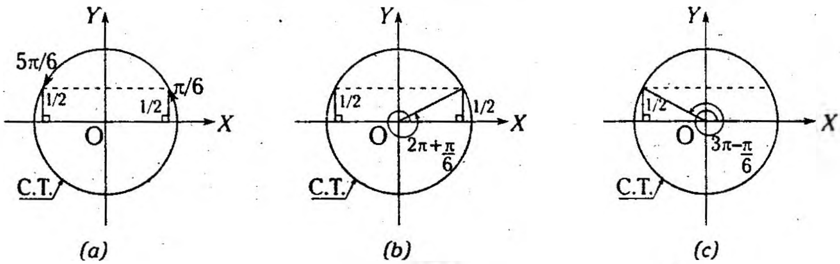


Figura 8.2

es decir $x = \ldots \frac{\pi}{6}; \pi - \frac{\pi}{6}; 2\pi + \frac{\pi}{6}; 3\pi - \frac{\pi}{6}; 4\pi + \frac{\pi}{6}; \ldots$

En general $x = k\pi + (-1)^k \frac{\pi}{6}; \ k \in \mathbb{Z}$.

Observación

Las soluciones de la ecuación $\operatorname{sen} x = \frac{1}{2}$, son las abscisas de los puntos de intersección entre las gráficas de las funciones $f(x) = \operatorname{sen} x$ y $g(x) = \frac{1}{2}$; veamos:

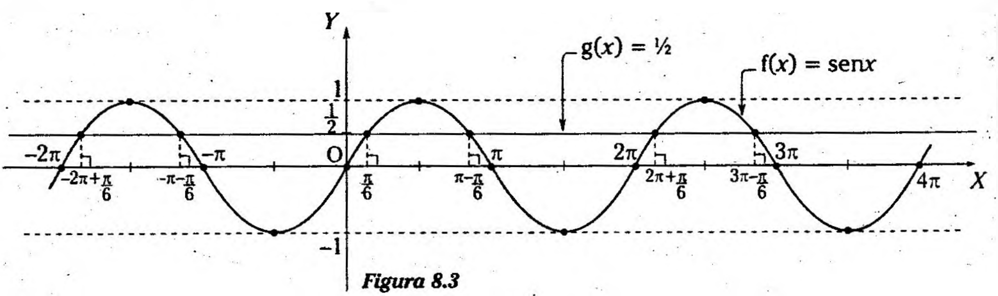


Figura 8.3

Ejemplo 2

Resuelva la ecuación $\cos 2x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Resolución

Teniendo en cuenta la observación anterior, las soluciones de la ecuación $\cos 2x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ serán las abscisas de los puntos de intersección entre las gráficas de las funciones $f(x) = \cos 2x$ y $g(x) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$; (véase figura 8.4).

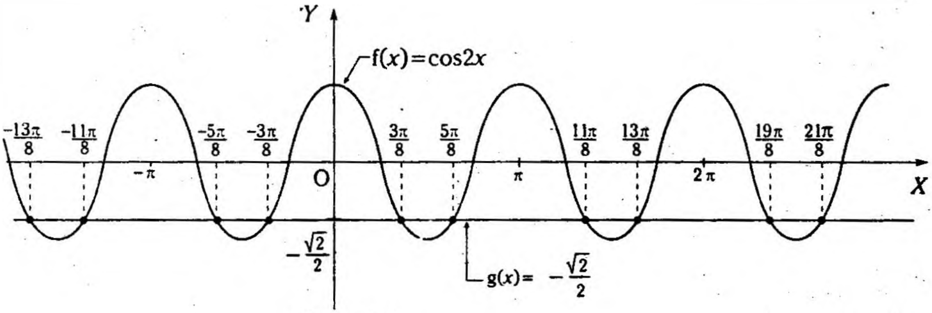


Figura 8.4

Entonces $x = \ldots -\pi \pm \dfrac{3\pi}{8};\ 0\pi \pm \dfrac{3\pi}{8};\ \pi \pm \dfrac{3\pi}{8};\ 2\pi \pm \dfrac{3\pi}{8};\ 3\pi \pm \dfrac{3\pi}{8};\ldots$

En general $x = k\pi \pm \dfrac{3\pi}{8};\ k \in \mathbb{Z}$

Expresiones generales para todos los casos en una ecuación trigonométrica elemental

I. Si $\operatorname{sen}\theta = N$, entonces un valor de θ es arc sen(N), en general el valor θ se puede expresar por:

$$\theta = k\pi + (-1)^k \operatorname{arcsen}(N);\ k \in \mathbb{Z}$$

II. Si $\cos\theta = N$, entonces un valor de θ es arc cos (N), en general el valor de θ se puede expresar por:

$$\theta = 2k\pi \pm \arccos(N);\ k \in \mathbb{Z}$$

III. Si $\tan\theta = N$, entonces un valor de θ es arc tan (N), en general el valor de θ se puede expresar por:

$$\theta = k\pi + \arctan(N);\ k \in \mathbb{Z}$$

Deducción gráfica de la fórmula III, en efecto graficando las funciones

$$y=\tan\theta \quad e \quad y=N$$

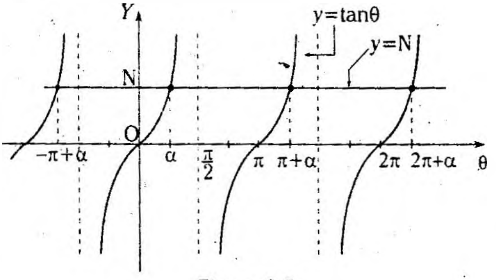


Figura 8.5

De la figura 8.5, si $\tan\theta=N$, entonces las soluciones de la ecuación dada son las abscisas de los puntos de intersección entre las gráficas de $y=\tan\theta$ e $y=N$ (considerando a $N>0$), por lo tanto

$$\theta=-\pi+\alpha;\ 0\pi+\alpha;\ \pi+\alpha;\ 2\pi+\alpha;\ldots$$

$$\Rightarrow \theta=k\pi+\alpha;\ k\in\mathbb{Z}$$

como

$$0<\alpha<\frac{\pi}{2} \wedge \tan\alpha=N \Rightarrow \alpha=\arctan(N)$$

$$\therefore \quad \theta=k\pi+\arctan\alpha$$

Regla para hallar la solución general de una ecuación trigonométrica elemental

Para hallar la solución general de una ecuación trigonométrica de la forma $FT(ax+b)=N$; se realiza lo siguiente: $(ax+b)$, se iguala a una de las expresiones generales de la observación anterior, de donde se despejará la incógnita x, hallando así la solución general.

Ejemplo 3

Resuelva $\operatorname{sen}2x=\frac{1}{2}$

Resolución

De la observación para la forma general del ar en seno.

$$2x=k\pi+(-1)^k\operatorname{arcsen}\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$2x=k\pi+(-1)^k\frac{\pi}{6}\ \ldots\left(\text{se usó } \operatorname{arcsen}\frac{1}{2}=\frac{\pi}{6}\right)$$

Despejando x

$$\therefore\ x=\frac{k\pi}{2}+(-1)^k\frac{\pi}{12}\ ;\ k\in\mathbb{Z}$$

Ejemplo 4

Resuelva $\cos\left(3x-\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

Resolución

Identificamos la forma general del arco en cose

$$3x-\frac{\pi}{6}=2k\pi\pm\arccos\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$3x-\frac{\pi}{6}=2k\pi\pm\left(\pi-\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

se usó $\arccos(-N)=\pi-\arccos N$

$$3x-\frac{\pi}{6}=2k\pi\pm\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)$$

Operando

$$3x-\frac{\pi}{6}=2k\pi\pm\frac{3\pi}{4}$$

$$\Rightarrow\ 3x=2k\pi\pm\frac{3\pi}{4}+\frac{\pi}{6}$$

Despejando x

$$\therefore\ x=\frac{2k\pi}{3}\pm\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{18}\ ;k\in\mathbb{Z}$$

Ejemplo 5

Resuelva $\tan\left(\frac{x}{3}+\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{3}$

Resolución
Identificando la forma general del arco en tangente.

$$\frac{x}{3}+\frac{\pi}{4}=k\pi+\underbrace{\arctan(\sqrt{3})}$$

$$\frac{x}{3}+\frac{\pi}{4}=k\pi+\frac{\pi}{3}$$

$$\left(\text{se usó } \arctan\sqrt{3}=\frac{\pi}{3}\right)$$

Operando

$$\frac{x}{3}=k\pi+\frac{\pi}{12}$$

Despejando x obtendremos

$$\therefore\ x=3k\pi+\frac{\pi}{4},\ k\in\mathbb{Z}$$

¿Cómo resolver una ecuación trigonométrica que no es elemental?

Si una ecuación trigonométrica no es de la forma elemental, aplicaremos las identidades trigonométricas para obtener un mismo tipo de arco y operador trigonométrico (en lo posible); luego se realizan operaciones algebraicas para reducirla y finalmente aplicamos los procedimientos para resolver una ecuación trigonométrica elemental.

No existen reglas generales para transformar una ecuación trigonométrica dada a la forma de una ecuación trigonométrica elemental.

Cuando se haya logrado una solución por medio de una elevación a alguna potencia de los dos lados de la ecuación o por medio de multiplicaciones o divisiones de expresiones que comprenden a la variable, debemos comprobar cada solución potencial por medio de sustituciones dentro de la ecuación. Las soluciones potenciales que no satisfagan la ecuación son rechazadas, estas se denominan **soluciones extrañas.**

Los ejercicios que se dan a continuación muestran algunas clases de soluciones de ecuaciones trigonométricas.

Ejemplo 6
Resuelva la ecuación $\operatorname{sen}x+\cos x=-1$, para $0\le x\le 2\pi$

Resolución
A partir de la ecuación $\operatorname{sen}x+\cos x=-1$

$(\operatorname{sen}x+\cos x)^2=(-1)^2$ ...elevando al cuadrado se obtiene
$1+\operatorname{sen}2x=1$ ... para su mayor comprensión
revise $\operatorname{sen}2x=0$ identidad de arco doble

$$\Rightarrow\ 2x=k\pi+(-1)^k\underbrace{\operatorname{arcsen}(0)}$$

$$2x=k\pi+(-1)^k\,0\ \ldots \text{ ya que arc sen(0)=0}$$

Despejando x se obtiene

$$x=\frac{k\pi}{2}\ ;\ k\in\mathbb{Z}$$

como

$$0\le x\le 2\pi,$$

tenemos

$$x=0;\ \frac{\pi}{2};\ \pi;\ \frac{3\pi}{2};\ 2\pi \quad \ldots \text{posibles soluciones}$$

A continuación, dichas soluciones tendrán que ser comprobadas en la ecuación original ($\operatorname{sen}x+\cos x=-1$)

$\operatorname{sen}0+\cos 0=1\neq-1$ ...$x=0$, solución extraña (no verifica)

$\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}+\cos\frac{\pi}{2}=1\neq-1$ ..$x=\frac{\pi}{2}$, solución extraña (no verifica)

$\operatorname{sen}\pi+\cos\pi=-1$ ... $x=\pi$, es solución (si verifica)

$\operatorname{sen}\frac{3\pi}{2}+\cos\frac{3\pi}{2}=-1$ ... $x=\frac{3\pi}{2}$, es solución (si verifica)

$\operatorname{sen}2\pi+\cos 2\pi=1\neq-1$ $x=2\pi$ solución extraña (no verifica)

Por lo tanto, el conjunto solución de la ecuación $\operatorname{sen}x+\cos x=-1$; tal que $0\leq x\leq 2\pi$, es $\left\{\pi;\frac{3\pi}{2}\right\}$

Observación

Ecuaciones trigonométricas usuales con sus respectivas soluciones generales $(k\in\mathbb{Z})$

I. $\operatorname{sen}\theta=0\Rightarrow\theta=k\pi$

II. $\operatorname{sen}\theta=1\Rightarrow\theta=2k\pi+\frac{\pi}{2}$

III. $\operatorname{sen}\theta=-1\Rightarrow\theta=2k\pi+\frac{3\pi}{2}\ \vee\ \theta=2k\pi-\frac{\pi}{2}$

IV. $\cos\theta=0\Rightarrow\theta=(2k+1)\frac{\pi}{2}$

V. $\cos\theta=1\Rightarrow\theta=2k\pi$

VI. $\cos\theta=-1\Rightarrow\theta=2k\pi+\pi$

Ejemplo 7
Resuelva la ecuación $\operatorname{sen}2x=\cos x$

Resolución
A partir de la ecuación $\operatorname{sen}2x=\cos x$, se obtiene

$2\operatorname{sen}x\cos x=\cos x$ ... utilizando $\operatorname{sen}2x=2\operatorname{sen}x\cos x$

$\Rightarrow 2\operatorname{sen}x\cos x-\cos x=0$

$\Rightarrow \cos x(2\operatorname{sen}x-1)=0$ ... descomponiendo en factores

$\Rightarrow \cos x=0\ \vee 2\operatorname{sen}x-1=0$

$\Rightarrow x=(2k+1)\frac{\pi}{2};\ k\in\mathbb{Z}\ \vee\ \operatorname{sen}x=\frac{1}{2}$

$\Rightarrow x=(2k+1)\frac{\pi}{2}\ \vee\Rightarrow\ x=k\pi+(-1)^k\frac{\pi}{6}$ ... (del ejemplo 1)

Por lo tanto, el conjunto solución de $\operatorname{sen}2x=\cos x$, es $\left\{(2k+1)\frac{\pi}{2}\cup k\pi+(-1)^k\frac{\pi}{6}/k\in\mathbb{Z}\right\}$

Ejemplo 8

Resuelva la ecuación $\sec^2\frac{x}{3}=2\tan\frac{x}{3}$

Resolución
Expresando a senos y cosenos

$$\frac{1}{\cos^2\frac{x}{3}}=\frac{2\operatorname{sen}\frac{x}{3}}{\cos\frac{x}{3}}$$

de lo anterior se observa que $\cos\frac{x}{3}\neq 0$, entonces

$$\frac{x}{3}\neq(2k+1)\frac{\pi}{2};\ k\in\mathbf{Z}.$$

Ahora, si podemos cancelar $\cos\frac{x}{3}$ en el denominador , obtenemos

$$\frac{1}{\cos\frac{x}{3}}=2\operatorname{sen}\frac{x}{3}\Rightarrow 1=2\operatorname{sen}\frac{x}{3}\cos\frac{x}{3}$$

$$\Rightarrow \operatorname{sen}\frac{2x}{3}=1$$

$$\Rightarrow \frac{2x}{3}=2k\pi+\frac{\pi}{2}$$

$$\therefore\ x=3k\pi+\frac{3\pi}{4};\ k\in\mathbf{Z}$$

Dado que $\forall x=3k\pi+\frac{3\pi}{4}/k\in\mathbf{Z}$, se cumple que

$$\cos\frac{x}{3}\neq 0$$

podemos concluir que el conjunto solución es

$$\left\{3k\pi+\frac{3\pi}{4}\right\}.$$

Otro método para resolver $\sec^2\frac{x}{3}=2\tan\frac{x}{3}$

$$\Rightarrow 1+\tan^2\frac{x}{3}=2\tan\frac{x}{3}$$

(empleando la identidad $\sec^2\theta=1+\tan^2\theta$)

Pasando todo al primer miembro

$$\underline{\tan^2\frac{x}{3}-2\tan\frac{x}{3}+1=0}$$

$$\Rightarrow \left(\tan\frac{x}{3}-1\right)^2=0\Rightarrow \tan\frac{x}{3}-1=0$$

$$\Rightarrow \tan\frac{x}{3}=1$$

$$\Rightarrow \frac{x}{3}=k\pi+\arctan(1);\ \ k\in\mathbf{Z};\ \arctan 1=\frac{\pi}{4}$$

$$\therefore\ x=3k\pi+\frac{3\pi}{4};\ k\in\mathbf{Z}$$

Ejemplo 9
Halle el conjunto solución que verifica la siguiente ecuación trigonométrica sen$7x$=cos$4x$.

Resolución
Cuando se tiene la igualdad entre el operador seno y coseno, se cumple

i) $7x+4x=(4k+1)\frac{\pi}{2};\ k\in\mathbf{Z}$

$$\Rightarrow x=(4k+1)\frac{\pi}{22}\quad ...(1)$$

ii) $7x-4x=(4n+1)\frac{\pi}{2};\ n\in\mathbf{Z}$

$$\Rightarrow x=(4n+1)\frac{\pi}{6}\quad ...(2)$$

De (1) y (2), el conjunto solución será

$$\therefore\ x=\left\{(4k+1)\frac{\pi}{22};(4n+1)\frac{\pi}{6}\right\};\ n;\ k\in\mathbf{Z}$$

Para entender un poco más al respecto revise la página **368**.

Ejemplo 10
Halle las soluciones de la siguiente ecuación $\operatorname{sen}^2x+\cos x-1=0$; que verifiquen $0\leq x\leq 2\pi$

Resolución

$$1-\cos^2 x+\cos x-1=0 \quad \text{...(por la identidad } \operatorname{sen}^2 x=1-\cos^2 x)$$

$$\Rightarrow \cos x-\cos^2 x=0$$

$$\Rightarrow \cos x(\cos x-1)=0$$

$$\Rightarrow \cos x=0 \quad \text{ó} \quad \cos x=1$$

Como $0\leq x\leq 2\pi$, tenemos $\cos x=0 \Rightarrow x=\pi/2\ ;\ 3\pi/2$ y de $\cos x=1 \Rightarrow x=0;\ 2\pi$

Por lo tanto, el conjunto solución de $\operatorname{sen}^2 x+\cos x-1=0$ tal que $0\leq x\leq 2\pi$, es $\left\{0;\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2};2\pi\right\}$

Ejemplo 11

Resuelva la ecuación $2\operatorname{sen}x+\cot x=\csc x$

Resolución

$$2\operatorname{sen}x+\frac{\cos x}{\operatorname{sen}x}=\frac{1}{\operatorname{sen}x} \quad \text{...}\left(\text{ por las identidades } \cot x=\frac{\cos x}{\operatorname{sen}x} \text{ y } \csc x=\frac{1}{\operatorname{sen}x}\right)$$

De lo anterior, se observa que $\operatorname{sen}x\neq 0$, entonces $x\neq k\pi / k\in\mathbb{Z}$

multiplicando por sen$x$ a los dos miembros de la ecuación obtenemos $2\operatorname{sen}^2 x+\cos x=1$

$$2(1-\cos^2 x)+\cos x=1 \quad \text{...(usando } \operatorname{sen}^2 x=1-\cos^2 x)$$

$$\Rightarrow 2\cos^2 x-\cos x-1=0$$

$$\Rightarrow (2\cos x+1)(\cos x-1)=0$$

Igualando cada factor a cero

$$\cos x=-\frac{1}{2}\Rightarrow x=2k\pi\pm\frac{2\pi}{3} \wedge \operatorname{sen}x=\pm\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{...(cumple con la condición } \operatorname{sen}x\neq 0)$$

o $\cos x=1 \Rightarrow x=2k\pi \wedge \operatorname{sen}x=0$ ...(lo cual no es solución, dado que de la restri[c]ción inicial se obtuvo $\operatorname{sen}x\neq 0$)

Por lo tanto, el conjunto solución de la ecuación $2\operatorname{sen}x+\cot x=\csc x$ es $\left\{2k\pi\pm\frac{2\pi}{3} / k\in\mathbb{Z}\right\}$

Observación

Para resolver ecuaciones trigonométricas de la forma $a\operatorname{sen}x+b\cos x=c$ se debe tener en cuenta

$a\operatorname{sen}x+b\cos x=\sqrt{a^2+b^2}\operatorname{sen}(x+\theta)$; donde $\tan\theta=\frac{b}{a}$

Ejemplo 12

Resuelva $\operatorname{sen}x+\cos x=1$

Resolución

multiplicando por $\frac{1}{\sqrt{2}}$ los dos miembros, obtenemos

$$\operatorname{sen}x\frac{1}{\sqrt{2}}+\cos x\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$ se ha sustituido $\frac{1}{\sqrt{2}}$ por $\cos\frac{\pi}{4}$ y $\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}$ convenientemente.

$$\Rightarrow \operatorname{sen}x\cos\frac{\pi}{4}+\cos x\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow \operatorname{sen}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow x+\frac{\pi}{4}=k\pi+(-1)^k\operatorname{arcsen}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right);$$ ... solución de una ecuación trigonométrica elemental

$$\Rightarrow x+\frac{\pi}{4}=k\pi+(-1)^k\frac{\pi}{4}$$ ... se utilizó $\operatorname{arcsen}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{\pi}{4}$

$$\therefore x=k\pi+(-1)^k\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4};k\in\mathbb{Z}$$

Pero el ejemplo se puede resolver de otra forma

i) $\underbrace{\operatorname{sen}x}_{1}+\underbrace{\cos x}_{0}=1\Rightarrow(\cos x;\operatorname{sen}x)=(0;1)$

Este punto en la C.T. es el extremo de todos los arcos de la forma $x=\frac{\pi}{2}+2K\pi, k\in\mathbb{Z}$

ii) $\underbrace{\operatorname{sen}x}_{0}+\underbrace{\cos x}_{1}=1\Rightarrow(\cos x;\operatorname{sen}x)=(1;0);$

Este punto en la C.T. es el extremo de todos los arcos de la forma $x=2K\pi$

$\therefore$ Para $\operatorname{sen}x+\cos x=1$

$$CS: x=\left\{\frac{\pi}{2}+2K\pi\cup 2K\pi\right\};\ K\in\mathbb{Z};$$

queda para el lector la resolución del ejemplo 6 en forma análoga.

Observación

La solución general de una ecuación no tiene forma única veamos: $\operatorname{sen}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\cos\left[\frac{\pi}{2}-\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right]=\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)$

Por identidad $\cos(\alpha-\beta)=\cos(\beta-\alpha)$ entonces se obtiene que $\operatorname{sen}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$

Luego, en la ecuación elemental del ejemplo 12 $\operatorname{sen}x+\cos x=1\Rightarrow \operatorname{sen}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$ queda $\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$

De donde, si aplicamos la forma general de los arcos en coseno, obtenemos $x-\frac{\pi}{4}=2k\pi\pm\arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$$\therefore\quad x=2k\pi\pm\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4};\quad k\in\mathbb{Z}$$

Los conjuntos $\left\{k\pi+(-1)^k\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4}/k\in\mathbb{Z}\right\}$ y $\left\{2k\pi\pm\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}/k\in\mathbb{Z}\right\}$ son conjuntos equivalentes, dado que tienen los mismos elementos, por tanto, ambos expresan el conjunto solución de la ecuación.

Ejemplo 13

Resuelva la ecuación $\operatorname{sen}x+\sqrt{3}\cos x=-\sqrt{2}$

Resolución

Dada la ecuación $\operatorname{sen}x+\sqrt{3}\cos x=-\sqrt{2}$

$$\frac{1}{2}\operatorname{sen}x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$ ... multiplicando por $\frac{1}{2}$ a ambos miembros, obtenemos

$$\operatorname{sen}x\cos\frac{\pi}{3}+\operatorname{sen}\frac{\pi}{3}\cos x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$ ...sustituyendo $\frac{1}{2}$ y $\frac{\sqrt{3}}{2}$ por $\cos\frac{\pi}{3}$ y $\operatorname{sen}\frac{\pi}{3}$, respectivamente, en el primer miembro convenientemente

$$\operatorname{sen}\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$ ... por identidad de arcos compuestos

$$x+\frac{\pi}{3}=k\pi+(-1)^k\operatorname{arcsen}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$ ...solución de una ecuación trigonométrica elemental

$$x+\frac{\pi}{3}=k\pi+(-1)^k\left(-\frac{\pi}{4}\right)$$ ...se utilizó $\operatorname{arcsen}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-\frac{\pi}{4}$

Despejando x se obtiene $\therefore\ x=k\pi-(-1)^k\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{3};\ k\in\mathbb{Z}$

Nota Histórica

El profesor Scipión del Ferro (1496 – 1526) de la Universidad de Boloña (Italia) encontró una fórmula para la búsqueda de una raíz positiva de las ecuaciones concretas de la forma $x^3+px=q$ ($p>0$, $q>0$).

Él la mantuvo en secreto reservándola como arma contra sus contrarios en las disputas científicas. Al final de sus días comunicó este secreto a su pariente y heredero en el cargo Annibal Della Nave y a su alumno Fiore.

A comienzos del año 1535 debía realizarse un duelo científico entre Fiore y Nicolo Fontana, conocido con el apodo de Tartaglia, debido a su tartamudez, consecuencia de un golpe en la cabeza durante su infancia. Este último era un científico talentoso, procedente de una familia pobre, que se ganaba la vida con la enseñanza de la matemática y la mecánica en las ciudades del Norte de Italia. Conociendo que Fiore poseía la fórmula de Ferro, y habiendo preparado a su contrincante con problemas sobre la resolución de ecuaciones cúbicas, Tartaglia fue capaz de descubrir nuevamente esta fórmula, la que le permitió la victoria en la disputa celebrada el 12 de febrero del año 1535.

El método de Tartaglia, como al parecer también el de Ferro, consistía en la elección de la fórmula adecuada en la irracionalidad algebraica para la expresión de la raíz de las ecuaciones del tipo indicado anteriormente, $x^3+px=q$ ($p>0$; $q>0$). Suponiendo que $x=\sqrt[3]{\mu}-\sqrt[3]{v}$, sustituyendo esta expresión en la ecuación y poniendo $p=3\sqrt[3]{\mu v}$ él obtuvo el sistema $\mu-v=q$; $\mu v=\frac{p^3}{27}$

Interpretando a μ y v como raíces de una ecuación cuadrática, Tartaglia halló

$$\mu=\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^2}+\frac{q}{2}\ ;\ v=\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^2}-\frac{q}{2}$$

Así, en poco tiempo, Tartaglia pudo resolver la ecuación de la forma $x^3=px+q$ ($p>0$; $q>0$) con la sustitución $x=\sqrt[3]{\mu}+\sqrt[3]{v}$.



Nicolo Fontana Tartaglia (1500 –1557)

DESIGUALDADES TRIGONOMÉTRICAS DE UNA SOLA INCÓGNITA

Sean las funciones $y=f(x)$ e $y=g(x)$ cuyos dominios son Domf y Domg, respectivamente.

Ahora, la solución de la desigualdad $f(x) > g(x)$ serán todos los números pertenecientes al campo $\text{Domf} \cap \text{Domg}$ donde cada número verifica la desigualdad propuesta.

De una manera similar se resuelven las desigualdades $f(x)<g(x)$; $f(x) \geq g(x)$ y $f(x) \leq g(x)$.

Ahora bien, las desigualdades anteriores serían desigualdades trigonométricas, si $f(x)$ o $g(x)$ son funciones constantes o funciones que contengan funciones trigonométricas de la forma $FT^n(ax+b)$, donde $a \neq 0$ y $n \in \mathbb{Z}$.

A continuación se presentan ejemplos de dos funciones que relacionan a una desigualdad

Si $f(x)=\operatorname{sen}x-\cos x$, $g(x)=0$; luego las desigualdades que se pueden generar, serían las siguientes: $\operatorname{sen}x-\cos x<0$; $\operatorname{sen}x-\cos x \leq 0$; $\operatorname{sen}x-\cos x>0$; $\operatorname{sen}x-\cos x \geq 0$.

Si $f(x)=\tan^2\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)$, $g(x)=1$; luego las desigualdades que se pueden generar, serían las siguientes:

$$\tan^2\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)<1;\ \tan^2\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)\leq 1;\ \tan^2\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)>1;\ \tan^2\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)\geq 1$$

Si $f(x)=\cos 3x-1$; $g(x)=\operatorname{sen}^3\frac{3x}{2}$; luego las desigualdades que se pueden generar serían las siguientes:

$$\cos 3x-1<\operatorname{sen}^3\frac{3x}{2};\ \cos 3x-1\leq\operatorname{sen}^3\frac{3x}{2};\ \cos 3x-1>\operatorname{sen}^3\frac{3x}{2};\ \cos 3x-1\geq\operatorname{sen}^3\frac{3x}{2}$$

Si $f(x)=\operatorname{sen}(Rx)$, $g(x)=\cos(Mx)$; luego las desigualdades que se pueden generar serían las siguientes: $\operatorname{sen}(Rx)<\cos(Mx)$; $\operatorname{sen}(Rx)\leq\cos(Mx)$; $\operatorname{sen}(Rx)>\cos(Mx)$; $\operatorname{sen}(Rx)\geq\cos(Mx)$.

¿Cómo se resuelve una desigualdad trigonométrica?

Graficando las funciones $f(x)$ y $g(x)$, se pueden hallar las soluciones de las desigualdades anteriores

$$(f(x)>g(x);\ f(x)<g(x);\ f(x)\geq g(x) \text{ y } f(x)\leq g(x))$$

Para un mejor entendimiento, veamos el siguiente cuadro, donde suponen la gráfica de $y=f(x)$ e $y=g(x)$

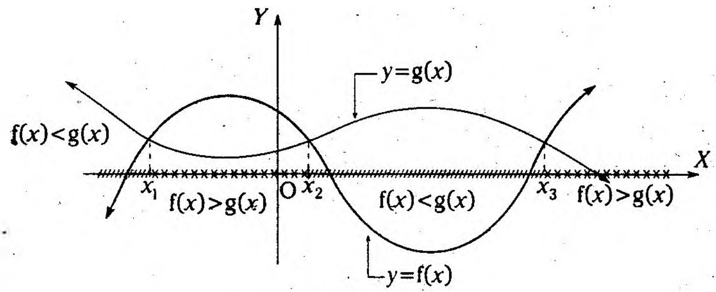


Figura 8.6

De la figura 8.6

I. Para la ecuación f(x)=g(x), tenemos
$x = \{x_1; x_2; x_3\}$

II. Para la desigualdad f(x)<g(x), tenemos
$x = \langle -\infty ; x_1 \rangle \cup \langle x_2 ; x_3 \rangle$

III. Para la desigualdad f(x)>g(x), tenemos
$x = \langle x_1 ; x_2 \rangle \cup \langle x_3 ; +\infty \rangle$

IV. Para la desigualdad $f(x) \leq g(x)$
se plantea

$$\begin{cases} \text{I. } f(x) < g(x) \Rightarrow x = \langle -\infty ; x_1 \rangle \cup \langle x_2 ; x_3 \rangle \\ \text{o} \\ \text{II. } f(x) = g(x) \Rightarrow x = \{x_1 ; x_2 ; x_3\} \end{cases}$$

y uniendo dichos conjuntos obtenemos
$x = \langle -\infty ; x_1] \cup [x_2 ; x_3]$

V. Para la desigualdad $f(x) \geq g(x)$, se plantea

$$\begin{cases} \text{I. } f(x) > g(x) \Rightarrow x = \langle x_1 ; x_2 \rangle \cup \langle x_3 ; +\infty \rangle \\ \text{o} \\ \text{II. } f(x) = g(x) \Rightarrow x = \{x_1 ; x_2 ; x_3\} \end{cases}$$

y uniendo dichos conjuntos obtenemos
$x = [x_1 ; x_2] \cup [x_3 ; +\infty \rangle$

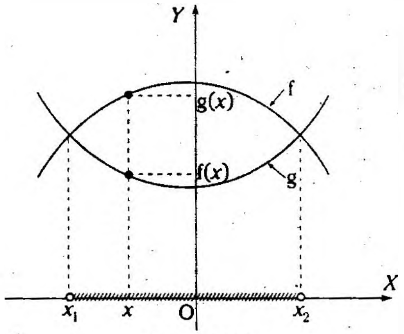


Figura 8.7

Observación

Para justificar la solución de la desigualdad f(x)>g(x), simplemente hemos realizado la comparación entre las ordenadas de f y g para cualquier valor del dominio x; en el intervalo de x_1 hasta x_2, véase la figura 8.7. Para abreviar razonamientos, se dice que la solución de una desigualdad generalmente se da por intervalos, ya que en realidad se sobreentiende que la solución es cualquier valor en dichos intervalos.

Ejemplo 14

Resuelva la desigualdad $\operatorname{sen} x > \frac{1}{2}$

Resolución

Se construye la gráfica de f(x)=sen$x$ y g(x)=$\frac{1}{2}$ (véase figura 8.8), entonces planteamos f(x)>g(x). La desigualdad en cuestión se satisface para todas aquellas x donde la gráfica de f se ubica por encima de la gráfica de g.

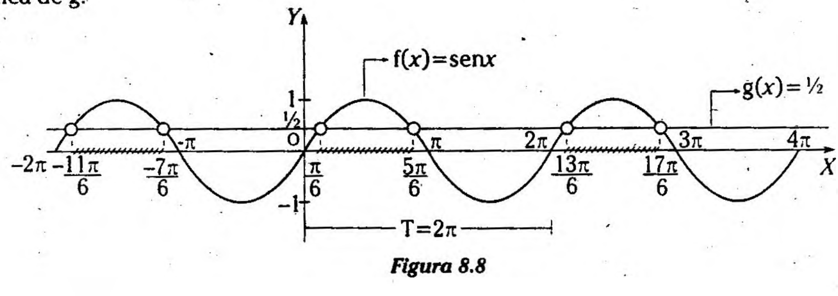


Figura 8.8

Entonces, las soluciones de la desigualdad $\text{sen}x > \frac{1}{2}$ están dadas por $x = ...\left\langle -\frac{4\pi}{6}; -\frac{7\pi}{6}\right\rangle \cup \left\langle \frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}\right\rangle \cup \left\langle \frac{13\pi}{16}; \frac{17\pi}{6}\right\rangle \cup ...$ como el periodo de la función sen$x$ es igual a 2π, bastará con resolver la desigualdad propuesta solo en algún intervalo de longitud 2π. En la figura 8.8, se observa que será más conveniente tomar el segmento desde 0 hasta 2π, donde la solución será $\frac{\pi}{6} < x < \frac{5\pi}{6}$, los demás intervalos se obtienen sumando 2π; 4π; 6π; ... a los extremos del intervalo $\left\langle \frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}\right\rangle$. De esa manera, la solución general de la inecuación es la siguiente $x = \left\langle \frac{\pi}{6} + 2k\pi \ ; \ \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \right\rangle; k \in \mathbb{Z}$

Ejemplo 15

Resuelva la inecuación $\text{sen}x \leq \cos x$

Resolución

En la figura 8.9 se ha construido los gráficos de $f(x) = \text{sen}x$ y $g(x) = \cos x$, de la inecuación $\text{sen}x \leq \cos x$, satisface para todas aquellas x donde la gráfica de f se halla por debajo (o coincide) de la gráfica de g. Las abscisas de los puntos de intersección las hallamos resolviendo la ecuación $f(x) = g(x)$

$$\Rightarrow \text{sen}x = \cos x \Rightarrow \frac{\text{sen}x}{\cos x} = 1 \quad \Rightarrow \tan x = 1 \therefore x = ...\frac{\pi}{4}; \frac{5\pi}{4}; \frac{9\pi}{4}; \frac{13\pi}{4}; ...$$

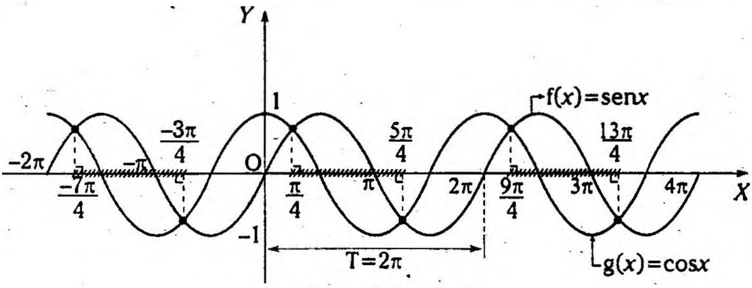


Figura 8.9

Entonces, las soluciones de la desigualdad $\text{sen}x \leq \cos x$ están contenidas en los siguientes intervalos $...; \left[-\frac{7\pi}{4}; \frac{-3\pi}{4}\right]; \left[\frac{\pi}{4}; \frac{5\pi}{4}\right]; \left[\frac{9\pi}{4}; \frac{13\pi}{4}\right]; ...$ como el periodo de la función sen$x$ y cos$x$ es 2π, bastará con resolver en el intervalo desde 0 hasta 2π, donde la solución es $\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{5\pi}{4}$; la solución completa se obtiene sumando a cada extremo del intervalo $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{5\pi}{4}\right]$ un número entero de veces el período (2π), entonces la solución de la inecuación será $\left[\frac{\pi}{4} + 2k\pi; \frac{5\pi}{4} + 2k\pi\right]; k \in \mathbb{Z}$

Ejemplo 16

Resuelva la inecuación trigonométrica $\tan\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)<-1$

Resolución

Asumiendo que $2x+\frac{\pi}{3}=\theta$, entonces resolveremos la inecuación $\tan\theta<-1$. Para esto, graficamo funciones (véase figura 8.10) de la desigualdad anterior, donde $f(\theta)=\tan\theta$ y $g(\theta)=-1$ entonces, la desigualdad a resolver sería $f(\theta)<g(\theta)$

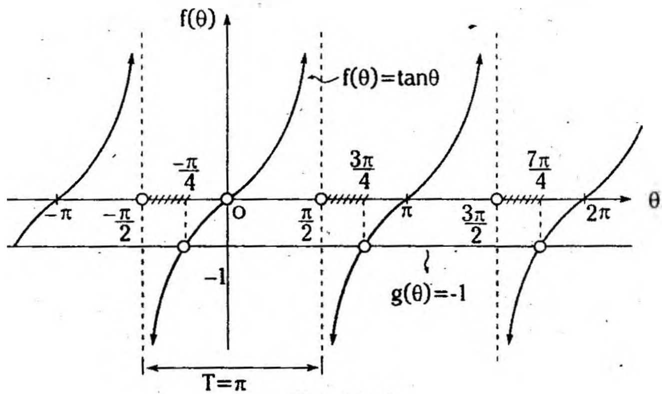


Figura 8.10

Las soluciones de la inecuación $\tan\theta<-1$ están contenidas en los siguientes interv

$\ldots;\left\langle\frac{-\pi}{2};\frac{-\pi}{4}\right\rangle;\left\langle\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{4}\right\rangle;\left\langle\frac{3\pi}{2};\frac{7\pi}{4}\right\rangle;\ldots$ Como el periodo T de la función $\tan\theta$ es $T=\pi$, bastará con res

en el segmento desde $-\frac{\pi}{2}$ hasta $\frac{\pi}{2}$, (sobre el eje θ) donde la solución es $\theta=\left\langle-\frac{\pi}{2};-\frac{\pi}{4}\right\rangle$ entonces obtener la solución completa se tendrá que sumar a cada extremo un número entero de vec periodo por lo que la solución a la inecuación será $\theta=\left\langle-\frac{\pi}{2}+k\pi;-\frac{\pi}{4}+k\pi\right\rangle;k\in\mathbb{Z}$

Haciendo $\theta=2x+\frac{\pi}{3}$ en $\tan\theta<-1$, se obtiene la desigualdad requerida, entonces

$$2x+\frac{\pi}{3}=\left\langle-\frac{\pi}{2}+k\pi\;;\;-\frac{\pi}{4}+k\pi\right\rangle\Rightarrow 2x=\left\langle-\frac{\pi}{2}+k\pi-\frac{\pi}{3};-\frac{\pi}{4}+k\pi-\frac{\pi}{3}\right\rangle\ \ldots\left(\text{sumando } -\frac{\pi}{3}\right)$$

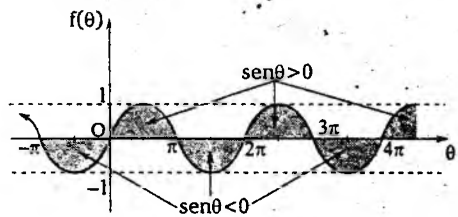
$$\Rightarrow 2x=\left\langle-\frac{5\pi}{6}+k\pi;-\frac{7\pi}{12}+k\pi\right\rangle\quad\ldots\left(\text{multiplicando por } \frac{1}{2}\right)$$

$$\therefore\ x=\left\langle-\frac{5\pi}{12}+\frac{k\pi}{2};-\frac{7\pi}{24}+\frac{k\pi}{2}\right\rangle;\ k\in\mathbb{Z}$$

Observación

En la figura 8.11(a) se ha graficado la función $f(\theta)=\operatorname{sen}\theta$, entonces

- Si $\operatorname{sen}\theta \geq 0$, $\Rightarrow$ $\theta=[2k\pi\,;2k\pi+\pi]; k\in \mathbb{Z}$
- Si $\operatorname{sen}\theta < 0$, $\Rightarrow$ $\theta=\langle 2k\pi+\pi;\ 2k\pi+2\pi\rangle$; $k\in \mathbb{Z}$



(a)

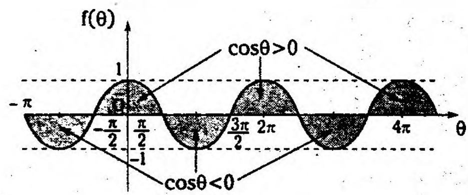
En la figura 8.11(b) se ha graficado $f(\theta)=\cos\theta$, entonces

- Si $\cos\theta \geq 0$, $\Rightarrow$

$$\theta=\left[-\frac{\pi}{2}+2k\pi\,;\ \frac{\pi}{2}+2k\pi\right];\ k\in \mathbb{Z}$$

- Si $\cos\theta<0$, $\Rightarrow$

$$\theta=\left\langle\frac{\pi}{2}+2k\pi\,;\frac{3\pi}{2}+2k\pi\right\rangle; k\in \mathbb{Z}$$



(b)

Figura 8.11

Ejemplo 17

Resuelva $\operatorname{sen}\left(2x-\frac{\pi}{7}\right)\geq 0$

Resolución

Haciendo $2x-\frac{\pi}{7}=\theta$ en la inecuación, al resolver obtenemos $\operatorname{sen}\theta\geq 0$, entonces de la observación anterior tenemos

$$\theta=[2k\pi\,;2k\pi+\pi]\Rightarrow 2x-\frac{\pi}{7}=[2k\pi;2k\pi+\pi]$$

y despejando x al igual que en el ejercicio anterior, obtendríamos

$$\therefore x=\left[k\pi+\frac{\pi}{14}\,;k\pi+\frac{4\pi}{7}\right]; k\in \mathbb{Z}$$

Ejemplo 18

Resuelva $\cos\left(\frac{2x}{3}\right)<0$

Resolución

Análogamente al ejemplo y observación anterior, tenemos

$$\frac{2x}{3}=\left\langle\frac{\pi}{2}+2k\pi\,;\frac{3\pi}{2}+2k\pi\right\rangle$$

Despejando x

$$\therefore x=\left\langle\frac{3\pi}{4}+3k\pi\,;\frac{9\pi}{4}+3k\pi\right\rangle; k\in \mathbb{Z}$$

Ejemplo 19

Resuelva

$$\operatorname{sen}\left(\frac{216x}{2003}\right)>0$$

Resolución

Análogamente al ejemplo anterior, teniendo en cuenta la última observación tenemos que

$$\frac{216x}{2003}=\langle 2k\pi;\ 2k\pi+\pi\rangle; k\in \mathbb{Z}$$

Despejando x, obtenemos

$$\therefore x=\left\langle\frac{2003k\pi}{108};\frac{2003k\pi}{108}+\frac{2003\pi}{216}\right\rangle;\ k\in \mathbb{Z}$$

SISTEMA DE ECUACIONES TRIGONOMÉTRICAS

Resolver un sistema de ecuaciones no es otra cosa que hallar todos los conjuntos de valores de las incógnitas que convierten al mismo tiempo todas las ecuaciones del sistema en igualdades numéricas justas.

El método más usado para resolver sistemas de ecuaciones trigonométricas es eliminar una de las incógnitas, con ayuda de las otras ecuaciones del sistema, se reduce al sistema de ecuaciones algebraicas mediante sustituciones acertadas de identidades o nuevas incógnitas o transformando las ecuaciones del sistema.

Las dificultades que se presentan están relacionadas con el hecho de que las ecuaciones que conforman un sistema de ecuaciones generan para el sistema un número infinitamente grande de soluciones.

No olvidemos que para tener un sistema de ecuaciones trigonométricas al menos una de las ecuaciones debe ser trigonométrica (las variables siempre deben estar afectadas de algún operador trigonométrico).

A continuación, se resolverá algunos ejercicios de sistemas de ecuaciones trigonométricas.

Ejemplo 20

Resuelva el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} \cos x \operatorname{sen} y = \dfrac{1}{2} & \ldots(1) \\ x + y = \dfrac{\pi}{2} & \ldots(2) \end{cases}$$

Resolución

La ecuación (2) del sistema por examinar permite fácilmente expresar una incógnita por la otra. Esto nos sugiere que es mejor resolver el sistema sustituyendo directamente una incógnita, después de lo cual el sistema se reduce a una ecuación trigonométrica de una sola incógnita. No importa qué incógnita se elimine, entonces

despejando y de (2), tenemos $y = \frac{\pi}{2} - x$ ... (3)

(3) lo sustituimos en el primer miembro de (1),

obteniendo $\cos x \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{1}{2}$

$\cos x \cos x = \frac{1}{2}$ ...por reducción al primer cuadrante

$$\Rightarrow \underline{2\cos^2 x - 1} = 0$$

$$\cos 2x = 0$$

Luego $2x = (2k+1)\frac{\pi}{2}$; $k \in \mathbb{Z}$

$$x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}; k \in \mathbb{Z}$$

En consecuencia, reemplazando en 3

$$y = \frac{\pi}{2} - \left(\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow y = \frac{\pi}{4} - \frac{k\pi}{2}$$

de esta forma obtenemos las soluciones del sistema inicial, así

$$x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}; \; y = \frac{\pi}{4} - \frac{k\pi}{2}$$

siendo

$k = 0; \pm 1; \pm 2; \ldots$

Nota

La comprobación que aquí es indispensable demuestra que todos los pares de los valores obtenidos de x e y satisfacen el sistema inicial. Debe entenderse también que a cada número entero k le corresponde el par de los valores de x e y, osea, la solución del sistema inicial, por ejemplo, si k=0, se obtiene los valores $x = \frac{\pi}{4}$ e $y = \frac{\pi}{4}$, los cuales reemplazados en las ecuaciones del sistema inicial, convierten a estas en igualdades numéricas justas. El sistema en mención tiene un número infinitamente grande de soluciones.

Ejemplo 21
Halle todas las resoluciones del sistema

$$\begin{cases} \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 y = \dfrac{\sqrt{3}}{4} + 1 & \ldots(1) \\ x - y = \dfrac{\pi}{3} & \ldots(2) \end{cases}$$

que satisfacen las condiciones si $0<x<\pi$; $0<y<\pi$

Resolución
El procedimiento realizado en la solución de este ejercicio es análogo al ejemplo anterior. De (2),

despejamos $y \Rightarrow y = x - \dfrac{\pi}{3}$ ...(3)

Antes de reemplazar (3) en (1), haremos algunas operaciones para facilitar este reemplazo, así en (1).
Multiplicando por 2 a los dos miembros

$$2\operatorname{sen}^2 x + 2\cos^2 y = \frac{\sqrt{3}}{2} + 2$$

Degradando, obtenemos:

$$\not{1} - \cos 2x + 1 + \cos 2y = \frac{\sqrt{3}}{2} + \not{2}$$

$$\cos 2y - \cos 2x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow -2\operatorname{sen}(y+x)\operatorname{sen}(y-x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow \operatorname{sen}(y+x)\operatorname{sen}(x-y) = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$\Rightarrow \operatorname{sen}\Big(\overbrace{x - \frac{\pi}{3}}^{y} + x\Big)\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$\Rightarrow \operatorname{sen}\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

Simplificando $\Rightarrow \operatorname{sen}\left(2x - \dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{1}{2}$ . . . (4)

Pero como $0 < x < \pi$, entonces $\dfrac{-\pi}{3} < 2x - \dfrac{\pi}{3} < \dfrac{5\pi}{3}$, por lo tanto, para que se verifique (4), tenemos solo dos opciones (I) y (II)

I. $2x - \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\pi}{6}$

despejando x se obtiene $x = \dfrac{\pi}{4}$

como $y = x - \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\pi}{3} = -\dfrac{\pi}{12} \Rightarrow y = -\dfrac{\pi}{12}$

II. $2x - \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{5\pi}{6}$

despejando x se obtiene $x = \dfrac{7\pi}{12}$

como $y = x - \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{7\pi}{12} - \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\pi}{4} \Rightarrow y = \dfrac{\pi}{4}$

La resolución del sistema $x = \dfrac{\pi}{4}$; $y = -\dfrac{\pi}{12}$ la descartamos porque $y = -\dfrac{\pi}{12} \notin \langle 0;\pi\rangle$

Por lo tanto, la única solución del sistema inicial que verifica

$$0 < x < \pi \;;\; 0 < y < \pi, \text{ es } \left\{x = \frac{7\pi}{12} \;;\; y = \frac{\pi}{4}\right\}$$

Ejemplo 22
Resuelva el sistema

$$\begin{cases} \cos x + \cos y = m & \ldots(1) \\ \cos 2x - \cos 2y = 2n & \ldots(2) \end{cases}$$

Resolución
En (2), utilizamos identidades del arco doble

$$(2\cos^2 x - 1) - (2\cos^2 y - 1) = 2n$$

$\cos^2 x - \cos^2 y = n$ . . . operando

$$\underbrace{(\cos x + \cos y)}_{m}(\cos x - \cos y) = n$$

$\Rightarrow m(\cos x - \cos y) = n$ . . . utilizando (1)

$\cos x - \cos y = \dfrac{n}{m}$ . . .(3)

De (1) y (3) se obtienen fácilmente

$$\cos x = \frac{m^2 + n}{2m} \;;\; \cos y = \frac{m^2 - n}{2m}$$

Teniendo en cuenta la solución de una ecuación trigonométrica elemental, tenemos que la resolución completa del sistema inicial es

$$x = 2k\pi \pm \arccos\left(\frac{m^2 + n}{2m}\right) \text{ e}$$

$$y = 2R\pi \pm \arccos\left(\frac{m^2 - n}{2m}\right) \text{ siendo } k \wedge R \in \mathbb{Z}.$$

Problemas Resueltos

Problema 1

Resuelva la siguiente ecuación trigonométrica
$\text{sen}3x - 8\text{sen}^3x = 0$

Resolución

$$3\text{sen}x - 4\text{sen}^3x - 8\text{sen}^3x = 0 \ldots$$

Se ha usado

$$\text{sen}3x = 3\text{sen}x - 4\text{sen}^3x$$
$$3\text{sen}x - 12\text{sen}^3x = 0 \quad \ldots \text{operando}$$

dividiendo ambos miembros por (3)

$$\text{sen}x - 4\text{sen}^3x = 0$$
$$\text{sen}x(1 - 4\text{sen}^2x) = 0$$

Empleando degradación

$$(2\,\text{sen}^2\theta = 1 - \cos 2\theta)$$

reemplazando tenemos

$$\text{sen}x(2\cos 2x - 1) = 0$$

Igualando cada factor a cero

I. $\text{sen}x = 0 \Rightarrow x = m\pi\,;\ m \in \mathbb{Z}$

II. $\cos 2x = \dfrac{1}{2} \Rightarrow 2x = 2k\pi \pm \dfrac{\pi}{3}\,;\ k \in \mathbb{Z}$

$$\Rightarrow x = k\pi \pm \frac{\pi}{6}$$

Por lo tanto, la solución general de la ecuación es:

$$x = \left\{m\pi\,;\,k\pi \pm \frac{\pi}{6}\right\};\ m;\ k \in \mathbb{Z}$$

Problema 2

Resuelva $4\text{sen}^4x + 2\text{sen}^2x\cos 2x = 1$

Resolución

$$4\text{sen}^4x + 2\text{sen}^2x(1 - 2\text{sen}^2x) = 1$$

Se ha utilizado $\cos 2x = 1 - 2\text{sen}^2x$

$$4\,\text{sen}^4x + 2\,\text{sen}^2x - 4\,\text{sen}^4x = 1 \ \ldots \text{operando}$$
$$2\text{sen}^2x = 1 \ \ldots \text{degradado por dobles}$$
$$1 - \cos 2x = 1 \Rightarrow \cos 2x = 0$$
$$2x = 2k\pi \pm \arccos(0)$$

(expresión general para el arco en coseno)

$$2x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{2} \quad \left(\text{se sabe que } \arccos(0) = \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\therefore\ x = k\pi \pm \frac{\pi}{4};\ k \in \mathbb{Z}$$

Otra forma de hallar la solución general de la ecuación anterior, es utilizando circunferencia trigonométrica.

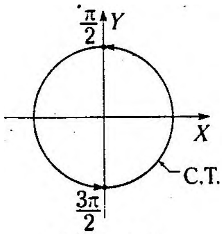


Figura 8.12

Como

$$\cos 2x = 0 \Rightarrow 2x = (2k+1)\frac{\pi}{2}$$

$$\therefore x = (2k+1)\frac{\pi}{4};\ k \in \mathbb{Z}$$

Nota

Los conjuntos $\left\{k\pi \pm \frac{\pi}{4}\right\}$ ó $\left\{(2k+1)\frac{\pi}{4}\right\}$, donde $k \in \mathbb{Z}$ son equivalentes, es decir, tienen los mismos elementos. Entonces, la respuesta a este problema podría ser cualquiera de estos dos conjuntos.

Problema 3

Resuelva la siguiente ecuación trigonométrica:

$\cos x\cos 2x\cos 3x=\frac{1}{4}$ e indique la menor solución positiva.

Resolución

Multiplicando por 2 los dos miembros

$$\underline{2\cos x\cos 2x}\cos 3x=\frac{1}{2}$$

$$(\cos 3x+\cos x)\cos 3x=\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \underbrace{2\cos^2 3x}+\underbrace{2\cos 3x\cos x}=1$$

$$\cancel{1}+\cos 6x+\cos 4x+\cos 2x=\cancel{1}\ \ldots$$

se ha empleado identidades del arco doble y transformaciones trigonométricas.

$$\underline{\cos 6x+\cos 2x}+\cos 4x=0$$

$$2\cos 4x\cos 2x+\cos 4x=0$$

$$\cos 4x(2\cos 2x+1)=0 \quad \ldots \text{se ha factorizado}$$

Igualando cada factor a cero

I. $\cos 4x=0 \Rightarrow 4x=(2k+1)\frac{\pi}{2};\ k\in \mathbb{Z}$, de manera similar al problema anterior

$$\Rightarrow x=(2k+1)\frac{\pi}{8}$$

II. $\cos 2x=-\frac{1}{2}\Rightarrow 2x=2k\pi\pm\frac{2\pi}{3}$

$$\Rightarrow x=k\pi\pm\frac{\pi}{3}$$

A continuación, se tienen algunas soluciones particulares de la ecuación a resolver. Estas se obtienen asignando valores enteros a k.

De $\quad x=(2k+1)\frac{\pi}{8}$,

tenemos

$$x=\{\ldots;-\pi/8;\ \pi/8;\ 3\pi/8;\ \ldots\}$$

De $\quad x=k\pi\pm\frac{\pi}{3}$,

tenemos

$$x=\{\ldots;-\pi/3;\ \pi/3;\ 2\pi/3;\ 4\pi/3;\ldots\}$$

Por lo tanto, la resolución general de la ecuación

$\cos x\cos 2x\cos 3x=\frac{1}{4}$ es $\left\{(2k+1)\frac{\pi}{8};k\pi\pm\frac{\pi}{3}\right\};\ k\in\mathbb{Z}$,

mientras que la menor solución positiva es $\frac{\pi}{8}$.

Problema 4

Resuelva la ecuación $\operatorname{sen}^3x+\cos^3x=\cos 2x$

Resolución

$(\operatorname{sen}x+\cos x)(\operatorname{sen}^2x-\operatorname{sen}x\cos x+\cos^2x)=\cos^2x-\operatorname{sen}^2x$ $(\cos x+\operatorname{sen}x)(1-\operatorname{sen}x\cos x)=(\cos x+\operatorname{sen}x)(\cos x-\operatorname{sen}x)$ simplificamos al factor $(\cos x+\operatorname{sen}x)$; pero lo igualamos a cero, entonces

$\cos x+\operatorname{sen}x=0 \Rightarrow \tan x=-1$

$$\therefore\ x=k\pi-\frac{\pi}{4};\ k\in\mathbb{Z}$$

Luego de simplificar, queda por resolver

$$1-\operatorname{sen}x\cos x=\cos x-\operatorname{sen}x$$

$$1-\operatorname{sen}x\cos x-\cos x+\operatorname{sen}x=0$$

factorizando

$$(1+\operatorname{sen}x)-\cos x(1+\operatorname{sen}x)=0$$

$$(1+\operatorname{sen}x)(1-\cos x)=0$$

Igualando cada factor a cero

I. $\operatorname{sen}x=-1\Rightarrow x=2k\pi+\frac{3\pi}{2}$

II. $\cos x=1\Rightarrow x=2k\pi$

Por lo tanto, el conjunto solución de la ecuación $\operatorname{sen}^3x+\cos^3x=\cos 2x$ es

$$\left\{2k\pi+\frac{3\pi}{2}\cup 2k\pi\cup k\pi-\frac{\pi}{4}\right\};\ (k\in\mathbb{Z})$$

Problema 5

Calcule la suma de soluciones de la ecuación

$$\cos 6x=\left(\frac{1+\operatorname{sen}6x}{\sec 2x}\right)\csc 2x$$

que verifiquen $0\leq x\leq \pi$

Resolución

$$\cos 6x=\left(\frac{1+\operatorname{sen}6x}{\frac{1}{\cos 2x}}\right)\frac{1}{\operatorname{sen}2x}$$

De lo anterior, es obvio que $\cos 2x\neq 0$ y $\operatorname{sen}2x\neq 0$, entonces operando tenemos

$$\cos 6x=\frac{\cos 2x(1+\operatorname{sen}6x)}{\operatorname{sen}2x}$$

$$\operatorname{sen}2x\cos 6x=\cos 2x+\operatorname{sen}6x\cos 2x$$

$$0=\cos 2x+\operatorname{sen}6x\cos 2x-\operatorname{sen}2x\cos 6x$$

$$\Rightarrow \underbrace{\operatorname{sen}6x\cos 2x-\operatorname{sen}2x\cos 6x}_{\operatorname{sen}(6x-2x)}+\cos 2x=0$$

$$\operatorname{sen}4x+\cos 2x=0$$

$$2\operatorname{sen}2x\cos 2x+\cos 2x=0$$

$$\cos 2x(2\operatorname{sen}2x+1)=0$$

$$\Rightarrow \cos 2x=0 \quad \text{ó} \quad \operatorname{sen}2x=-\frac{1}{2}$$

Pero, inicialmente

$$\cos 2x\neq 0 \ \wedge \ \operatorname{sen}2x\neq 0$$

entonces, nos quedamos con la ecuación

$$\operatorname{sen}2x=-\frac{1}{2}$$

Como $0\leq x\leq \pi$, entonces $0\leq 2x\leq 2\pi$, por lo tanto, las únicas soluciones posibles de $2x$ serán (ver figura 8.13)

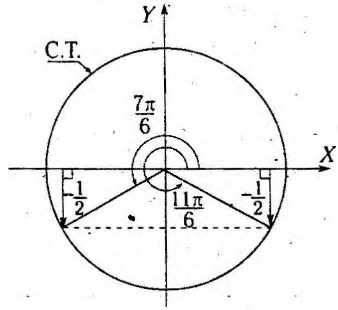


Figura 8.13

$$2x=\frac{7\pi}{6};\vee\ 2x=\frac{11\pi}{6}$$

$$\Rightarrow \quad x=\frac{7\pi}{12};\vee\ x=\frac{11\pi}{12}$$

Por lo tanto, la suma pedida será

$$\frac{7\pi}{12}+\frac{11\pi}{12}=\frac{3\pi}{2}$$

Problema 6

Resuelva la ecuación $\operatorname{sen}x+\tan\theta\cos x=2\operatorname{sen}\theta$, donde θ es un valor conocido.

Resolución

$$\operatorname{sen}x+\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}\cos x=2\operatorname{sen}\theta$$

$$\underline{\operatorname{sen}x\cos\theta+\cos x\operatorname{sen}\theta}=2\operatorname{sen}\theta\cos\theta$$

$$\operatorname{sen}(x+\theta)=\operatorname{sen}2\theta$$

Como un valor de $(x+\theta)$ es 2θ, podemos generalizar de la siguiente manera

$$x+\theta=k\pi+(-1)^k 2\theta;\quad k\in\mathbb{Z}$$

$$\therefore\ x=k\pi+(-1)^k 2\theta-\theta;\ k\in\mathbb{Z}$$

Problema 7

Resuelva la siguiente ecuación trigonométrica $\tan(x+45°)+\tan(x-45°)-2\cot x = 0$

Resolución

Al pasar a senos y cosenos tenemos

$$\frac{\operatorname{sen}(x+45°)}{\cos(x+45°)}+\frac{\operatorname{sen}(x-45°)}{\cos(x-45°)}-\frac{2\cos x}{\operatorname{sen} x}=0 \;...(1)$$

se observa que $\cos(x+45°)\neq 0$, $\cos(x-45°)\neq 0$ y $\operatorname{sen}x\neq 0$.

Operar en la ecuación (1), resultaría laborioso, mejor volvamos a la ecuación original

$$\tan(x+45°)+\tan(x-45°)-2\cot x=0$$

$$\underline{\cot(45°-x)-\tan(45°-x)}-2\cot x=0$$

...(por identidad de arco doble)

$$2\cot(90°-2x)-2\cot x=0$$

$$2\tan 2x-2\cot x=0$$

expresando en términos de senos y cosenos.

$$\frac{\operatorname{sen}2x}{\cos 2x}-\frac{\cos x}{\operatorname{sen}x}=0$$

$$\Rightarrow \frac{\operatorname{sen}2x\operatorname{sen}x-\cos 2x\cos x}{\cos 2x\operatorname{sen}x}=0$$

$$\Rightarrow \frac{-\cos(2x+x)}{\cos 2x\operatorname{sen}x}=0$$

$$\Rightarrow \frac{\cos 3x}{\cos 2x\operatorname{sen}x}=0 \;...\;(2)$$

La única posibilidad para que se cumpla la ecuación (2) es que el numerador sea igual a cero, entonces

$$\cos 3x = 0 \Rightarrow 3x=(2k+1)90°;\ k\in\mathbb{Z}$$

$$\therefore\ x=(2k+1)30°$$

Como para todo $x=(2k+1)30°;(k\in\mathbb{Z})$ si se cumple que $\cos(x+45°)\neq 0$, $\cos(x-45°)\neq 0$ y $\operatorname{sen}x\neq 0$, entonces la solución general de la ecuación

$\tan(x+45°)+\tan(x-45°)-2\cot x=0$, es:

$\{(2k+1)30°\};k\in\mathbb{Z}$

Problema 8

Halle las soluciones de la ecuación

$$3\operatorname{sen}^2x-\cos^2x-2\operatorname{sen}x\cos x=0$$

que verifiquen $-\pi\leq x\leq\pi$

Resolución

Por identidades del arco doble

$$3\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)-\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)-\operatorname{sen}2x=0$$

operando

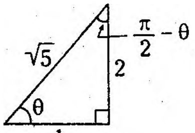
$$1-2\cos 2x-\operatorname{sen}2x=0$$

$$\underline{\operatorname{sen}2x+2\cos 2x}=1$$

$$\Rightarrow\ \sqrt{5}\operatorname{sen}(2x+\theta)=1$$

Por propiedad de arcos compuestos, donde se puede cumplir $\theta=\arctan(2)$, véase figura 8.14(a).

Luego $\operatorname{sen}(2x+\theta)=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$



(a)

$$\Rightarrow\ 2x+\theta=k\pi+(-1)^k\operatorname{arcsen}\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\ \ldots\text{(I)}$$

(expresión general para el seno); $\operatorname{arcsen}\frac{1}{\sqrt{5}}=\frac{\pi}{2}-\theta$

Reemplazando en I

$$2x+\theta=k\pi+(-1)^k\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$$

$$\therefore\ x=\frac{k\pi}{2}+\frac{1}{2}(-1)^k\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)-\frac{\theta}{2};\quad k\in\mathbb{Z}$$

$$\text{Si } k=-2\Rightarrow x=-\pi+\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}-\frac{\theta}{2}=-\frac{3\pi}{4}-\theta\ldots\Big\}\notin[-\pi;\pi]$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{Si } k=-1\Rightarrow x=-\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}-\frac{\theta}{2}=-\frac{3\pi}{4}\\[2ex] \text{Si } k=0\Rightarrow x=0+\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}-\frac{\theta}{2}=\frac{\pi}{4}-\theta\\[2ex] \text{Si } k=1\Rightarrow x=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}-\frac{\theta}{2}=\frac{\pi}{4}\\[2ex] \text{Si } k=2\Rightarrow x=\frac{2\pi}{2}+\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}-\frac{\theta}{2}=\frac{5\pi}{4}-\theta\end{array}\right\}\in[-\pi;\pi]$$

$$\text{Si } k=3\Rightarrow x=\frac{3\pi}{2}-\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}-\frac{\theta}{2}=\frac{5\pi}{4}\ldots\notin[-\pi;\pi]$$

(véase figura 8.14(b))

Por lo tanto, las soluciones de la ecuación

$$3\operatorname{sen}^2x-\cos^2x-2\operatorname{sen}x\cos x=0$$

que verifican

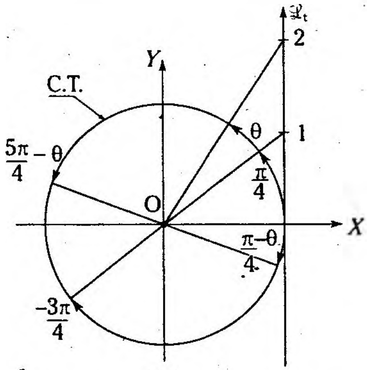
$$-\pi\leq x\leq\pi$$

son

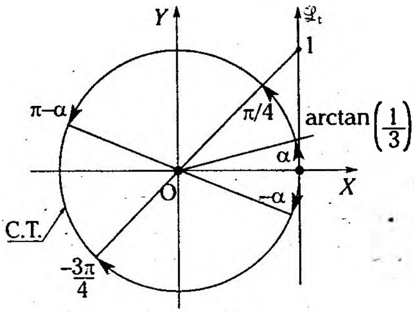
$$\left\{-\frac{3\pi}{4};\frac{\pi}{4}-\theta;\frac{\pi}{4};\frac{5\pi}{4}-\theta\right\};$$

donde

$$\theta=\arctan(2)$$



(b)



(c)

Figura 8.14

Otro método

Como la ecuación $3\text{sen}^2x-\cos^2x-2\text{sen}x\cos x=0$ no se verifica para todo $x=(2k+1)\frac{\pi}{2};k\in\mathbb{Z}$, entonces podemos dividir a ambos miembros por $\cos^2x$

$$\frac{3\text{sen}^2x}{\cos^2x}-\frac{\cos^2x}{\cos^2x}-\frac{2\text{sen}x\cos x}{\cos^2x}=\frac{0}{\cos^2x}$$

$\Rightarrow 3\tan^2x-1-2\tan x=0$

$\Rightarrow 3\tan^2x-2\tan x-1=0$

$\Rightarrow (3\tan x+1)(\tan x-1)=0\ldots$

$\Rightarrow \tan x=-\frac{1}{3}$ ó $\tan x=1$

$x=k\pi+\arctan\left(-\frac{1}{3}\right)$ ó $x=k\pi+\arctan(1)$

Expresión general para la tangente

$x=k\pi-\arctan\frac{1}{3}$ ó $x=k\pi+\frac{\pi}{4}$

Hallando algunas soluciones de

Si $x=k\pi-\arctan\frac{1}{3}$ (Véase figura 8.14(c))

$k=-1 \rightarrow x=-\pi-\arctan\frac{1}{3}$

$k=0 \rightarrow x=-\arctan\frac{1}{3}$

$k=1 \rightarrow x=\pi-\arctan\frac{1}{3}$

$k=2 \rightarrow x=2\pi-\arctan\frac{1}{3}$

También de $x=k\pi+\frac{\pi}{4}$

Si $k=-1\rightarrow x=-\frac{3\pi}{4}$

$k=0 \rightarrow x=\frac{\pi}{4}$

Por lo tanto, las soluciones de la ecuación $3\text{sen}^2x-\cos^2x-2\text{sen}x\cos x=0$; que verifican $-\pi\le x\le\pi$, serán

$$\left\{-\frac{3\pi}{4};-\arctan\frac{1}{3};\frac{\pi}{4};\pi-\arctan\frac{1}{3}\right\}$$

Nota

Los conjuntos

$$\left\{-\frac{3\pi}{4};\frac{\pi}{4}-\theta;\frac{\pi}{4};\frac{5\pi}{4}-\theta\right\} \text{ y}$$

$$\left\{-\frac{3\pi}{4};-\arctan\frac{1}{3};\frac{\pi}{4};\pi-\text{arctg}\frac{1}{3}\right\}$$

donde $\theta=\arctan(2)$, son equivalentes ya que

$$\arctan\frac{1}{3}+\arctan\frac{1}{2}=\frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow \arctan\frac{1}{3}=\frac{\pi}{4}-\arctan\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \arctan\frac{1}{3}=\frac{\pi}{4}-\text{arccot}(2)$$

$$\Rightarrow \arctan\frac{1}{3}=\frac{\pi}{4}-\left[\frac{\pi}{2}-\arctan(2)\right]$$

$$\Rightarrow \arctan\frac{1}{3}=-\frac{\pi}{4}+\arctan(2)$$

Como

$$\theta=\arctan(2)\Rightarrow\arctan\frac{1}{3}=-\frac{\pi}{4}+\theta$$

Por lo tanto

$$-\arctan\frac{1}{3}=\frac{\pi}{4}-\theta \text{ y } \pi-\arctan\frac{1}{3}=\frac{5\pi}{4}-\theta$$

Problema 9

Resuelva $2\operatorname{sen}x + \cos x - 2\tan x = 1$

Resolución

1ra. Forma

$$2\operatorname{sen}x+\cos x-\frac{2\operatorname{sen}x}{\cos x}=1 \quad \ldots\left(\begin{array}{c}\text{pasando a}\\ \text{senos y cosenos}\end{array}\right)$$

Nótese que $\cos x \neq 0$, entonces multiplicando por $\cos x$ ambos miembros tenemos

$$2\operatorname{sen}x\cos x+\cos^2 x-2\operatorname{sen}x=\cos x$$

$$\Rightarrow 2\operatorname{sen}x\cos x-2\operatorname{sen}x+\cos^2 x-\cos x=0$$

$$\Rightarrow 2\operatorname{sen}x(\cos x-1)+\cos x(\cos x-1)=0$$

$$\Rightarrow (\cos x-1)(2\operatorname{sen}x+\cos x)=0$$

Igualando cada factor a cero

$$\Rightarrow \cos x-1=0 \quad \text{ó} \quad 2\operatorname{sen}x+\cos x=0$$

$$\cos x=1 \quad \text{ó} \quad \tan x=-\frac{1}{2}$$

$$x=2k\pi \quad \text{ó} \quad x=k\pi-\arctan\frac{1}{2}\ ;\ k\in\mathbb{Z}$$

Como

$$\forall x=2k\pi \quad \text{ó} \quad x=k\pi-\arctan\frac{1}{2}$$

donde k es un entero, se verifica que $\cos x \neq 0$, entonces concluímos que la solución general de la ecuación a resolver es

$$\left\{2k\pi \cup k\pi-\arctan\frac{1}{2}\right\};k\in\mathbb{Z}$$

2da. forma

Utilizando las identidades (triángulo de arco doble)

$$\operatorname{sen}x=\frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}\ ;\quad \cos x=\frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}$$

$$\text{y}\quad \tan x=\frac{2\tan\frac{x}{2}}{1-\tan^2\frac{x}{2}}$$

reemplazando en la ecuación a resolver, tenemos

$$\frac{4\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}+\frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}-\frac{4\tan\frac{x}{2}}{1-\tan^2\frac{x}{2}}=1$$

$$\frac{4\tan\frac{x}{2}+1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}-\frac{4\tan\frac{x}{2}}{1-\tan^2\frac{x}{2}}=1$$

Realizando operaciones elementales, se llega a la siguiente ecuación

$$\tan^4\frac{x}{2}-4\tan^3\frac{x}{2}-\tan^2\frac{x}{2}=0$$

$$\Rightarrow \tan^2\frac{x}{2}\left(\tan^2\frac{x}{2}-4\tan\frac{x}{2}-1\right)=0$$

$$\Rightarrow \tan^2\frac{x}{2}=0\ ;\ \tan^2\frac{x}{2}-4\tan\frac{x}{2}-1=0$$

$$\Rightarrow \tan\frac{x}{2}=0\ ;\ \left\{\tan\frac{x}{2}=2+\sqrt{5}\vee\tan\frac{x}{2}=2-\sqrt{5}\right\}$$

$$\frac{x}{2}=k\pi\ ;\ \left\{\frac{x}{2}=k\pi+\arctan\left(2+\sqrt{5}\right)\vee\frac{x}{2}=k\pi+\arctan\left(2-\sqrt{5}\right)\right\}$$

$$x=2k\pi\ ;\ \left\{x=2k\pi+2\arctan\left(2+\sqrt{5}\right)\vee x=2k\pi+2\arctan\left(2-\sqrt{5}\right)\right\}$$

Por lo tanto, la solución general de la ecuación a resolver será

$$\left\{2k\pi\cup 2k\pi+2\arctan\left(2+\sqrt{5}\right)\cup 2k\pi+\arctan\left(2-\sqrt{5}\right)\right\};k\in\mathbb{Z}$$

Nota

Las soluciones generales o conjuntos solución, obtenidos en los dos métodos de solución del problema (9) son equivalentes.

Problema 10

Resuelva la ecuación

2(cos$x$ – sen$x$) + 10 sen$x$cos$x$–5 =0

Resolución

Si hacemos que cos$x$–sen$x$=a; entonces por identidades fundamentales $\operatorname{sen}x\cos x=\frac{1-a^2}{2}$

reemplazando en la ecuación por resolver, tenemos

$$2a+10\left(\frac{1-a^2}{2}\right)-5=0$$

$$\Rightarrow 2a-5a^2=0$$

$$\Rightarrow a(2-5a)=0$$

Igualando cada factor a cero

$$\Rightarrow a=0 \text{ ó } a=\frac{2}{5}$$

Pero a=cos$x$–sen$x$, además por identidades de arcos compuestos tenemos

$$\cos x-\operatorname{sen}x=\sqrt{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$$

entonces $\sqrt{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=0$ ó $\sqrt{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{2}{5}$

$$\Rightarrow \cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=0 \text{ ó } \cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{5}$$

$$\Rightarrow x+\frac{\pi}{4}=(2k+1)\frac{\pi}{2} \text{ ó } x+\frac{\pi}{4}=2k\pi\pm\arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{5}\right)$$

$$\Rightarrow x=k\pi+\frac{\pi}{4} \quad \text{ó} \quad x=2k\pi\pm\arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{5}\right)-\frac{\pi}{4}$$

Finalmente la solución general de la ecuación propuesta es

$$\left\{k\pi+\frac{\pi}{4}\cup 2k\pi\pm\arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{5}\right)-\frac{\pi}{4}\right\};k\in\mathbb{Z}$$

Problema 11

Resuelva el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases}\dfrac{1-\tan x}{1+\tan x}=\tan y\\ x-y=\dfrac{\pi}{6}\end{cases}$$

Resolución

De la segunda ecuación tenemos $y=x-\frac{\pi}{6}$, luego reemplazando y en la primera ecuación, tenemos

$$\frac{1-\tan x}{1+\tan x}=\tan\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$$

$\tan\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=\tan\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$ ... se utilizó la identidad de arcos compuestos en el primer miembro.

$$-\tan\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\tan\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\tan\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+\tan\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=0$$

$$\frac{\operatorname{sen}\left[\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+\left(x-\frac{\pi}{6}\right)\right]}{\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)}=0$$

$$\frac{\operatorname{sen}\left(2x-\frac{5\pi}{12}\right)}{\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)}=0$$

$$\Rightarrow \operatorname{sen}\left(2x-\frac{5\pi}{12}\right)=0;$$

$$\Rightarrow 2x-\frac{5\pi}{12}=k\pi;\, k\in\mathbb{Z}$$

de donde despejando x se obtiene

$$x=\frac{k\pi}{2}+\frac{5\pi}{24}$$

Como

$$y=x-\frac{\pi}{6};$$

entonces

$$y=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{24}$$

Por lo tanto, las soluciones del sistema a resolver son las siguientes

$$x=\frac{k\pi}{2}+\frac{5\pi}{24};\ y=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{24};\ (k\in\mathbb{Z})$$

Problema 12

Halle todas las soluciones del sistema

$$\begin{cases}|\operatorname{sen}x|\operatorname{sen}y=-1/4 & ...(1)\\ \cos(x+y)+\cos(x-y)=3/2 & ...(2)\end{cases}$$

que satisfacen las condiciones

$$0<x<2\pi,\ \pi<y<2\pi$$

Resolución

Si sen $x>0$, entonces $0<x<\pi$ y $|\operatorname{sen}x|=\operatorname{sen}x$, entonces en la ecuación (1) obtendremos la ecuación $\operatorname{sen}x\operatorname{sen}y=-1/4$ ... (3)

En la ecuación (2), por transformaciones en el primer miembro se tiene

$$2\cos x\cos y=\frac{3}{2}\Rightarrow\cos x\cos y=\frac{3}{4}...(4)$$

Sumando (4) con (3) y restando (4) con (3) respectivamente formamos el siguiente sistema

$$\begin{cases}\cos(x-y)=\dfrac{1}{2}\\ \cos(x+y)=1\end{cases}$$

de donde se obtienen

$$x-y=2k\pi\pm\frac{\pi}{3};\ \ x+y=2n\pi,$$

siendo k y n números enteros.

Como $0<x<\pi$ (para el caso $\operatorname{sen}x>0$) y $\pi<y<2\pi$, tenemos que

$$-2\pi<x-y<0\ \text{ ó }\ \pi<x+y<3\pi$$

Entonces de

$$\cos(x-y)=\frac{1}{2}$$

tenemos que

$$x-y=-\frac{\pi}{3}\ \text{ó}\ \ x-y=-\frac{5\pi}{3}$$

y de $\cos(x+y)=1$

tenemos que $x+y=2\pi$

De esta manera, obtenemos dos sistemas algebraicos lineales

$$\begin{cases}x-y=-\pi/3\\ x+y=2\pi\end{cases}\ \text{y}\ \begin{cases}x-y=-5\pi/3\\ x+y=2\pi\end{cases}$$

De donde tenemos dos soluciones del sistema inicial

$$x=\frac{5\pi}{6};\ y=\frac{7\pi}{6}\ \ \text{y}$$

$$x=\frac{\pi}{6};\ y=\frac{11\pi}{6}$$

En el problema 12, no se tiene la posibilidad de eliminar directamente una de las incógnitas, pero el sistema considerado allí se convierte simplemente en una forma que permite encontrar algunas soluciones que satisfacen condiciones complementarias. La particularidad de este problema consiste en que no interesan todas las soluciones del sistema.

Problema 13

Resuelva la inecuación

$$\operatorname{sen}2x>\cos x$$

Resolución

En la figura se han construido las gráficas de las funciones $f(x)=\text{sen}2x$ y $g(x)=\cos x$; la inecuación $\text{sen}2x>\cos x$ se satisface para todos aquellos x, donde la gráfica de **f** se halla por encima de **g** (sin considerar los puntos de intersección). Las abcisas de los puntos de intersección las hallamos resolviendo la ecuación

$$\text{sen}\,2x=\cos x \Rightarrow 2\,\text{sen}\,x\cos x=\cos x$$

$$\Rightarrow \cos x(2\,\text{sen}\,x-1)=0$$

$$\cos x=0 \Rightarrow x=...\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2};\frac{5\pi}{2};...\text{ ó}$$

$$\text{sen}x=\frac{1}{2} \Rightarrow x=...\frac{\pi}{6};\ \frac{5\pi}{6}$$

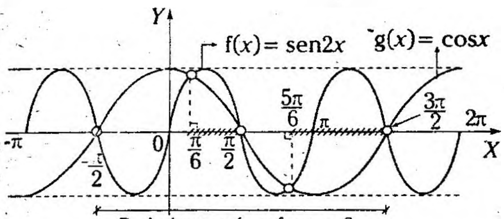


Figura 8.15

Como el menor periodo común de $f(x)$ y $g(x)$ es 2π, bastará con resolver por ejemplo en el segmento desde $\frac{-\pi}{2}$ hasta $\frac{3\pi}{2}$;(véase figura 8.15)

donde la solución es $\left\langle\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{2}\right\rangle\cup\left\langle\frac{5\pi}{6};\frac{3\pi}{2}\right\rangle$

Por lo tanto, la solución general de la inecuación $\text{sen}\,2x>\cos x$, será

$$\left\langle\frac{\pi}{6}+2k\pi;\frac{\pi}{2}+2k\pi\right\rangle\cup\left\langle\frac{5\pi}{6}+2k\pi;\frac{3\pi}{2}+2k\pi\right\rangle;k\in\mathbb{Z}$$

Problema 14

Resuelva la desigualdad $\text{sen}x>\cos^2x$

Resolución

Para que la desigualdad por resolver esté en términos de $\text{sen}x$, utilizamos la identidad $\cos^2x=1-\text{sen}^2x$, obteniendo la inecuación (equivalente a la anterior)

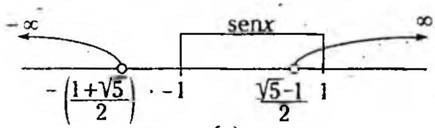
$$\text{sen}x>1-\text{sen}^2x$$

$$\text{sen}^2x+\text{sen}x-1>0$$

Por solución de una inecuación de segundo grado, se obtiene en el primer miembro

$$\left(\text{sen}\,x+\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(\text{sen}\,x-\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)>0$$

Además



(a)

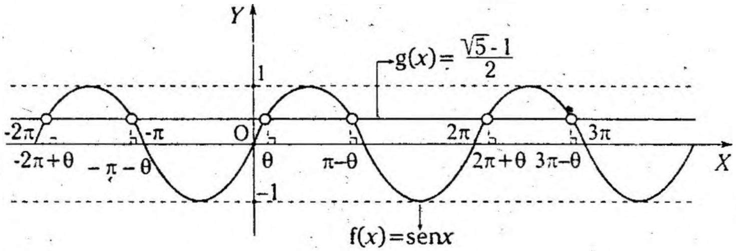
$$\text{sen}\,x<-\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\ \text{ ó }\ \text{sen}x>\frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

Como $-1\leq\text{sen}\,x\leq1$, entonces, intersectando conjuntos

$$\frac{\sqrt{5}-1}{2}<\text{sen}\,x\leq1$$

La solución de la desigualdad anterior que viene a ser la misma solución que la desigualdad inicial, la deducimos de la figura 8.16(b)

$$\left(\theta=\text{arcsen}\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)\right)$$



(b)
Figura 8.16

Por lo tanto, la solución completa de la desigualdad inicial será $\langle\theta+2k\pi;\pi-\theta+2k\pi\rangle;k\in\mathbb{Z}$

Como $\theta=\text{arcsen}\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$,

tenemos $\left\langle\text{arcsen}\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)+2k\pi;\ \pi-\text{arcsen}\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)+2k\pi\right\rangle;k\in\mathbb{Z}$

Problema 15

Halle todos los valores de x mayores de cero, pero menores de 2π, para los cuales se cumple la desigualdad $8\text{sen}^2x+2\tan x-\sec^2x\leq 0$

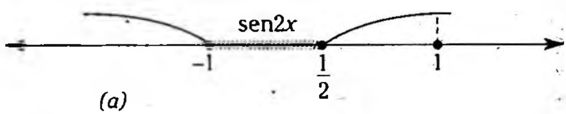
Resolución

$\cos x=0$, no tiene sentido en la desigualdad a resolver, entonces podemos multiplicar a ambos miembros la cantidad positiva $\cos^2x$, obteniendo

$$8\text{sen}^2x\cos^2x+2\text{sen}\,x\cos x-1\leq 0$$

$$2\text{sen}^2 2x+\text{sen}\,2x-1\leq 0$$

utilizando las identidades



(a)

$$(\text{sen}\,2x=2\text{sen}\,x\cos x \quad \text{y} \quad \text{sen}^2 2x=4\text{sen}^2x\cos^2x)$$

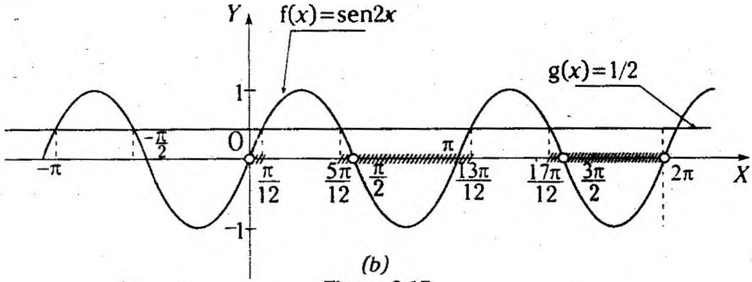
Por solución de una inecuación cuadrática, tenemos $(2\text{sen}\,2x-1)(\text{sen}\,2x+1)\leq 0$

$$\Rightarrow -1\leq\text{sen}2x\leq\frac{1}{2}$$

La inecuación anterior verifica $-1\leq\text{sen}\,2x\leq 1$

Pero en la desigualdad por resolver, se puede verificar fácilmente que $\cos x$ debe ser diferente de cero es decir $x\neq\left\{\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right\}$ (Consideramos estos dos casos ya que del enunciado del problema tenemos $0<x<2\pi$)

Entonces la solución de la desigualdad $-1 \leq \text{sen}2x \leq \frac{1}{2}$ considerando $x \neq \left\{\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right\}$ y $0 < x < 2\pi$, nos dará la solución solicitada. Para esto nos ayudamos de la figura 8.17(b)



(b)

Figura 8.17

Entonces, la solución de la inecuación inicial, considerando

$$0 < x < 2\pi \text{ y } x \neq \frac{\pi}{2};3\frac{\pi}{2}, \qquad \text{será } x = \left\langle 0\,;\, \frac{\pi}{12}\right] \cup \left[\frac{5\pi}{12};\frac{13\pi}{12}\right] \cup \left[\frac{17\pi}{12};2\pi\right\rangle$$

Problema 16

Resuelva la siguiente inecuación

$$\frac{\tan^2 x - \frac{1}{3}}{\sqrt{3} - (\text{sen}x + \cos x)} > 0$$

Resolución

Como el denominador del primer miembro de la inecuación es positivo $\forall \alpha \in \mathbb{R}$. (esto se deduce de la propiedad $-\sqrt{2} \leq \text{sen}x + \cos x \leq \sqrt{2}$, vista en arcos compuestos); entonces el respectivo numerador también deberá ser positivo, por lo tanto resolver la inecuación inicial es lo mismo que resolver la inecuación

$$\tan^2 x - \frac{1}{3} > 0 \Rightarrow \tan^2 x > \frac{1}{3} \Rightarrow \tan x < -\frac{\sqrt{3}}{3} \text{ ó } \tan x > \frac{\sqrt{3}}{3},$$

Las soluciones de las inecuaciones anteriores, las deducimos de la figura

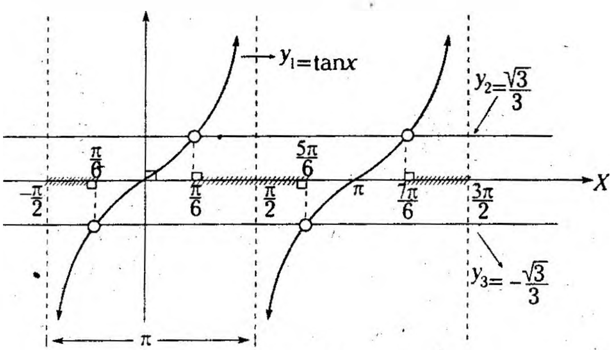


Figura 8.18

Como el periodo de la función $y_1 = \tan x$ es π, bastará con resolver en el segmento desde $\frac{-\pi}{2}$ hasta $\frac{\pi}{2}$, donde la solución es

$$\left\langle -\frac{\pi}{2}+k\pi;\ -\frac{\pi}{6}+k\pi\right\rangle \cup \left\langle \frac{\pi}{6}+k\pi;\ \frac{\pi}{2}+k\pi\right\rangle;k\in\mathbb{Z}$$

Problema 17

Dadas las funciones $f(x)=\operatorname{sen}^5 x-\cos^5 x$

$g(x)=\sec x-\csc x$

Calcule el número de puntos de intersección que existen entre las gráficas de f y g, en el segmento $\langle 0\ ;\ 5\pi\rangle$.

Resolución

Calcular el número de puntos de intersección que existe entre las gráficas de las funciones f y g, es lo mismo que calcular el número de soluciones de la ecuación $f(x) = g(x)$

Es decir $\operatorname{sen}^5 x-\cos^5 x=\sec x-\csc x$...(1)

de los cocientes notables tenemos que $a^5-b^5=(a-b)\left(a^4+a^3b+a^2b^2+ab^3+b^4\right)$

Entonces, en la ecuación (2) tenemos

$$(\operatorname{sen}x-\cos x)\left(\operatorname{sen}^4 x+\operatorname{sen}^3 x\cos x+\operatorname{sen}^2 x\cos^2 x+\operatorname{sen}x\cos^3 x+\cos^4 x\right)=\frac{1}{\cos x}-\frac{1}{\operatorname{sen}x}$$

$$(\operatorname{sen}x-\cos x)\left(\operatorname{sen}^4 x+\cos^4 x+\operatorname{sen}^3 x\cos x+\operatorname{sen}x\cos^3 x+\operatorname{sen}^2 x\cos^2 x\right)=\frac{(\operatorname{sen}x-\cos x)}{\cos x\operatorname{sen}x}$$

Pasando el segundo miembro al primer miembro, y transformando en factores, tenemos

$$(\operatorname{sen}x-\cos x)\left[1-2\operatorname{sen}^2 x\cos^2 x+\operatorname{sen}x\cos x+\operatorname{sen}^2 x\cos^2 x-\frac{1}{\operatorname{sen}x\cos x}\right]=0$$

$$(\operatorname{sen}x-\cos x)\left[\frac{\operatorname{sen}x\cos x-\operatorname{sen}^3 x\cos^3 x+\operatorname{sen}^2 x\cos^2 x-1}{\operatorname{sen}x\cos x}\right]=0$$

$$(\operatorname{sen}x-\cos x)\left[\frac{\operatorname{sen}x\cos x\left(1-\operatorname{sen}^2 x\cos^2 x\right)-\left(1-\operatorname{sen}^2 x\cos^2 x\right)}{\operatorname{sen}x\cos x}\right]=0$$

$$(\operatorname{sen}x-\cos x)\left[\frac{\left(1-\operatorname{sen}^2 x\cos^2 x\right)(\operatorname{sen}x\cos x-1)}{\operatorname{sen}x\cos x}\right]=0$$

Igualando cada factor del numerador a cero, tenemos

$$\tan x = 1;\ \operatorname{sen} 2x \cos 2x = 1;\ \operatorname{sen} x \cos x = 1$$

Como es sabido

$$-\frac{1}{2} \leq \operatorname{sen} x \cos x \leq \frac{1}{2}$$,entonces solo consideramos la ecuación $\tan x = 1$

Las soluciones de la ecuación anterior serán las soluciones de la ecuación $f(x)=g(x)$, entonces considerando $0 < x < 5\pi$, tendremos que estas soluciones son

$$x = \pi/4\ ;\ 5\pi/4\ ;\ 9\pi/4\ ;\ 13\pi/4\ ;\ 17\pi/4 \quad \ldots \text{(5 soluciones)}$$

Por lo tanto, el número de puntos de intersección pedido será 5

Problema 18

Calcule el número de soluciones de la ecuación $\operatorname{sen}2x=2^x$; que satisfagan $-2\pi \leq x \leq 2\pi$

Resolución

Al graficar las funciones $f(x)=\operatorname{sen}2x$ y $g(x)=2^x$, por cada punto de intersección de estas gráficas se tendrá una solución de la ecuación $\operatorname{sen}2x=2^x$. (Ver figura 8.19)

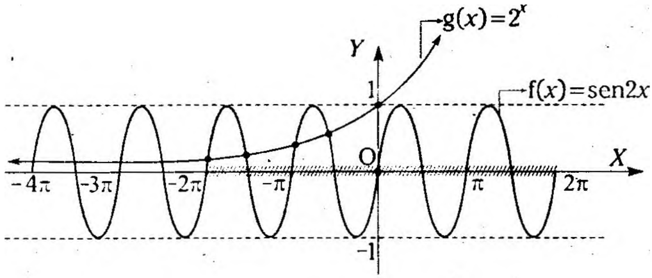


Figura 8.19

De la figura 8.19 anterior, como el número de puntos de intersección entre las gráficas de f y g son cuatro; entonces por lo expuesto, el número de soluciones de la ecuación $\operatorname{sen}2x=2^x$ que satisfacen $-2\pi \leq x \leq 2\pi$, será también cuatro.

Problema 19

Calcule el número y suma de soluciones, de la ecuación

$$9\operatorname{sen}\frac{x}{2} - \frac{x}{2} = 0$$

Resolución

La ecuación planteada es equivalente a

$$\operatorname{sen}\frac{x}{2} = \frac{x}{18}$$

Para hallar el número de soluciones, graficamos las funciones $f(x)=\text{sen}\frac{x}{2}$ y $g(x)=\frac{x}{18}$ (ver figura 8.20)

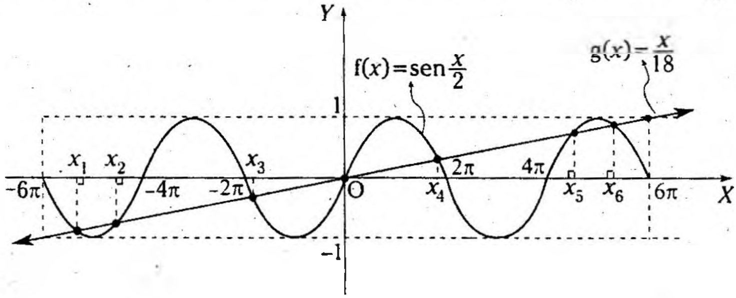


Figura 8.20

De la figura 8.20, el número de soluciones de la ecuación propuesta será siete; ya que existen siete puntos de intersección entre las gráficas de las funciones f y g.

Nótese además que las soluciones x_1, x_2 y x_3 son simétricas respectivamente con las soluciones x_4; x_5 y x_6, con respecto al origen, entonces $x_4=-x_3$; $x_5=-x_2$; $x_6=-x_1$

Por lo tanto, la suma de soluciones será cero.

Observación

Calcular específicamente las soluciones de las ecuaciones planteadas en los problemas 18 y 19 no es posible mediante métodos planteados en este capítulo. Más adelante, en el tema de derivadas trigonométricas, se hallarán las soluciones de este tipo de ecuaciones, mediante aproximaciones (métodos numéricos).

Problema 20

Resuelva la ecuación algebraica $x^3-12x+8=0$

Resolución

De las identidades del arco triple, tenemos

$$\text{sen}3\theta=3\text{sen}\theta-4\text{sen}^3\theta$$

Entonces

$$4\text{sen}^3\theta-3\text{sen}\theta+\text{sen}3\theta=0$$

$$\text{sen}^3\theta-\frac{3}{4}\text{sen}\theta+\frac{1}{4}\text{sen}3\theta=0 \quad ...(1)$$

Asumiendo que $x=a\,\text{sen}\theta$, donde $a>0$

Entonces en la ecuación a resolver, tenemos

$$a^3\text{sen}^3\theta-12a\text{sen}\theta+8=0$$

Dividiendo ambos miembros por a^2, tenemos

$$\text{sen}^3\theta-\frac{12}{a^2}\text{sen}\theta+\frac{8}{a^3}=0 \quad ...(2)$$

Si las ecuaciones (1) y (2) son idénticas tendremos

$$\frac{12}{a^2}=\frac{3}{4}\text{; donde } a=4$$

$$\frac{1}{4}\text{sen}3\theta=\frac{8}{a^3}=\frac{8}{4^3}\text{, de donde}$$

$$\text{sen}3\theta=\frac{1}{2}\Rightarrow 3\theta=k(180°)+(-1)^k30°;\ k\in\mathbb{Z}$$

$$\text{ó}\quad \theta=k(60°)+(-1)^k10° \quad ...(3)$$

Nota

Por álgebra, la discriminante de la ecuación cúbica

$x^3 + px + q = 0$ es $\Delta = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3$; entonces

Si $\Delta < 0$, la ecuación tiene tres soluciones reales

Si $\Delta = 0$, la ecuación tiene tres soluciones reales pero dos conjugadas

Si $\Delta > 0$, la ecuación tiene una solución real y dos soluciones complejas conjugadas

Según la nota, la ecuación

$$x^3 - 12x + 8 = 0$$

tiene tres soluciones reales, ya que

$$\Delta = \left(\frac{8}{2}\right)^2 + \left(\frac{-12}{3}\right)^3 = -48 < 0$$

Como

$$x = a\,\text{sen}\,\theta = 4\,\text{sen}\,\theta \text{ (ya que a=4)}$$

tendremos que encontrar tres valores diferentes para $\text{sen}\,\theta$

Asignando en (3), a k los valores 0, 1, 2, 3, 4, obtenemos

$$\theta = 10°;\ \theta = 50°;\ \theta = 130°;$$
$$\theta = 170°;\ \theta = 250°$$

y así sucesivamente asignando a k los valores 5, 6, 7...

Se comprobará fácilmente que los valores de $\text{sen}\,\theta$ son iguales a una de las tres cantidades siguientes: $\text{sen}\,10°$; $\text{sen}\,50°$; $-\text{sen}\,70°$

Por lo tanto, las soluciones de la ecuación inicial son $4\text{sen}10°$; $4\text{sen}50°$, $-4\text{sen}70°$

Como algo adicional, la ecuación $x^3-12x+18=0$ es equivalente a $x^3+8=12x$

Entonces graficando las funciones $f(x)= x^3+8$ y $g(x)=12x$, se notará que estas gráficas tienen tres puntos de intersección que corresponden a las tres soluciones reales que se halló para la ecuación inicial (véase figura 8.21)

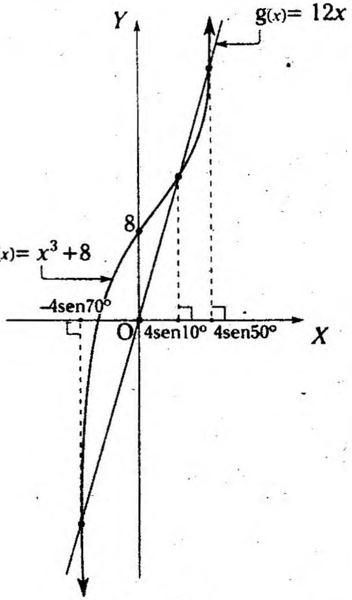


Figura 8.21

Problema 21

Resuelva la ecuación trigonométrica

$$\cot x = 2\cos\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$$

Resolución

Para reducir la ecuación anterior, realizando cambio de variable $\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4} = \theta$ ...(I)

ahora $x = \frac{\pi}{2} + 2\theta$

Reemplazando en la ecuación inicial

$$\cot\left(\frac{\pi}{2} + 2\theta\right) = 2\cos\theta$$

$$\Rightarrow -\tan 2\theta = 2\cos\theta$$

$$\Rightarrow -\frac{\operatorname{sen}2\theta}{\cos 2\theta}=2\cos\theta$$

$$\Rightarrow \frac{2\operatorname{sen}\theta\cos\theta}{\cos 2\theta}+2\cos\theta=0$$

$$\Rightarrow \frac{2\cos\theta(\operatorname{sen}\theta+\cos 2\theta)}{\cos 2\theta}=0;\ \cos 2\theta\neq 0$$

$$\Rightarrow 2\theta\neq(2n+1)\frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \cos\theta=0 \vee \operatorname{sen}\theta+\underbrace{\cos 2\theta}=0;\ \theta\neq(2n+1)\frac{\pi}{4};n\in\mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow \cos\theta=0 \quad \vee \quad \operatorname{sen}\theta+1-2\operatorname{sen}^2\theta=0$$

De la primera ecuación $\theta=(2k+1)\frac{\pi}{2}$ ...(1); $k\in\mathbb{Z}$

De la segunda ecuación $2\operatorname{sen}^2\theta-\operatorname{sen}\theta-1=0$

$$(2\operatorname{sen}\theta+1)(\operatorname{sen}\theta-1)=0$$

$$\operatorname{sen}\theta=\frac{1}{2} \wedge \operatorname{sen}\theta=1$$

$$\theta=k\pi+(-1)^k\left(\frac{-\pi}{6}\right)...(2)\ ;\ \theta=\frac{\pi}{2}+2k\pi\ ...(3)$$

Luego, regresando a la variable angular x

$$(1)\text{ en }(I) \Rightarrow x=2k\pi+\frac{3\pi}{2}$$

$$(2)\text{ en }(I) \Rightarrow x=2k\pi+\frac{\pi}{2}-(-1)^k\frac{\pi}{3}$$

$$(3)\text{ en }(I) \Rightarrow x=4k\pi+\frac{3\pi}{2}\ ;$$

Donde $k\in\mathbb{Z}$

Problema 22

Halle el número de soluciones para la siguiente ecuación $|\log(\operatorname{sen}x)|=e^{-\operatorname{sen}x};\ \forall x\in\langle 0;3\pi\rangle$

Resolución

$$|\log(\operatorname{sen}x)|=e^{-\operatorname{sen}x}\ ...(I)$$

Hacemos corresponder las siguientes funciones

$f(x)=\log(\operatorname{sen}x)$ ... (2)

$g(x)=|\log(\operatorname{sen}x)|$ ... (3)

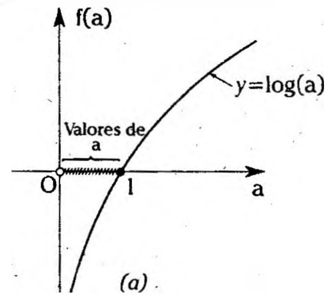
$h(x)=e^{-\operatorname{sen}x}$ ... (4)

De (2): $f(x)=\log\big(\underbrace{\operatorname{sen}x}_{a}\big)=\log a$ . . . (5)

Pero $0<\operatorname{sen}x\leq 1\Rightarrow 0<a\leq 1$

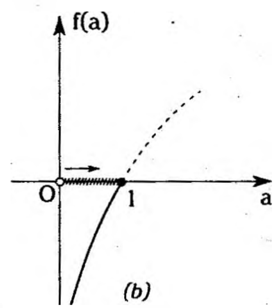
De(5) $f(x)=\log a$

$\Rightarrow$ $f(a)=\log(a)$; dibujando la función logarítmica (Véase figura 8.22(a))



(a)

Se observa que
Si a toma valores ascendentes desde 0 hasta 1, l gráfica de la función sería



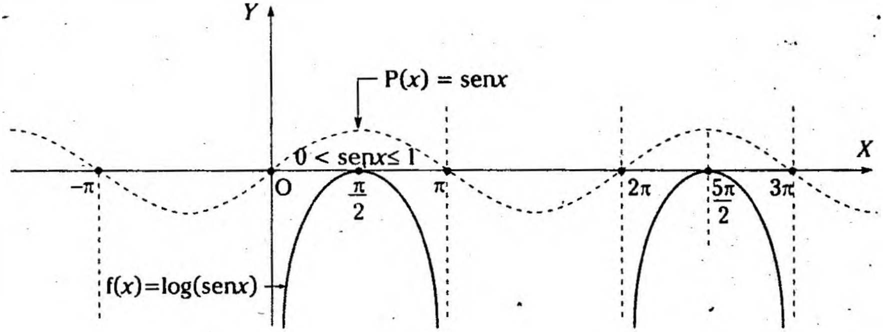
(b)

Planteando una tabulación en $Y=\log(\operatorname{sen}x)$ par el intervalo $0<x<\pi$

X	Y
$\pi/6$	$\log(1/2)$
$\pi/4$	$\log(\sqrt{2}/2)$
$\pi/3$	$\log(\sqrt{3}/2)$
$\pi/2$	0
$2\pi/3$	$\log(\sqrt{3}/2)$
$3\pi/4$	$\log(\sqrt{2}/2)$
$5\pi/6$	$\log(1/2)$

Observe que si x va de 0 a $\frac{\pi}{2} \Rightarrow$ la gráfica es de la forma creciente como se presenta en la figura 8.22(c)

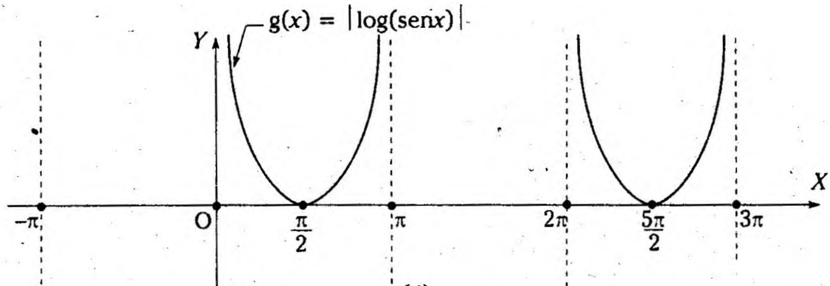
Observe que si x va de $\frac{\pi}{2}$ a $\pi \Rightarrow$ la gráfica es de la forma decreciente



(c)

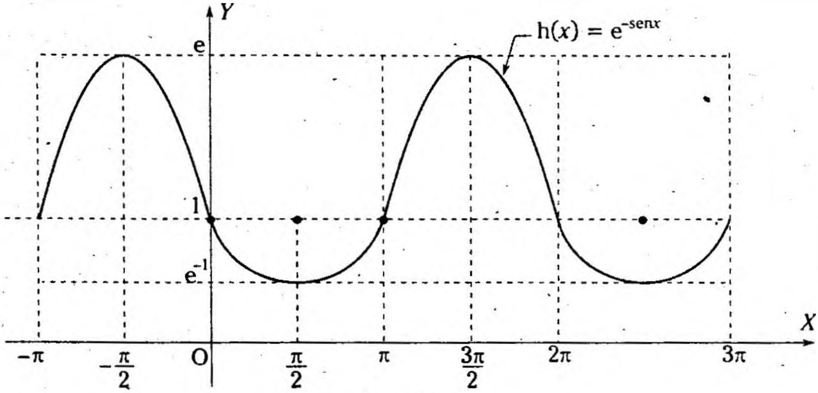
Nótese que la gráfica de $f(x)=\log(\text{sen}x)$ no está definida cuando $-1 \le \text{sen}\,x < 0$; es decir esta función no estará definida si $x \in$ IIIC, IVC o es un arco de la forma $(4k+3)\frac{\pi}{2}$; $k \in \mathbb{Z}$ ya que el logaritmo de un número negativo no está definido en el conjunto de los números reales; expuesto lo anterior no se realizará ningún gráfico en el intervalo cuya forma general es $\langle(2k-1)\pi;\ 2k\pi\rangle$; $k \in \mathbb{Z}$.

A partir de la figura 8.22(c) obtenemos la función $g(x)=|\log \text{sen}x|$ por simetría respecto del eje X, entonces la gráfica a obtener, teniendo en cuenta la simetría será la mostrada en la figura 8.22(d).



(d)

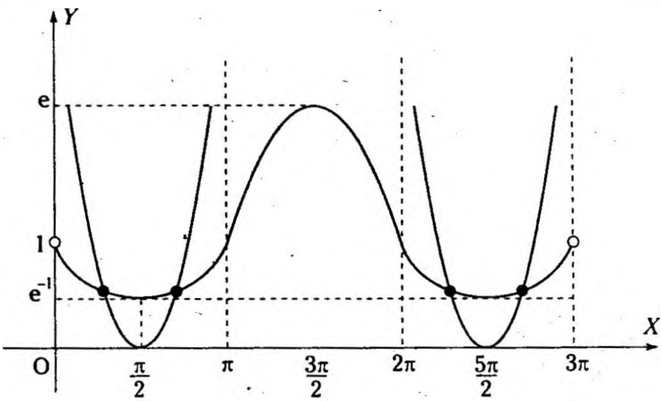
Seguidamente presentamos la gráfica de la función h (Véase figura 8.22(e)).



(e)

Luego, dada la ecuación $\underbrace{\log(\operatorname{sen}x)}_{g(x)}=\underbrace{e^{-\operatorname{sen}x}}_{h(x)}$

Gráficamente el número de soluciones quedará indicado por el número de puntos de corte entre ambas funciones en el intervalo $\langle 0;3\pi\rangle$, para ello observe la figura 8.22(f).



(f)

Figura 8.22

Como puede apreciar hay 4 puntos de intersección.

∴ Hay 4 soluciones

Problemas Propuestos

Resuelva las siguientes ecuaciones:

1. $\text{sen}2x - \text{sen}^2 45° = 0$

2. $\tan 4x = \cos\frac{\pi}{2}$

3. $\cos\frac{x}{6} = 1$

4. $\text{sen}\left(4x + \frac{\pi}{4}\right) = 1$

5. $\tan\left(\frac{x}{3} - \frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$

6. $\cot x = 4 - \tan x$

7. $6\,\text{sen}\,x - 8\,\text{sen}^3 x - \text{sen}^3\frac{3\pi}{2} = 0$

8. $\text{sen}^4 x + \cos^4 x = \frac{1}{2}$

9. $\cos^4 3x - \text{sen}^4 3x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

10. $\text{sen}\,2x + \cos 2x = \sqrt{2}$

11. $2\cos^2 x = 3\,\text{sen}x$

12. $\text{sen}7x - 4\,\text{sen}3x = \text{sen}x$

13. $3\tan x = \tan 2x;\ x \neq k\pi$

14. $3\tan^2 x - 16\,\text{sen}^2 x + 3 = 0$

15. $11 + \cos 2x = 6(1 - \cos x)$

16. $\cos x + \cos 2x + \cos 3x = 3$

17. $\log(\text{sen}x) = 1 - \text{sen}x$

18. $2^{\tan x + \cot x} = 4\cos 2\pi$

19. $\sec x \csc x = \tan x + \cot x$

20. $4\,\text{sen}x\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{3} - x\right)\text{sen}\left(\frac{\pi}{3} + x\right) = \text{sen}\,3x$

21. $\tan x = \text{sen}x \sec x$

22. Al resolver, $\text{sen}x + \cos 2x = 1$; dé como respuesta la suma de soluciones para $x \in \langle 0; 2\pi\rangle$.

A) π B) 2π C) 3π

D) 4π E) $5\frac{\pi}{2}$

23. Al resolver la ecuación

$$\text{sen}x + \text{sen}2x + \text{sen}3x = 0$$

indique $|x_1 - x_2|$ siendo x_1 y x_2 las dos menores soluciones positivas de la ecuación.

A) $\frac{\pi}{3}$ B) $\frac{\pi}{6}$ C) $\frac{\pi}{4}$

D) $\frac{\pi}{12}$ E) $\frac{\pi}{8}$

24. Para qué valor de x, en el segundo cuadrante, se verifica la ecuación.

$$\tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\tan\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \cot x$$

A) $\frac{5\pi}{6}$ B) $\frac{2\pi}{3}$ C) $\frac{3\pi}{4}$

D) $\frac{6\pi}{7}$ E) $\frac{11\pi}{12}$

25. Resuelva $\tan 3x + \cot x = \tan x + \cot 3x$. Indique las tres primeras soluciones positivas.

A) $\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}$ B) $\frac{\pi}{3}; \frac{5\pi}{4}; \frac{5\pi}{6}$ C) $\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}; \frac{5\pi}{4}$

D) $\frac{\pi}{4}; \frac{5\pi}{4}; \frac{7\pi}{4}$ E) $\frac{3\pi}{4}; \frac{5\pi}{4}; \frac{7\pi}{4}$

26. Indique el menor ángulo positivo que verifica la ecuación.

$$\cos\frac{x}{4}+\cos\frac{x}{5}+3\cos\frac{x}{10}+3\cos\frac{x}{20}=0$$

A) $\frac{\pi}{12}$ B) $\frac{\pi}{24}$ C) $\frac{20\pi}{3}$

D) $\frac{20\pi}{5}$ E) $\frac{20\pi}{7}$

27. Halle la solución general de

$3\tan 2x-4\tan 3x=\tan^2 3x\tan 2x$, donde $k\in\mathbb{Z}$

A) $k\pi\pm\arccos\left(\frac{\sqrt{10}}{12}\right)$

B) $k\pi\pm\arccos\left(\frac{\sqrt{10}}{4}\right)$

C) $k\pi\pm\arccos\left(\frac{\sqrt{10}}{8}\right)$

D) $2k\pi\pm\arccos\left(\frac{1}{4}\right)$

E) $k\pi\pm\arccos\left(\frac{1}{4}\right)$

28. Si $\tan x$, $\tan 3x$, $\tan 4x$ están en progresión aritmética, halle la suma de valores de x en el intervalo $\left\langle 0;\frac{\pi}{2}\right\rangle$.

A) $\frac{\pi}{3}$ B) $\frac{\pi}{6}$ C) $\frac{\pi}{2}$

D) $\frac{2\pi}{3}$ E) $\frac{5\pi}{6}$

29. Al resolver la ecuación

$\cos^2 x+5|\operatorname{sen}x|\cos x=3$

indique el número de soluciones si $x\in\langle 0;2\pi\rangle$.

A) 1 B) 2 C) 3

D) 4 E) 5

30. Halle una solución de

$\cos(x-a)\cos(x-b)=\operatorname{sen}a\operatorname{sen}b+\cos x\cos c$

A) a–b–c

B) a+b–c

C) a+b+c

D) a+2b+c

E) 2|a+b+c|

31. Resuelva $\tan x+\tan 2x+\tan 3x=0$

Indique un conjunto solución, $k\in\mathbb{Z}$.

A) $\frac{k\pi}{2}$ B) $\frac{k\pi}{6}$ C) $\frac{k\pi}{12}$

D) $\frac{k\pi}{3}$ E) $(2k+1)\frac{\pi}{8}$

32. Resuelva

$$\csc x+\csc\left(\frac{2\pi}{3}+x\right)+\csc\left(\frac{4\pi}{3}+x\right)=6\,;\,k\in\mathbb{Z}$$

A) $\frac{k\pi}{3}+(-1)^k\frac{\pi}{3}$

B) $\frac{k\pi}{3}+(-1)^k\frac{\pi}{6}$

C) $\frac{k\pi}{3}+(-1)^k\frac{\pi}{12}$

D) $\frac{k\pi}{3}+(-1)^k\frac{\pi}{18}$

E) $\frac{k\pi}{3}+(-1)^k\frac{\pi}{15}$

33. Al resolver la siguiente ecuación

$$(1+\cos 2\theta)\tan x=\cos 2\theta\tan 2x;\ 0<\theta<\frac{\pi}{2}$$

indique la suma de las soluciones positivas menores a una vuelta.

A) π B) 2π C) 3π

D) 4π E) 5π

34. Calcule la mayor solución negativa de

$$\tan x=\tan\left(x+\frac{\pi}{18}\right)\tan\left(x+\frac{\pi}{9}\right)\tan\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$$

A) $-\frac{\pi}{9}$ B) $-\frac{2\pi}{9}$ C) $-\frac{4\pi}{9}$

D) $-\frac{5\pi}{9}$ E) $-\frac{17\pi}{36}$

35. Resuelva la ecuación

$$\frac{a^2}{1-\tan^2 x}=\frac{\operatorname{sen}^2 x+a^2-2}{\cos 2x}\text{; donde } k\in\mathbf{Z}.$$

A) $k\pi\pm\frac{1}{2}\arccos\left(\frac{a^2-3}{a^2+1}\right)$

B) $2k\pi\pm\frac{1}{2}\arccos\left(\frac{a^2-3}{a^2+1}\right)$

C) $k\pi\pm\frac{1}{2}\operatorname{arcsen}\left(\frac{a^2+3}{a^2-1}\right)$

D) $2k\pi\pm\operatorname{arcsen}\left(\frac{a^2-3}{a^2+1}\right)$

E) $k\pi\pm\arctan\left(\frac{a^2-3}{a^2+1}\right)$

36. ¿Qué relación debe existir entre a, b, c y d para que la ecuación

$$a\operatorname{sen}^4 x+\frac{b}{4}\operatorname{sen}^2 2x+c\cos^4 x=d$$

admita soluciones reales?

A) $a^2\geq 4(ba+ac-ac-dc)$

B) $c^2\geq 4(ac+ad+dc+bd)$

C) $b^2\geq 4abc$

D) $a^2\geq 4(ac+ad+dc+bd)$

E) $b^2\geq 4(ac+ad+dc+bd)$

37. Resuelva $\tan^2 2x=3\cos\alpha$
(x: variable; α constante)

A) $\frac{k\pi}{2}-\frac{1}{2}\arctan\sqrt{3\operatorname{sen}\alpha}$

B) $k\pi\pm\arctan\sqrt{3\cos\alpha}$

C) $k\pi-\arctan\sqrt{3\cos\alpha}$

D) $k\pi+\arctan\sqrt{3\operatorname{sen}\alpha}$

E) $\frac{k\pi}{2}\pm\frac{1}{2}\arctan\sqrt{3\cos\alpha}$

38. Dada la función $f(x)=\cos x+\operatorname{sen}3x$, halle el número de puntos de corte de la gráfica de dicha función con el eje de abscisas en $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$.

A) 3 B) 4 C) 5

D) 6 E) 2

39. Calcule la suma de soluciones de la siguiente ecuación perteneciente al intervalo $\left\langle 0;\frac{\pi}{2}\right\rangle$

$$\frac{\cos^3 x+\cos^3 3x+\cos^3 9x}{\cos x+\cos 3x+\cos 9x}=1$$

A) 2π B) π C) $\frac{81\pi}{26}$

D) $\frac{27\pi}{26}$ E) $\frac{61\pi}{26}$

40. Resuelva $x^3-3x-1=0$.

A) $2\cos 20°$; $2\cos 40°$; $2\cos 80°$

B) $\frac{1}{2}\cos 20°$; $\frac{1}{2}\cos 100°$; $\cos 80°$

C) $\cos 20°$; $\cos 40°$; $\cos 80°$

D) $2\cos 20°$; $2\cos 100°$; $2\cos 140°$

E) $\cos 220°$; $\cos 240°$; $\cos 280°$

41. Calcule el número de soluciones de la ecuación

$3\operatorname{sen}2x-\frac{2}{3}=0$, en el intervalo de $\left\langle 0;\frac{\pi}{2}\right\rangle$

A) 0 B) 1 C) 2
D) 3 E) 4

42. Encuentre el número de soluciones de la ecuación

$$3^{x}=|\cos x| \ ; \ x\in\langle-\pi;\pi\rangle$$

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

43. Al resolver la siguiente ecuación trigonométrica

$|\csc^{5}4\theta|-2|\csc^{4}4\theta|-4|\csc 4\theta|+8=0$

indique la suma de soluciones en el intervalo $\left\langle -\frac{\pi}{3};\frac{7\pi}{3}\right\rangle$.

A) 18π B) 22π C) 21π
D) 23π E) 24π

44. Al resolver la siguiente ecuación
$|x|^{3}=\arccos(\cos 2002x)$
determine el número de soluciones.

A) 1963 B) 1964 C) 1965
D) 1966 E) 1967

45. Halle la diferencia entre la solución principal y la mayor solución negativa que verifica la siguiente ecuación trigonométrica:

$$\operatorname{sen}x\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}-x\right)=\operatorname{sen}x+\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}-x\right)$$

A) $\frac{3\pi}{4}$ B) $\frac{2\pi}{3}$ C) $\frac{7\pi}{6}$

D) $\frac{5\pi}{4}$ E) $\frac{4\pi}{3}$

46. Resuelva

$$\begin{cases}\operatorname{sen}x\cos y=\frac{3}{4} & \text{....(1)}\\ x+y=\frac{\pi}{2} & \text{....(2)}\end{cases}$$

$k\in\mathbb{Z}$.

A) $x=k\pi+\frac{\pi}{3}$, $y=\frac{\pi}{6}-k\pi$

B) $x=k\pi+\frac{\pi}{6}$, $y=k\pi-\frac{\pi}{3}$

C) $x=k\pi+\frac{\pi}{3}$, $y=\frac{\pi}{4}-k\pi$

D) $x=2k\pi+\frac{\pi}{3}$, $y=\frac{\pi}{6}-2k\pi$

E) $x=4k\pi+\frac{\pi}{1\ldots}$, $y=\frac{5\pi}{12}-4k\ldots$

47. Halle x del sistema $(k\in\mathbb{Z})$

$$\begin{cases}\sec x+\sec y=1\\ x+y=\frac{4\pi}{3}\end{cases}$$

A) $2k\pi\pm\frac{\pi}{3}+\frac{2\pi}{3}$ B) $k\pi\pm\frac{\pi}{3}$

C) $(2k+1)\pi$

D) $2k\pi+\frac{\pi}{6}$ E) $k\pi+\frac{\pi}{6}$

48. Resuelva e indique un conjunto solución para

$$\begin{cases}\operatorname{sen}x=\cos 2y\\ \tan x=\tan^{3}y\end{cases}$$

$k\in\mathbb{Z}$.

A) $k\pi+\frac{\pi}{4}$ B) $k\pi+\frac{\pi}{3}$

C) $k\pi\pm\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

D) $k\pi+\frac{\pi}{12}$ E) ϕ

49. Siendo x e y ángulos agudos, resuelva

$$\frac{1}{2}\operatorname{sen}^2 x-\operatorname{sen}^2\left(\frac{y}{2}\right)=0$$
$$\tan x+\sec^2 y=5$$

A) $\left\{\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{6}\right\}$ B) $\left\{\frac{4\pi}{9};\frac{\pi}{6}\right\}$ C) $\left\{\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{3}\right\}$

D) $\left\{\frac{\pi}{7};\frac{2\pi}{3}\right\}$ E) $\left\{\frac{\pi}{5};\frac{2\pi}{9}\right\}$

50. Al resolver

$$y=\operatorname{sen}x;\ -3\pi\leq x\leq 5\pi$$

$$(x-2\pi k)^2+y^2=\pi^2;\ k\in\mathbb{Z},$$

indique el número de pares ordenados que cumplen dicho sistema.

A) 2 B) 3 C) 4
D) 5 E) 6

51. Resuelva el sistema de ecuaciones

$x-y=a$ .... (1)
$2(\cos 2x+\cos 2y)=1+4\cos^2(x-y)$ .... (2)

señale como respuesta x.

A) $k\pi\pm\frac{1}{2}\arccos\left(\frac{1+4\cos^2 a}{4\cos a}\right)+\frac{a}{2}$; $k\in\mathbb{Z}$

B) $k\pi\pm\arccos\left(\frac{1+4\cos^2 a}{\cos a}\right)+\frac{a}{2}$; $k\in\mathbb{Z}$

C) $2k\pi\pm\arccos(1+4\cos^2 a)+a$; $k\in\mathbb{Z}$

D) $k\pi\pm\arctan(4\cos^2 a+1)+\frac{a}{2}$; $k\in\mathbb{Z}$

E) $k\pi\pm\frac{1}{4}\arccos\left(\frac{1+2\cos^2 a}{4\cos a}\right)+\frac{a}{2}$; $k\in\mathbb{Z}$

52. Resuelva

$$\frac{\operatorname{sen}x}{\operatorname{sen}x-1}<0\ ;\ k\in\mathbb{Z}.$$

A) $\left\langle(4k+3)\frac{\pi}{2};4k\pi\right\rangle$

B) $\left\langle(2k+1)\pi;(4k+3)\frac{\pi}{2}\right\rangle$

C) $\left\langle 2k\pi;(4k+1)\frac{\pi}{3}\right\rangle$

D) $\left\langle k\pi;(4k+3)\frac{\pi}{2}\right\rangle$

E) $\left\langle 2k\pi;(2k+1)\pi\right\rangle-\left\{\frac{\pi}{2}+2k\pi\right\}$

53. Resuelva la siguiente inecuación:

$2\operatorname{sen}x-\sec x\geq 0$ para $x\in\langle 0;\pi\rangle$

A) $\left\langle\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right\rangle$ B) $\left\langle\frac{\pi}{2};\pi\right\rangle\left\langle\frac{\pi}{4}\right\rangle$ C) $\left\langle\frac{\pi}{4};\frac{3\pi}{4}\right\rangle$

D) $\left\langle\frac{\pi}{7};\frac{6\pi}{7}\right\rangle$ E) $\left\langle\frac{\pi}{3};\frac{2\pi}{3}\right\rangle$

54. Resuelva $\operatorname{sen}2x+\operatorname{sen}x>\cos 2x+\cos x$ siendo $x\in[0;\pi]$.

A) $\left[0;\frac{\pi}{6}\right]\cup\left[\frac{5\pi}{6};\pi\right]$ B) $\left[0;\frac{\pi}{6}\right\rangle\cup\left\langle\frac{5\pi}{6};\pi\right]$

C) $\left\langle 0;\frac{\pi}{3}\right\rangle\cup\left\langle\frac{2\pi}{3};\pi\right\rangle$

D) $\left[0;\frac{\pi}{4}\right\rangle\cup\left\langle\frac{3\pi}{4};\pi\right]$ E) $\left\langle\frac{\pi}{6};\frac{5\pi}{6}\right\rangle$

55. Resuelva la siguiente inecuación trigonométrica: $\cos^2 2x+\cos^2 x\leq 1$; si $k\in\mathbb{Z}$.

A) $\left[\frac{\pi}{3};\frac{2\pi}{3}\right]$ B) $\left[\frac{\pi}{6}+k\pi;\frac{5\pi}{6}+k\pi\right]$

C) $\left[\frac{\pi}{3}+2k\pi;\frac{2\pi}{3}+2k\pi\right]$

D) $\left\langle\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{2};\frac{5\pi}{6}+\frac{k\pi}{2}\right\rangle$ E) $\left\langle\frac{\pi}{4}+k\pi;\frac{5\pi}{4}+k\pi\right\rangle$

56. Halle el conjunto que cumple la siguiente desigualdad sen$4x$ > 4sen$x$sen$2x$sen$3x$,

$$\forall\, x \in \left\langle -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right\rangle$$

A) $\left\langle -\frac{\pi}{2}; 0 \right\rangle \cup \left\langle -\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2} \right\rangle$

B) $\left\langle -\frac{\pi}{2}; -\frac{\pi}{3} \right\rangle \cup \left\langle 0; \frac{\pi}{3} \right\rangle$

C) $\left\langle \frac{-3\pi}{8}; -\frac{\pi}{8} \right\rangle \cup \left\langle 0; \frac{\pi}{8} \right\rangle \cup \left\langle \frac{3\pi}{8}; \frac{\pi}{2} \right\rangle$

D) $\left\langle -\frac{\pi}{2}; -\frac{\pi}{3} \right\rangle$

E) $\left\langle -\frac{\pi}{2}; -\frac{\pi}{6} \right\rangle \cup \left\langle 0; \frac{\pi}{6} \right\rangle$

57. Halle el conjunto de valores para x que cumple con la siguiente desigualdad:
$\operatorname{sen}2x - \operatorname{sen}3x \geq 0$; para $x \in \langle -\pi; \pi \rangle$.

A) $\left\langle -\pi; -\frac{3\pi}{5} \right] \cup \left[-\frac{\pi}{5}; 0 \right] \cup \left[\frac{\pi}{5}; \frac{3\pi}{5} \right\rangle$

B) $\left\langle -\pi; -\frac{3\pi}{5} \right] \cup \left[-\frac{\pi}{5}; 0 \right] \cup \left[\frac{\pi}{5}; \frac{3\pi}{5} \right]$

C) $\left[-\frac{3\pi}{5}; -\frac{\pi}{5} \right] \cup \left[0; \frac{\pi}{5} \right] \cup \left[\frac{3\pi}{5}; \pi \right\rangle$

D) $\left\langle -\frac{3\pi}{5}; -\frac{\pi}{5} \right\rangle$

E) $\left[-\frac{3\pi}{5}; \pi \right\rangle$

58. Sean $C(x) = \operatorname{sen}x + |\operatorname{sen}x|$

$$V(x) = \begin{cases} \cos x; & \text{si } x \in \langle 0; \pi \rangle \\ \tan x - 1; & \text{si } x \in \langle \pi; 2\pi \rangle \end{cases}$$

luego de resolver $C(x) \geq V(x)$, el conjunto solución será

A) $\left[\arctan\frac{1}{2}; \frac{5\pi}{4} \right] \cup \left\langle \frac{3\pi}{2}; 2\pi \right\rangle - \{\pi\}$

B) $\left[\arctan\frac{1}{2}; \frac{3\pi}{4} \right] \cup \left\langle \frac{3\pi}{2}; \frac{7\pi}{4} \right\rangle$

C) $\left[\arctan\left(\frac{1}{3}\right); \pi \right\rangle \cup \left\langle \pi; \frac{5\pi}{4} \right\rangle$

D) $\left\langle \arctan\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right); \frac{5\pi}{6} \right\rangle \cup \left\langle \frac{5\pi}{4}; \frac{3\pi}{2} \right\rangle$

E) $\langle 0; \pi \rangle \cup \langle \pi; 2\pi \rangle$

59. Determine el conjunto solución en el recorrido de $\left\langle -\frac{2\pi}{9}; \frac{3\pi}{2} \right\rangle$, siendo

$\tan x - 1 + |\cos x| \geq 0$.

A) $x \in \left[0; \frac{\pi}{2} \right\rangle \cup \left[\frac{3\pi}{4}; \frac{3\pi}{2} \right\rangle$

B) $x \in \left\langle 0; \frac{\pi}{2} \right\rangle \cup \left[\pi; \frac{3\pi}{2} \right\rangle$

C) $x \in \left[0; \frac{\pi}{2} \right\rangle \cup \left[\pi; \frac{3\pi}{2} \right\rangle$

D) $x \in \left\langle 0; \frac{\pi}{2} \right\rangle$

E) $x \in \left\langle -\frac{\pi}{4}; 0 \right\rangle \cup \left\langle \pi; \frac{3\pi}{2} \right\rangle$

60. Resuelva si $x \in \langle 0; 2\pi \rangle$

$$\frac{\operatorname{sen}2x - 2}{\cos 2x + 3\cos x - 1} > 0$$

A) $\left\langle \frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6} \right\rangle$ B) $\left\langle \frac{\pi}{6}; \frac{11\pi}{6} \right\rangle$ C) $\left\langle \frac{\pi}{4}; \frac{5\pi}{4} \right\rangle$

D) $\left\langle \frac{\pi}{3}; \frac{5\pi}{3} \right\rangle$ E) $\left\langle \frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4} \right\rangle$

1	A	11	A	21	A
2	D	12	D	22	B
3	B	13	B	23	B
4	E	14	E	24	C
5	C	15	C	25	C
6	A	16	A	26	C
7	D	17	D	27	B
8	B	18	B	28	C
9	E	19	E	29	D
10	C	20	C	30	C

Claves

31	D	41	C	51	A
32	D	42	C	52	E
33	E	43	B	53	B
34	C	44	C	54	E
35	A	45	E	55	B
36	A	46	A	56	C
37	E	47	A	57	B
38	A	48	C	58	A
39	C	49	C	59	C
40	D	50	D	60	D

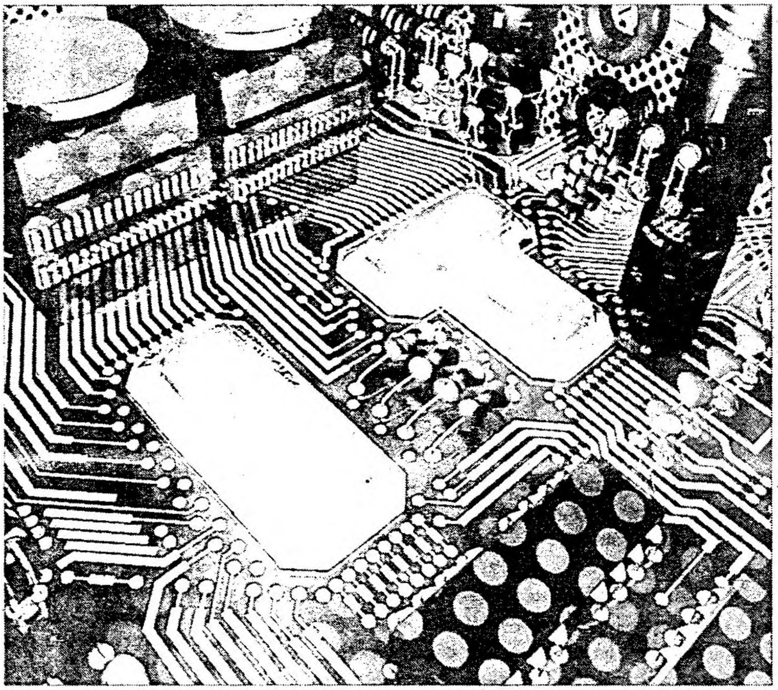
Claves

CAPÍTULO

IX

Números complejos en el análisis trigonométrico

TRIGONOMETRÍA



Sistemas no lineales

Gracias a los descubrimientos de la teoría del caos y la geometría fractal (estudio de los sistemas no lineales) como la climatología, el crecimiento poblacional que son también fractales, los científicos han podido comprender y contribuir significativamente en la capacidad para modelar fenómenos naturales, imágenes digitales, la superactividad y otras aplicaciones electrónicas.

LECTURA

EL APORTE DE RIEMANN A LA MATEMÁTICA



Riemann
(Alemania, 1826 – 1886)

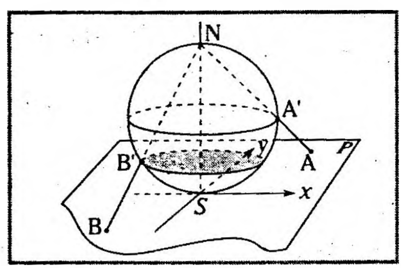
Fue indiscutiblemente uno de los hombres que marcaron el rumbo que tomaría la matemática del siglo XX. Siendo muy joven (1840) estudió las obras de Euler y se cuenta que en menos de una semana dominó el Tratado sobre **Teoría de números de Lagrange**. A los 19 años llegó a la Universidad de Gottingen, siguiendo los deseos paternos decidió estudiar teología y hacerse pastor. Afortunadamente su vocación religiosa se vio pronto sustituida por su atracción por la matemática. La presencia de Gauss hacía de Gottingen el centro de la matemática mundial; sin embargo, Gauss resultaba inaccesible para la mayoría de estudiantes, especialmente los recién llegados, y Riemann después de un año decide trasladarse a la Universidad de Berlín, donde atrajo la atención de Dirichlet y Jacobi, dos años más tarde regresó a Gottingen, donde obtuvo su grado de doctor en 1851. Durante los ocho años siguientes soportó una pobreza debilitante y produjo sus mejores obras. En 1854 fue nombrado **Privatdozent** (sin salario), que en ese tiempo era un paso necesario en la carrera académica. Gauss murió en 1855, y Dirichlet fue llamado a Gottingen para sucederle. Dirichlet ayuda a Riemann al promocionarlo como profesor ayudante. A la muerte de Dirichlet, Riemann le sucedió en su puesto. Para entonces su salud estaba ya destrozada, a los 39 años murió de tuberculosis en Italia.

Su primera publicación fue su célebre disertación de 1851 sobre la **teoría general de funciones de una variable compleja**. Su teoría se basó en lo que hoy llamamos ecuaciones de Cauchy - Riemann (que nos dan condiciones necesarias para que una función de variable compleja sea diferenciable e integrable). Los métodos geométricos de Riemann en análisis complejo constituyeron el origen real de la topología.

Los estudios de Riemann sobre los números complejos le permitieron determinar una representación esférica de dichos números, también llamada **proyección estereográfica** que se puede explicar de la siguiente forma:
Sea P el plano complejo y considérese una esfera unitaria (de radio uno) tangente a $\mathbb{P}$ en Z =0. El diámetro NS es perpendicular a $\mathbb{P}$ y llamamos a los puntos N y S los polos norte y sur. Para cualquier punto A sobre P podemos constituir una recta NA que corta en el punto A'. En este caso, a cada punto del plano complejo $\mathbb{P}$ corresponde uno y solamente un punto de la esfera, y podemos representar cualquier número complejo por un punto sobre la esfera. Para terminar el punto N corresponde al punto en el infinito del plano. El conjunto de todos los puntos en el plano, incluyendo el punto en él infinito, recibe los nombres de **plano complejo entero, el plano entero Z o el plano complejo extendido**.

El método explicado anteriormente para aplicar el plano sobre la esfera se denomina **proyección estereográfica** y la esfera es llamada **esfera de Riemann**.

El método de la proyección estereográfica es utilizado para el mapeo de los relieves o puntos sobre superficies esféricas y proyectarlos sobre un plano para el análisis respectivo, de ello se vale la cartografía y la aeronáutica para analizar superficies de planetas; relieves de astros, etc.



Números complejos en el análisis trigonométrico

OBJETIVOS

- Extender el análisis de los números reales al campo de los números complejos.
- Sentar las bases para el estudio de las funciones de variable compleja.
- Comprender que el estudio de las funciones de variable compleja nos proporciona múltiples aplicaciones en diferentes ramas de la ingeniería.

INTRODUCCIÓN

El estudio de los números reales nos ha permitido resolver problemas matemáticos de diversos tipos. Sin embargo, en la resolución de dichos problemas han surgido a lo largo de la historia expresiones que generaban interrogantes, tal como la igualdad $x^2+1=0$, la cual obviamente no acepta valores reales para x tal que se verifique.

Ante semejante problema era necesario crear un conjunto de números x donde $x^2=-1$, es decir $x=\pm\sqrt{-1}$, y como se observa, dicho número no está contenido en el conjunto de los números reales, por tanto, está contenido en otro al cual llamamos **conjunto de números complejos**; donde $\sqrt{-1}$ lo simbolizamos con i (inicial de imaginario). Luego si $x=i$ o $x=-i$ la ecuación anterior se resuelve.

Entendemos entonces que los números complejos surgieron en matemática a fin de hacer posible la raíz cuadrada de un número negativo, con la invención de este nuevo conjunto de números, ya no fue necesario inventar nuevos números para que tuvieran raíces todas las demás ecuaciones algebraicas, sean cuales fueran sus grados.

Cuando se inventa este nuevo conjunto de números no se imaginó la enorme importancia que tendría en la resolución de problemas en diversos campos de la ciencia; así, se aplica en el ámbito de la electricidad, la electrónica, la mecánica de fluidos, etc.

Si bien es cierto, el estudio de números complejos resulta novedoso, es importante estudiar correctamente la teoría, y conocer las aplicaciones de modo que nos familiaricemos con las operaciones y diversas propiedades que se cumplen en este campo, con ello podemos ir avanzando en el desarrollo de los diversos items que se presentan en este capítulo.

DEFINICIÓN DE NÚMERO COMPLEJO

Sea el conjunto $\mathbb{C}=\{(x;y)/z=(x;y)$ donde $x,y\in\mathbb{R}\}$ cuyos elementos satisfacen las operaciones

i) $Z_1+Z_2=(x_1;y_1)+(x_2;y_2)=(x_1+x_2;y_1+y_2)$

ii) $Z_1Z_2=(x_1;y_1)(x_2;y_2)=(x_1x_2-y_1y_2;x_1y_2+y_1x_2)$

A cada elemento $(x;y)$ del conjunto $\mathbb{C}$ se denomina número complejo y se denota por

$$Z=(x;y)$$

parte real ← x ; y → parte imaginaria

Es decir $x=\mathbb{R}e(Z)$; $y=\mathbb{I}m(Z)$

Ejemplos de los elementos del conjunto $\mathbb{C}$

$Z_1=(2;3)$; $Z_2=(\sqrt{3};\pi)$; $Z_3=\left(1;-\dfrac{3}{2}\right)$

Veamos las operaciones en $\mathbb{C}$

Dados $Z_1=(2;3)$ y $Z_2=(5;9)$

entonces $Z_1+Z_2=(2+5;3+9)=(7;12)$

$Z_1.Z_2=(2\times5-3\times9;\ 2\times9+3\times5)=(-17;33)$

Representación Geométrica de los Números Complejos

Los números complejos pueden representarse por puntos de un plano. Un número complejo se representa gráficamente en un plano de números complejos (llamado también plano de Gauss o diagrama de Argand), el cual usa el eje horizontal (eje real) para ubicar la parte real; y el eje vertical para ubicar la parte imaginaria (eje imaginario), de los números complejos. Entonces, el número complejo $Z=(x;y)$, puede representarse por un punto de abscisa x y ordenada y, observe la figura 9.3. Al punto O de la figura 9.1 se le denomina polo.

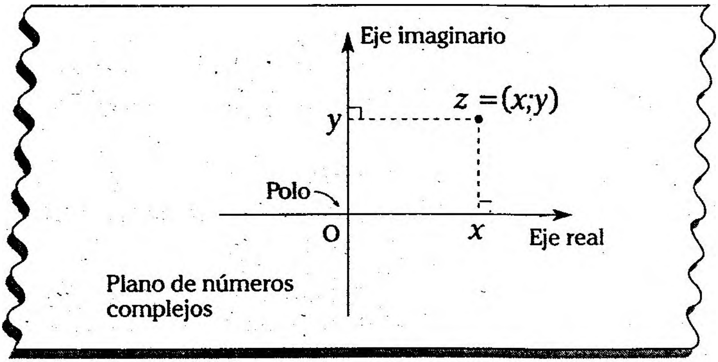


Figura 9.1

Definición

Sea $a \in \mathbb{R}$, entonces $(a;0) \equiv a$ o $(a;0) = a$

es decir el número complejo (a;0) le corresponde el número real **a**; veamos su representación geométrica.

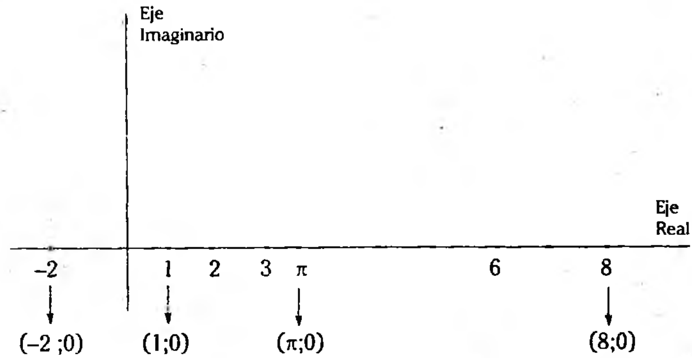


Figura 9.2

Definición

$(0;1)=i$, i es llamado la unidad imaginaria $\left(i=\sqrt{-1}\right)$

Teorema

$\forall r \in \mathbb{R} \quad r(0;1)=(0;r)$

Demostración

$r(0;1)=(r;0).(0;1)=(0-0;r+0)=(0;r)$

$\therefore\ r(0;1)=(0;r)$

Ejemplos

$2(0;1)=(0;2)$

$-3(0;2)=(0;-6)$

Teorema

$i^2=-1$, donde $i=\sqrt{-1}$

Demostración

$i^2=(0;1).(0;1)=(0-1;0+0)=(-1;0)=-1$

$\therefore\ i^2=-1$

Teorema (forma binómica)

$\forall x,y \in \mathbb{R} \quad Z=(x;y)=x+yi$,

donde $i=\sqrt{-1}$

Demostración

$$Z=(x;y)=(x;0)+(0;y)$$
$$Z=(x;0)+y(0;1)$$
$$Z=x+yi$$
$$\therefore\ Z=(x;y)=x+yi$$

Ejemplos

$Z_1=(2;3)=2+3i$, $Z_2=(-2;4)=-2+4i$

De la forma general de un número complejo ($Z=x+yi$), si $y=0$ se tiene $Z=x$, entonces Z sería solo un número real (los números reales son un caso particular de los números complejos). Si $x=0$, se tiene $Z=yi$, entonces Z sería un número imaginario puro.

Ejemplo

Grafique en el plano complejo los números

$Z_1=3+2i$; $Z_2=-\sqrt{2}-2i$; $Z_3=5$; $Z_4=-3i$

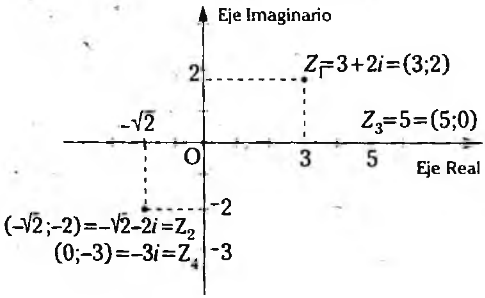


Figura 9.3

Resolución

- $Z_1=3+2i=(3;2)$
- $Z_2=-\sqrt{2}-2i=(-\sqrt{2};-2)$
- $Z_3=5+0i=(5;0)$
- $Z_4=0-3i=(0;-3)$

Forma Polar o Trigonométrica de un Número Complejo

Si P es un punto en el plano complejo correspondiente al número complejo $(x;\,y)$ o $x+iy$ entonces vemos que, según la figura 9.4, si $Z\neq0$, por razones trigonométricas de un ángulo en posición normal se tiene

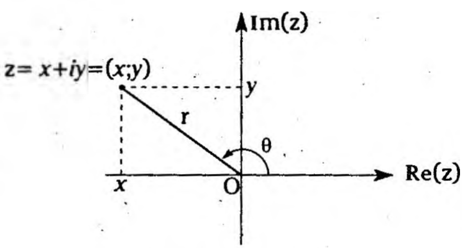


Figura 9.4

$$\cos\theta=\frac{x}{r}\Rightarrow x=r\cos\theta$$

$$\operatorname{sen}\theta=\frac{y}{r}\Rightarrow y=r\operatorname{sen}\theta$$

Luego;

si $Z=x+iy$

Reemplazando lo anterior

si $x=r\cos\theta$

$y=r\operatorname{sen}\theta$

Se tiene

$Z=r\cos\theta+ir\operatorname{sen}\theta$,

luego

> $Z=r(\cos\theta+i\operatorname{sen}\theta)$, es la forma polar o trigonométrica del número complejo Z.

Donde

- r es llamado módulo del número complejo $Z=x+iy$, y se le denota por modZ ó $|Z|$, tal que

  $r=|Z|=|x+iy|=\sqrt{x^2+y^2}$

Nota

La expresión $\cos\theta+i\operatorname{sen}\theta$ se puede escribir abreviadamente como $\operatorname{cis}\theta$, esta forma de abreviatura se lee como cis de θ

Ejemplos

- $\cos\frac{\pi}{3}+i\operatorname{sen}\frac{\pi}{3}=\operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{3}\right)$
- $\cos\frac{\pi}{4}-i\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}=\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{4}\right)$
- $\cos\frac{\pi}{4}-i\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}=\operatorname{cis}\left(-\frac{\pi}{4}\right)$

- θ es llamado argumento del número complejo

  $Z=x+iy$ y se le denota por arg(Z)

Nota

El argumento de un número complejo puede ser cualquier ángulo trigonométrico cuyo lado inicial se encuentra en la parte positiva del eje real, el vértice se ubica en el polo, y el lado final está contenido en la recta que une el polo con el punto que representa al número complejo.

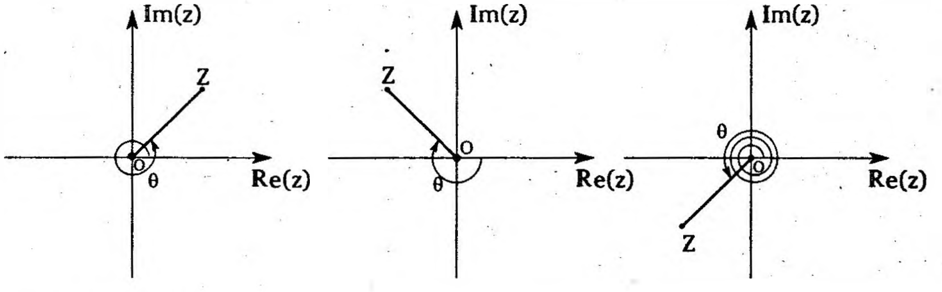


Figura 9.5

Argumento Principal de un Número Complejo (Arg(z))

Si θ es un argumento de Z que verifica

$-\pi < \theta \leq \pi$ ó $0 \leq \theta < 2\pi$, entonces θ se denomina argumento principal de Z.

En consecuencia, un argumento cualquiera de Z será

$\arg(Z) = \text{Arg}(Z) + 2k\pi$; $k=\{\ldots -1; 0; 1;\ldots\}$

Ejemplo

Exprese en forma trigonométrica el número complejo $Z = -1-i$

Resolución

Hallando el módulo de Z

$$r = |Z| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$

El argumento principal de Z puede ser $-\frac{3\pi}{4}$ (ver figura 9.6)

$$\Rightarrow \text{Arg}(Z) = -\frac{3\pi}{4} \in \langle -\pi; \pi]$$

como $\arg(Z) = \text{Arg}(Z) + 2k\pi$; $K \in \mathbb{Z}$

$$\Rightarrow \arg(Z) = -\frac{3\pi}{4} + 2K\pi; \text{ **(conjunto general)**}$$

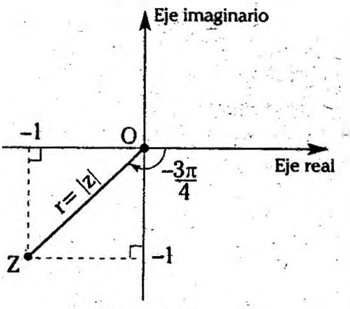


Figura 9.6

Finalmente, la forma polar de Z será $Z = \sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{3\pi}{4} + 2K\pi\right) + i\,\text{sen}\left(-\frac{3\pi}{4} + 2K\pi\right)\right]$; $\forall K \in \mathbb{Z}$

Nota

La forma polar de Z no es única, ya que

$$\text{Si } K=-1 \Rightarrow Z=\sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{11\pi}{4}\right)+i\text{sen}\left(-\frac{11\pi}{4}\right)\right]$$

$$\text{Si } K=0 \Rightarrow Z=\sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right)+i\text{sen}\left(-\frac{3\pi}{4}\right)\right]$$

$$\text{Si } K=1 \Rightarrow Z=\sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right)+i\text{sen}\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right]$$

Ejemplos

Exprese en su forma polar los números complejos

a) $Z=\text{sen}\alpha+i\cos\alpha$

b) $Z=\cos\alpha-i\text{sen}\alpha$

c) $Z=-4(\cos\alpha+i\text{sen}\alpha)$

d) $Z=1-\text{sen}\alpha+i\cos\alpha$; $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$

Resolución

a) Notamos que Z no está en su forma polar, recordando

$$\text{sen}\alpha=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) \quad \text{y} \quad \cos\alpha=\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$$

entonces $Z=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)+i\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$

luego $|Z|=1$ y un argumento de Z es $\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$.

b) Aquí Z tampoco está en su forma polar, por identidad para arcos de la forma $(-\alpha)$, se tiene la siguiente igualdad

$$Z=\cos\alpha-i\text{sen}\alpha$$

$$Z=\cos(-\alpha)+i\text{sen}(-\alpha)$$

ó $Z=\cos(2\pi-\alpha)+i\text{sen}(2\pi-\alpha)$

luego $|Z|=1$ y un argumento de Z es $(-\alpha)$ ó $(2\pi-\alpha)$.

c) Notamos que el coeficiente del número $\cos\alpha+i\text{sen}\alpha$ es -4, entonces este no puede ser módulo, por lo tanto

$$Z=4(\underbrace{-\cos\alpha}-\underbrace{i\text{sen}\alpha})$$

$$\Rightarrow Z=4[\cos(\pi+\alpha)+i\text{sen}(\pi+\alpha)]$$

luego $|Z|=4$ y un argumento de Z es $(\pi+\alpha)$.

d) Cambiando a $\text{sen}\alpha$ y $\text{sen}\alpha$ por su co–razón, luego aplicamos identidades de arco doble

$$Z=1-\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)+i\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$$

$$Z=2\text{sen}^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)+i2\text{sen}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)$$

$$Z=2\text{sen}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)\left[\text{sen}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)+i\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)\right]$$

$$Z=2\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)+i\text{sen}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)\right]$$

como $0<\alpha<\frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{\pi}{4}<\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}<\frac{\pi}{2}$;

es decir $\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)>0$;

luego $|Z|=2\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)$

y un argumento de Z es $\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)$

Forma Exponencial de un Número Complejo

En el año de 1749, LEONARDO EULER escribió un trabajo sobre los logaritmos de los números negativos e imaginarios. EULER adoptó como base de sus exponenciales y de sus logaritmos el número e, donde e = 2,718281... $=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ esta expresión simplifica grandemente las fórmulas y facilita las ideas.

El punto de partida para la teoría de la exponencial y del logaritmo, según Euler, es la definición de la potencia e^z, donde el exponente es $z=x+iy$.

Se define del cálculo que para todo número real x, se tiene la serie infinita

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

La igualdad anterior significa que la suma de los n primeros términos del segundo miembro es un valor aproximado para e^x y que esa aproximación se puede hacer tan precisa como se desee, al tomar n suficientemente grande.

Desde mucho antes de Euler se conocían los desarrollos en serie de sen$x$ y cos$x$:

$$\operatorname{sen}x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

El desarrollo en serie de e^x para x real sugiere de modo evidente la definición de la exponencial e^Z, donde $Z = x + iy$ es un número complejo, basta escribir

$$e^Z = 1 + Z + \frac{Z^2}{2!} + \frac{Z^3}{3!} + \frac{Z^4}{4!} + \dots + \frac{Z^n}{n!} + \dots$$

En el caso particular en que $Z = iy$ es un número imaginario puro, tomando en cuenta los valores de las potencias sucesivas de $i = \sqrt{-1}$, reemplazando y agrupando los términos se tiene

$$e^{iy} = \Bigg(\underbrace{1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} - \frac{y^6}{6!} + \frac{y^8}{8!} \dots}_{\cos y}\Bigg) + i\Bigg(\underbrace{y - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} - \frac{y^7}{7!} + \dots}_{\operatorname{sen} y}\Bigg)$$

$\Rightarrow \boxed{e^{iy} = \cos y + i\operatorname{sen} y}$, (denominada fórmula de Euler)

De la forma polar de un número complejo

$Z = r(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)$

Aplicamos la fórmula de Euler, obtenemos que $\boxed{Z = re^{i\theta}}$, es la **forma exponencial** de un número complejo donde **r** es módulo de Z y θ es el argumento de Z.

Finalmente, como resumen se tiene

$$\boxed{Z = (x;y) = x + iy = r(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta) = r\,e^{i\theta}}$$

Ejemplo 1

Exprese cada número en la forma $x+iy$

$$Z_1 = e^{i\pi},\quad Z_2 = e^{i\pi/3},\quad Z_3 = e^{1+\frac{i\pi}{2}}$$

Resolución

$$Z_1 = \cos\pi + i\operatorname{sen}\pi = -1 + i(0) \Rightarrow Z_1 = -1$$

$$Z_2 = \cos\frac{\pi}{3} + i\operatorname{sen}\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$Z_3 = e.e^{i\pi/2} = e\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow Z_3 = ei$$

Ejemplo 2

Exprese en forma cartesiana, forma polar y forma exponencial el número complejo $(-1;\sqrt{3})$

Resolución

- $Z = -1 + \sqrt{3}i$ ... (forma cartesiana)

Además

$$Z = 2\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = |Z|(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)$$

donde θ : arg(Z)

Se observa que

$$\cos\theta = -\frac{1}{2} \wedge \operatorname{sen}\theta = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

luego $\theta = 2K\pi + \frac{2\pi}{3}$; $K \in \mathbb{Z}$

Reemplazando

- $Z = 2\left(\cos\left(2K\pi + \frac{2\pi}{3}\right) + i\operatorname{sen}\left(2K\pi + \frac{2\pi}{3}\right)\right)$

  (forma polar)

También

- $Z = 2e^{\left(2K\pi + \frac{2\pi}{3}\right)i}$ (forma exponencial)

Así podemos afirmar que

$$Z=(-1;\sqrt{3})=2\left(\cos\left(2K\pi+\frac{2\pi}{3}\right)+i\operatorname{sen}\left(2K\pi+\frac{2\pi}{3}\right)\right)$$

$$=2e^{\left(2K\pi+\frac{2\pi}{3}\right)i},\ K\in\mathbb{Z}$$

Números Complejos Conjugados

Dado el número complejo $Z\in\mathbb{C}$ / $Z = x + iy$ se define el conjugado del número complejo Z como $(x - iy)$ y se denota $\bar{Z}$ tal que $\bar{Z} = x - iy$

Nótese que $\mathrm{Re}(Z)=\mathrm{Re}(\bar{Z})\wedge \mathrm{Im}(Z)=-\mathrm{Im}(\bar{Z})$; es decir dos números complejos son conjugados entre sí cuando sus partes reales son iguales y sus partes imaginarias solo se diferencian en el signo. Interpretando geométricamente los puntos que representan los números conjugados son simétricos con respecto al eje real. Los módulos de los números complejos conjugados son iguales, es decir

$$|Z|=|\bar{Z}|$$

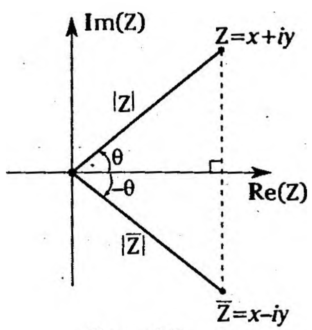


Figura 9.7

y los argumentos se diferencian en el signo, es decir $\mathrm{Arg}(Z)=-\mathrm{Arg}(\bar{Z})$

Si $Z = x+iy=r(\cos\theta+i\operatorname{sen}\theta)=r.e^{i\theta}$

$\bar{Z} = x-yi=r(\cos\theta-i\operatorname{sen}\theta)=r.e^{-i\theta}$

Teorema

Si $Z = x+iy \wedge \bar{Z}=x-iy \Rightarrow Z.\bar{Z}=x^2+y^2$

Demostración

Como

$Z=x+yi \wedge \bar{Z}=x-yi$

luego

$Z.\bar{Z}=(x+yi)(x-yi)=x^2-y^2i^2$

pero

$i^2=-1$

por tanto

$Z.\bar{Z}=x^2+y^2$

Nota

De lo anterior se deduce $Z.\bar{Z}=|Z|^2$

Ejemplo

Si

$Z=3-\sqrt{3}i \Rightarrow \bar{Z}=3+\sqrt{3}i$

Por tanto

$Z.\bar{Z}=3^2+(-\sqrt{3})^2=12$

Inverso Aditivo de un Número Complejo

Dado el número complejo $Z=x+yi$ se define el inverso aditivo de Z como $-Z$ tal que $Z+(-Z)=0$

Ejemplo

- Si

  $Z=3-2i$ su inverso aditivo es $-Z=-3+2i$
- Si

  $Z=-\sec\theta+i\tan\theta$

  su inverso aditivo es,

  $-Z=\sec\theta-i\tan\theta$

Representación gráfica del conjugado e inverso aditivo de un número complejo

Si $Z = x+yi$;

$$\text{luego}\begin{cases} \overline{Z} = x - yi \text{ ...conjugado de Z} \\ -Z = -x - yi \text{ ...inverso aditivo de Z} \end{cases}$$

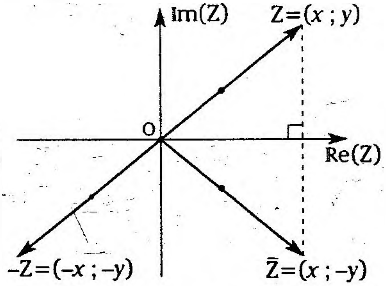


Figura 9.8

De la figura 9.8 se observa que Z y $\overline{Z}$ son simétricos con respecto al eje real; Z y –Z son simétricos con respecto al polo.

Propiedades de los conjugados de números complejos.

1. $\overline{\overline{Z}} = Z$ ... (El conjugado del conjugado de Z es igual al mismo número Z).
2. $\overline{Z_1 + Z_2} = \overline{Z_1} + \overline{Z_2}$
3. $\overline{Z_1 Z_2} = \overline{Z_1}\ \overline{Z_2}$
4. $\overline{\left(\dfrac{Z_1}{Z_2}\right)} = \dfrac{\overline{Z_1}}{\overline{Z_2}}$; si $Z_2 \neq 0$
5. $\text{Re}(Z) = \dfrac{Z+\overline{Z}}{2} \wedge \text{Im}(Z) = \dfrac{Z-\overline{Z}}{2}$
6. $Z = Z \Leftrightarrow Z \in \mathbb{R}$ ... (es decir $Z = x; x \in \mathbb{R}$)
7. $(\overline{Z})^m = (\overline{Z^m})$; $\forall m \in Z^+$

Demostración de 1

Sea

$$Z=(x;y)=x+iy$$

donde

$$\overline{Z}=(x;-y)=x-iy$$

De

$$\overline{Z}=x-yi=x+(-y)i$$

se tiene

$$\overline{\overline{Z}}=x-(-y)i=x+yi=Z$$

Demostración de 2

Sean $Z_1 = x_1 + iy_1 \wedge Z_2 = x_2 + iy_2$

Sumando

$$Z_1 + Z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$$

$$\Rightarrow \overline{Z_1 + Z_2} = (x_1 + x_2) - i(y_1 + y_2)$$

$$= \underbrace{x_1 - iy_1} + \underbrace{x_2 - iy_2}$$

Luego $\overline{Z_1 + Z_2} = \overline{Z_1} + \overline{Z_2}$

Demostración de 3

Sean

$$Z_1 = x_1 + iy_1 \wedge Z_2 = x_2 + iy_2$$

donde

$$Z_1Z_2 = (x_1+iy_1)(x_2+iy_2)$$

$$Z_1Z_2 = x_1x_2 - y_1y_2 + i(x_1y_2 + y_1x_2)$$

$$\overline{Z_1Z_2} = x_1x_2 - y_1y_2 - i(x_1y_2 + y_1x_2)$$

$$\overline{Z_1Z_2} = x_1x_2 - y_1y_2 - ix_1y_2 - y_1x_2i$$

$$= x_2(x_1 - y_1i) - iy_2(x_1 - y_1i)$$

$$= \underbrace{(x_1 - y_1i)}\underbrace{(x_2 - y_2i)}$$

$$\overline{Z_1Z_2} = \overline{Z_1} \quad \overline{Z_2}$$

Demostración de 4

Como

$$Z_1 = Z_1 .1 \qquad \text{... } (\alpha)$$

Si

$$Z_2 \neq 0 \text{ se cumple } Z_2^{-1} Z_2 = 1 \qquad \text{... } (\gamma)$$

reemplazando en γ en α

$$Z_1 = Z_1(Z_2^{-1}Z_2)$$

$$Z_1 = \frac{Z_1}{Z_2}.Z_2$$

De la propiedad (3) ya demostrada

$$\overline{Z_1} = \overline{\left(\frac{Z_1}{Z_2}\right)}\,\overline{Z_2}$$

Multiplicamos por $\overline{Z}_2^{-1}$

$$\overline{Z_1}\;\overline{Z_2}^{-1} = \overline{\left(\frac{Z_1}{Z_2}\right)} \quad \text{luego} \quad \frac{\overline{Z_1}}{\overline{Z_2}} = \overline{\left(\frac{Z_1}{Z_2}\right)}$$

Queda como ejercicio para el lector demostrar las propiedades 5, 6 y 7

Propiedades del Módulo de un Número Complejo

1. $|Z| > 0$; si $Z \neq 0$
2. $|rZ| = |r||Z|$; $\forall r \in \mathbb{R}$
3. $|Z_1Z_2| = |Z_1||Z_2|$
4. $\left|\frac{Z_1}{Z_2}\right| = \frac{|Z_1|}{|Z_2|}$; Si $Z_2 \neq 0$
5. $|Z| = |-Z| = |\overline{Z}|$
6. $|Z|^2 = Z.\overline{Z}$
7. $\text{Re}(Z) \leq |Z| \wedge \text{Im}(Z) \leq |Z|$
8. $|Z_1 + Z_2| \leq |Z_1| + |Z_2|$

Las demostraciones se indicarán solo para algunas propiedades, y quedan como ejercicios para el lector las demás.

Demostración de 3

Dado

$$Z_1 = |Z_1|e^{\theta i} \wedge Z_2 = |Z_2|e^{\alpha i}$$

donde

$$Z_1.Z_2 = |Z_1|e^{\theta i}.|Z_2|e^{\alpha i}$$

$$Z_1.Z_2 = |Z_1||Z_2|e^{(\alpha+\theta)i}$$

luego

$$|Z_1Z_2| = |Z_1||Z_2|$$

Demostración de 7

Dado

$$Z = x + yi$$

$$\text{Re}(Z) = x$$

$$\text{Im}(Z) = y,$$

$$\forall x \text{ e } y \in \mathbb{R}$$

Se cumple

$$y^2 \geq 0 \;\wedge\; x^2 \geq 0$$

Sumando x^2 e y^2 respectivamente

$$x^2 + y^2 \geq x^2 \wedge x^2 + y^2 \geq y^2$$

$$\sqrt{x^2+y^2} \geq \sqrt{x^2} \wedge \sqrt{x^2+y^2} \geq \sqrt{y^2}$$

$$\sqrt{x^2+y^2} \geq |x| \geq x \wedge \sqrt{x^2+y^2} \geq |y| \geq y$$

$$\Rightarrow |Z| \geq \text{Re}(Z) \wedge |Z| \geq \text{Im}(Z)$$

Demostración de 8

Considerando las propiedades anteriores

$$|Z_1 + Z_2|^2 = (Z_1 + Z_2)(\overline{Z_1 + Z_2})$$

$$|Z_1 + Z_2|^2 = (Z_1 + Z_2)(\overline{Z_1} + \overline{Z_2})$$

$$|Z_1 + Z_2|^2 = Z_1\overline{Z_1} + Z_2\overline{Z_1} + Z_1\overline{Z_2} + Z_2\overline{Z_2}$$

$$|Z_1 + Z_2|^2 = |Z_1|^2 + Z_2\overline{Z_1} + Z_1\overline{Z_2} + |Z_2|^2 \quad ...(1)$$

Sea

$$Z_1 = |Z_1|e^{\theta i} \wedge \overline{Z_1} = |\overline{Z_1}|e^{-\theta i}$$

donde

$$|Z_1| = |\overline{Z_1}|$$

Además

$$Z_2 = |Z_2|e^{\alpha i} \wedge \overline{Z_2} = |\overline{Z_2}|e^{-\alpha i}$$

donde

$$|Z_2| = |\overline{Z_2}|$$

Luego

$$Z_1\overline{Z_2} = |Z_1||\overline{Z_2}|e^{(\theta-\alpha)i}$$

donde $|\overline{Z_2}| = |Z_2|$

$$Z_2\overline{Z_1} = |Z_2||\overline{Z_1}|e^{-(\theta-\alpha)i}$$

donde $|\overline{Z_1}| = |Z_1|$

$$Z_1\overline{Z_2} + Z_2\overline{Z_1} = |Z_1||Z_2|(e^{(\theta-\alpha)i} + e^{-(\theta-\alpha)i})$$

$$Z_1\overline{Z_2} + Z_2\overline{Z_1} = |Z_1||Z_2|(2\cos(\theta-\alpha))$$

$$Z_1\overline{Z_2} + Z_2\overline{Z_1} = 2|Z_1||Z_2|\cos(\theta-\alpha) \ ... \ (2)$$

Pero

$$\theta \in \mathbb{R} \wedge \alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow (\theta-\alpha) \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow -1 \leq \cos(\theta-\alpha) \leq 1$$

$$\Rightarrow -2|Z_1||Z_2| \leq 2|Z_1||Z_2|\cos(\theta-\alpha) \leq 2|Z_1||Z_2| \ ...(3)$$

Reemplazando (2) en (3)

$$Z_1\overline{Z_2} + Z_2\overline{Z_1} \leq 2|Z_1||Z_2|$$

(sumando en ambos lados de la desigualdad $|Z_1|^2 + |Z_2|^2$)

$$\underbrace{|Z_1|^2 + |Z_2|^2 + Z_1\overline{Z_2} + Z_2\overline{Z_1}}_{|Z_1+Z_2|^2} \leq \underbrace{2|Z_1||Z_2| + |Z_1|^2 + |Z_2|^2}_{(|Z_1|+|Z_2|)^2}$$

Luego, extrayendo la raíz cuadrada, obtenemos

$$|Z_1 + Z_2| \leq |Z_1| + |Z_2|$$

Teorema

Sean Z_1 y Z_2 dos números complejos cuyas formas polares son

$$Z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\,\text{sen}\theta_1),$$

donde $r_1 = |Z_1|$, $\theta_1 = \arg(Z_1)$

$$Z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\,\text{sen}\theta_2),$$

donde $r_2 = |Z_2|$, $\theta_2 = \arg(Z_2)$

entonces

1. $Z_1Z_2 = r_1r_2[\cos(\theta_1+\theta_2) + i\,\text{sen}(\theta_1+\theta_2)]$,

   donde $\arg(Z_1Z_2) = \arg(Z_1) + \arg(Z_2)$

2. $\dfrac{Z_1}{Z_2} = \dfrac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1-\theta_2) + i\,\text{sen}(\theta_1-\theta_2)]$,

   donde $\arg\left(\dfrac{Z_1}{Z_2}\right) = \arg(Z_1) - \arg(Z_2)$

Demostración de 1

Como

$$Z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\,\text{sen}\theta_1)$$

$$Z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\,\text{sen}\theta_2)$$

$$\Rightarrow Z_1Z_2 = r_1r_2(\cos\theta_1 + i\,\text{sen}\theta_1)(\cos\theta_2 + i\,\text{sen}\theta_2)$$

$$\Rightarrow Z_1Z_2 = r_1r_2[\underbrace{\cos\theta_1\cos\theta_2 - \text{sen}\theta_1\text{sen}\theta_2}_{\cos(\theta_1+\theta_2)} + i(\underbrace{\text{sen}\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\text{sen}\theta_2}_{\text{sen}(\theta_1+\theta_2)})]$$

$$\Rightarrow Z_1Z_2 = r_1r_2[\cos(\theta_1+\theta_2) + i\,\text{sen}(\theta_1+\theta_2)]$$

La demostración de 2 se deja como ejercicio para el lector.

Ejemplos

1. Si $Z_1 = 2(\cos 20° + i\text{sen}20°) \wedge Z_2 = 3(\cos 10° + i\text{sen}10°)$
   Se tiene $Z_1 Z_2 = (2)(3)(\cos(20°+10°) + i\text{sen}(20°+10°))$
   es decir $Z_1 Z_2 = 6(\cos 30° + i\text{sen}30°)$

2. Si $Z_1 = 5(\cos 3\theta + i\text{sen}3\theta) \wedge Z_2 = 2(\cos\theta + i\text{sen}\theta)$

   se tiene $\dfrac{Z_1}{Z_2} = \dfrac{5}{2}\dfrac{(\cos 3\theta + i\text{sen}3\theta)}{(\cos\theta + i\text{sen}\theta)}$ es decir $\dfrac{Z_1}{Z_2} = 2{,}5(\cos 2\theta + i\text{sen}2\theta)$

3. Si $Z_1 = \cos\dfrac{\pi}{5} + i\,\text{sen}\dfrac{\pi}{5}$

   $Z_2 = 2\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + i\,\text{sen}\dfrac{\pi}{4}\right)$

   $\Rightarrow \arg Z_1Z_2 = \arg Z_1 + \arg Z_2 = \dfrac{\pi}{5} + \dfrac{\pi}{4}$

   $\arg Z_1Z_2 = 9\dfrac{\pi}{20}$

4. Si $Z_1 = 3\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{5\pi}{6} + i\,\text{sen}\dfrac{5\pi}{6}\right)$

   $Z_2 = \sqrt{3}\left(\cos\dfrac{\pi}{3} + i\,\text{sen}\dfrac{\pi}{3}\right)$

   $\Rightarrow \dfrac{Z_1}{Z_2} = (\sqrt{2})(\sqrt{3})\left[\cos\left(\dfrac{5\pi}{6} - \dfrac{\pi}{3}\right) + i\,\text{sen}\left(\dfrac{5\pi}{6} - \dfrac{\pi}{3}\right)\right] = \sqrt{6}\left[\underbrace{\cos\dfrac{\pi}{2}}_{0} + i\,\underbrace{\text{sen}\dfrac{\pi}{2}}_{1}\right]$

   Es decir $\dfrac{Z_1}{Z_2} = \sqrt{6}i$

   Además $\arg\dfrac{Z_1}{Z_2} = \arg Z_1 - \arg Z_2 = \dfrac{5\pi}{6} - \dfrac{\pi}{3} \Rightarrow \arg\dfrac{Z_1}{Z_2} = \dfrac{\pi}{2}$

Fórmula de D' Moivre

Sea n un entero positivo y $Z = r(\cos\theta + i\text{sen}\theta)$, $Z \in \mathbb{C}$, $Z \neq 0$, $r = |Z|$, entonces $Z^n = r^n[\cos(n\theta) + i\text{sen}(n\theta)]$

Prueba

La demostración es por inducción matemática, que consiste en suponer que la fórmula se cumple para n=1, n=h, a partir de ello compruebe que se cumple el teorema para n=h+1

- Para n=1, se cumple $Z = r(\cos\theta + i\text{sen}\theta)$
- Para n=h, suponga que se cumple $Z^h = r^h[\cos(h\theta) + i\text{sen}(h\theta)]$
- Para n=h+1, debe cumplirse que $Z^{h+1} = r^{h+1}[\cos((h+1)\theta) + i\text{sen}((h+1)\theta)]$

Veamos

En el paso 2 se tenía $Z^h = r^h[\cos(h\theta) + i\text{sen}(h\theta)]$

Multiplicando por Z

$Z^h Z = r^h[\cos(h\theta)+i\,\text{sen}(h\theta)]\; \underbrace{r(\cos\theta+i\,\text{sen}\theta)}_{\text{del primer paso}}$

$Z^{h+1} = r^h \times r[\cos(h\theta)+i\,\text{sen}(h\theta)](\cos\theta+i\,\text{sen}\theta)$

$Z^{h+1} = r^{h+1}[\cos(h\theta+\theta)+i\,\text{sen}(h\theta+\theta)]$

$Z^{h+1} = r^{h+1}[\cos(h+1)\theta + i\,\text{sen}(h+1)\theta]$

Por lo tanto, la proposición

$Z^n = r^n[\cos(n\theta) + i\,\text{sen}(n\theta)]$ se cumple $\forall n \in Z^+$

Si

$$Z = 2\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\,\text{sen}\frac{2\pi}{3}\right) \Rightarrow$$

$$Z^6 = 2^6\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)6+i\,\text{sen}\left(\frac{2\pi}{3}\right)6\right)$$

es decir $Z^6 = 64(\cos 4\pi + i\,\text{sen}4\pi)$

Observación

La fórmula de D' Moivre es válida para cualquier entero negativo n.

Si

$$Z = \sqrt{7}\left(\cos\frac{3\pi}{8}+i\,\text{sen}\frac{3\pi}{8}\right) \Rightarrow$$

$$Z^{-4} = (\sqrt{7})^{-4}\left(\cos(-4)\left(\frac{3\pi}{8}\right)+i\,\text{sen}(-4)\left(\frac{3\pi}{8}\right)\right)$$

es decir

$$Z^{-4} = \frac{1}{49}\left(\cos\left(\frac{-3\pi}{2}\right)+i\,\text{sen}\left(\frac{-3\pi}{2}\right)\right)$$

la exponencial compleja puede utilizarse para definir las funciones trigonométricas de variable compleja.

Sabiendo que

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\,\text{sen}\theta \qquad \ldots (1)$$

De la fórmula de Euler, tenemos

$$e^{i(-\theta)} = \cos(-\theta) + i\,\text{sen}(-\theta)$$

$$\Rightarrow e^{-i\theta} = \cos\theta - i\,\text{sen}\theta \qquad \ldots (2)$$

Sumando (1) y (2) se obtiene

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$$

Restando (1) y (2)

se obtiene $\text{sen}\theta = \dfrac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$

Extendemos estas definiciones al campo complejo, es decir

$$\text{sen}Z = \frac{e^{iZ}-e^{-iZ}}{2i} \;;\; \cos Z = \frac{e^{iZ}+e^{-iZ}}{2}$$

Las otras cuatro funciones trigonométricas, definidas en términos de las funciones seno y coseno serán

$$\tan Z = \frac{\text{sen}Z}{\cos Z}\;,\quad \cot Z = \frac{\cos Z}{\text{sen}Z},$$

$$\sec Z = \frac{1}{\cos Z}\;,\quad \csc Z = \frac{1}{\text{sen}Z}$$

Ejemplo

- $\text{sen}\,i = \dfrac{e^{ii}-e^{-ii}}{2i} = \dfrac{e^{-1}-e^{1}}{2i} = \dfrac{\frac{1}{e}-e}{2i} = \dfrac{1-e^2}{2ei} \Rightarrow$

Análogamente $\cos i = \dfrac{1+e^2}{2e} \quad \Rightarrow \text{sen}\,i = \dfrac{1-e^2}{2ei}$

Aplicación

Siendo

$Z = x + iy \,/\, \sqrt{-1} = i$

demuestre que $\text{sen}^2 Z + \cos^2 Z = 1$

Resolución

$$\text{sen}^2 Z+\cos^2 Z = \left[\frac{e^{iZ}-e^{-iZ}}{2i}\right]^2 + \left[\frac{e^{iZ}+e^{-iZ}}{2}\right]^2$$

$$= \frac{(e^{iZ}-e^{-iZ})^2}{-4} + \frac{(e^{iZ}+e^{-iZ})^2}{4}$$

$$\text{sen}^2 Z+\cos^2 Z = \frac{(e^{iZ}+e^{-iZ})^2-(e^{iZ}-e^{-iZ})^2}{4}$$

$$= \frac{4e^{iZ}e^{-iZ}}{4}.$$

$$\text{sen}^2 Z+\cos^2 Z = 1$$

Nota

Todas las identidades trigonométricas conocidas para números reales, se cumplen también para números complejos. Es decir, si Z; Z_1 y Z_2 son números complejos, podemos indicar algunos ejemplos de identidades trigonométricas con números complejos

- $\tan 2Z=\dfrac{\operatorname{sen}2Z}{\cos 2Z}$
- $1+\cot^2 Z=\csc^2 Z$
- $\operatorname{sen}(Z_1+Z_2)=\operatorname{sen}Z_1\cos Z_2+\cos Z_1\operatorname{sen}Z_2$
- $\cos(Z_1-Z_2)=\cos Z_1\cos Z_2+\operatorname{sen}Z_1\operatorname{sen}Z_2$
- $\operatorname{sen}2Z=2\operatorname{sen}Z\cos Z$
- $\cos 2Z=\cos^2 Z-\operatorname{sen}^2 Z$
- $\operatorname{sen}Z_1+\operatorname{sen}Z_2=2\operatorname{sen}\left(\dfrac{Z_1+Z_2}{2}\right)\cos\left(\dfrac{Z_1-Z_2}{2}\right)$
- $\operatorname{sen}3Z=3\operatorname{sen}Z-4\operatorname{sen}^3 Z$

Aplicación

Demuestre que $\operatorname{sen}3Z=3\operatorname{sen}Z-4\operatorname{sen}^3Z$ siendo $Z=x+iy$

Resolución

$$\operatorname{sen}3Z=\frac{e^{3Zi}-e^{-3Zi}}{2i}=\frac{(e^{Zi})^3-(e^{-Zi})^3}{2i}=\frac{(e^{Zi}-e^{-Zi})(e^{2Zi}+e^{-2Zi}+1)}{2i}$$

$$=\left(\frac{e^{Zi}-e^{-Zi}}{2i}\right)[e^{2Zi}+e^{-2Zi}-2e^{Zi}e^{Zi}+3]=\frac{e^{Zi}-e^{-Zi}}{2i}\left[\left(\frac{e^{Zi}-e^{-Zi}}{2i}\right)^2(-4)+3\right]$$

$$\operatorname{sen}3Z=\operatorname{sen}Z[-4\operatorname{sen}^2Z+3]$$

$$\operatorname{sen}3Z=3\operatorname{sen}Z-4\operatorname{sen}^3Z$$

La Exponencial Compleja

Sea $Z=x+iy$, definimos $e^Z=e^x(\cos y+i\operatorname{sen}y)$

Propiedades de la Exponencial Compleja

$e^{i\theta}=\cos\theta+i\operatorname{sen}\theta$

- $|e^{i\theta}|=1$
- $e^Z\neq 0$
- $e^{i\theta_1}.e^{i\theta_2}=e^{i(\theta_1+\theta_2)}$
- Si $Z=x+iy \Rightarrow |e^Z|=e^x \wedge \arg(e^Z)=y$
- $\dfrac{1}{e^{i\theta}}=e^{-i\theta}$
- $e^{Z_1}e^{Z_2}=e^{Z_1+Z_2}$
- $\dfrac{e^{i\theta_1}}{e^{i\theta_2}}=e^{i(\theta_1-\theta_2)}$
- $e^{-Z}=\dfrac{1}{e^Z}$
- $[e^{i\theta}]^n=e^{i\theta n},\ \forall n\in\mathbb{Z}$
- $\dfrac{e^{Z_1}}{e^{Z_2}}=e^{Z_1-Z_2}$
- $e^{i\theta_1}=e^{i\theta_2}\Leftrightarrow\theta_1=\theta_2+2k\pi;\ k\in\mathbb{Z}$
- $e^Z=1\Leftrightarrow Z=2K\pi i$; $K\in\mathbb{Z}$

Relación entre la Fórmula de D' Moivre y el Binomio de Newton

$$\cos nx + i\,\text{sen}\,nx = (\cos x + i\,\text{sen}x)^n = \sum_{k=0}^{n} C_k^n (\cos x)^{n-k}(i\,\text{sen}x)^k$$

Donde

$(\cos x + i\,\text{sen}x)^n$ es el binomio de Newton

además se conoce

$$C_k^n = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

Desarrollando el binomio

$$(\cos x + i\,\text{sen}x)^n = \cos^n x + C_1^n \cos^{n-1} x(i\,\text{sen}x) + C_2^n \cos^{n-2} x(i\,\text{sen}x)^2 + C_3^n (\cos x)^{n-3}(i\,\text{sen}x)^3$$

$$+ \ldots + C_{n-1}^n(\cos x)(i\,\text{sen}x)^{n-1} + C_n^n(i\,\text{sen}x)^n$$

$$\cos nx + i\,\text{sen}\,nx = \cos^n x + iC_1^n \cos^{n-1} x\,\text{sen}x - C_2^n \cos^{n-2} x\,\text{sen}^2 x - iC_3^n \cos^{n-3} x\,\text{sen}^3 x$$

$$+ \ldots + C_{n-1}^n(\cos x)(i\,\text{sen}x)^{n-1} + C_n^n(i\,\text{sen}x)^n$$

Por igualdad de números complejos

$$\cos(nx) = \cos^n x - C_2^n \cos^{n-2} x\,\text{sen}^2 x + C_4^n \cos^{n-4} x\,\text{sen}^4 x - C_6^n \cos^{n-6} x\,\text{sen}^6 x + \ldots$$

$$\text{sen}(nx) = C_1^n \cos^{n-1} x\,\text{sen}x - C_3^n \cos^{n-3} x\,\text{sen}^3 x + C_5^n \cos^{n-5} x\,\text{sen}^5 x + \ldots$$

$$\Rightarrow \tan(nx) = \frac{C_1^n \cos^{n-1} x\,\text{sen}x - C_3^n \cos^{n-3} x\,\text{sen}^3 x + C_5^n \cos^{n-5} x\,\text{sen}^5 x + \ldots}{\cos^n x - C_2^n \cos^{n-2} x\,\text{sen}^2 x + C_4^n \cos^{n-4} x\,\text{sen}^4 x - C_6^n \cos^{n-6} x\,\text{sen}^6 x + \ldots}$$

Adicionalmente

Dividiendo entre $\cos^n x$ al numerador y denominador

$$\tan(nx) = \frac{C_1^n \tan x - C_3^n \tan^3 x + C_5^n \tan^5 x - \ldots\ldots\ldots\ldots}{1 - C_2^n \tan^2 x + C_4^n \tan^4 x - \ldots\ldots\ldots\ldots}$$

Ejemplo

Degrade

a) $\cos^6 x$ b) $\text{sen}^3 x$

Resolución

a) $\cos^6 x$

como $\cos x = \dfrac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$

$$\Rightarrow \cos^6 x = \frac{1}{2^6}(e^{ix} + e^{-ix})^6$$

$$\cos^6 x = \frac{1}{64}(e^{6ix} + 6e^{5ix}e^{-ix} + 15e^{4ix}e^{-2ix} + 20e^{3ix}e^{-3ix} + 15e^{2ix}e^{-4ix} + 6e^{ix}e^{-5ix} + e^{-6ix})$$

$$\cos^6 x = \frac{1}{64}(e^{i6x} + e^{-i6x} + 6(e^{i4x} + e^{-4ix}) + 15(e^{i2x} + e^{-i2x}) + 20e^0)$$

$$\cos^6 x = \frac{1}{64}(2\cos 6x + 6\,(2\cos 4x) + 15\,(2\cos 2x) + 20)$$

$$\cos^6 x = \frac{1}{32}\cos 6x + \frac{3}{16}\cos 4x + \frac{15}{32}\cos 2x + \frac{5}{16}$$

b) $\operatorname{sen} x = \dfrac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$

$$\Rightarrow \operatorname{sen}^3 x = \frac{1}{(2i)^3}(e^{ix} - e^{-ix})^3$$

$$\operatorname{sen}^3 x = \frac{1}{-8i}(e^{i3x} - 3e^{i2x}e^{-ix} + 3e^{ix}e^{-i2x} - e^{-i3x})$$

$$\operatorname{sen}^3 x = \frac{1}{-8i}(e^{i3x} - e^{-i3x} - 3e^{ix} + 3e^{-ix})$$

$$\operatorname{sen}^3 x = \frac{1}{-8i}(e^{i3x} - e^{-i3x} - 3(e^{ix} - e^{-ix}))$$

$$\operatorname{sen}^3 x = -\frac{1}{4}\left[\frac{e^{i3x} - e^{i3x}}{2i} - 3\left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right)\right]$$

$$\operatorname{sen}^3 x = -\frac{1}{4}\operatorname{sen} 3x + \frac{3}{4}\operatorname{sen} x$$

$$\therefore \operatorname{sen}^3.x = \frac{3}{4}\operatorname{sen} x - \frac{1}{4}\operatorname{sen} 3x$$

Ejemplo

Exprese en términos de $\cos x$ y $\operatorname{sen} x$

a) $\cos 5x$ b) $\cos 8x$

Resolución

a) $\cos 5x = \cos^5 x - C_2^5 \cos^3 x \operatorname{sen}^2 x + C_4^5 \cos x \operatorname{sen}^4 x$ (ver página anterior)

$\cos 5x = \cos^5 x - 10\cos^3 x \operatorname{sen}^2 x + 5\cos x \operatorname{sen}^4 x$

Adicionalmente

$\operatorname{sen} 5x = C_1^5 \cos^4 x \operatorname{sen} x - C_3^5 \cos^2 x \operatorname{sen}^3 x + C_5^5 \cos^0 x \operatorname{sen}^5 x$ (ve

$\operatorname{sen} 5x = 5\cos^4 x \operatorname{sen} x - 10\cos^2 x \operatorname{sen}^3 x + \operatorname{sen}^5 x$

Análogamente se puede obtener

b) $\cos 8x = \cos^8 x - C_2^8 \cos^6 x \operatorname{sen}^2 x + C_4^8 \cos^4 x \operatorname{sen}^4 x$

$- C_6^8 \cos^2 x \operatorname{sen}^6 x + C_8^8 \cos^0 x \operatorname{sen}^8 x$

$\cos 8x = \cos^8 x - 28\cos^6 x \operatorname{sen}^2 x + 70\cos^4 x \operatorname{sen}^4 x$

$- 28\cos^2 x \operatorname{sen}^6 x + \operatorname{sen}^8 x$

Lugar Geométrico y Regiones

La parte real $\mathrm{Re}(Z)$, parte imaginaria $\mathrm{Im}(Z)$, módulo $|z|$ y argumento $\mathrm{Arg}(z)$ son números reales, donde $z=x+iy$; entonces se pueden relacionar mediante una igualdad o desigualdad con otras cantidades reales y representarlos en el plano complejo como lugares geométricos o regiones donde se ubican los números complejos.

Ejemplo 1

Ubique todos los números complejos cuya parte real es igual a **a**.

Resolución

Los puntos pertenecientes a la recta vertical $x=a$ (véase figura 9.9), es el lugar geométrico donde se ubican todos los números complejos cuya parte real es igual a **a**.

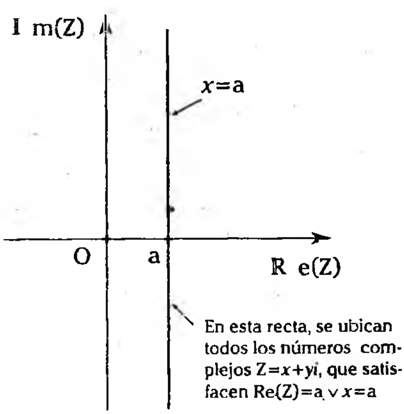


Figura 9.9

Ejemplo 2

Grafique

$\mathrm{Re}(Z) = -2$

Resolución

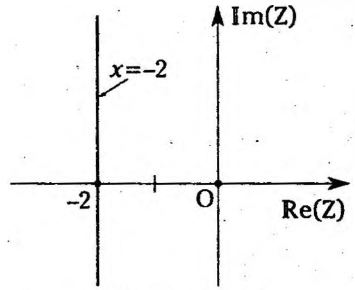


Figura 9.10

Ejemplo 3

Represente todos los números complejos, tal que su parte real sea mayor que **a**.

Resolución

La región sombreada vista de la figura 9.11, representa al conjunto de todos los números complejos, donde la parte real es mayor que **a**.

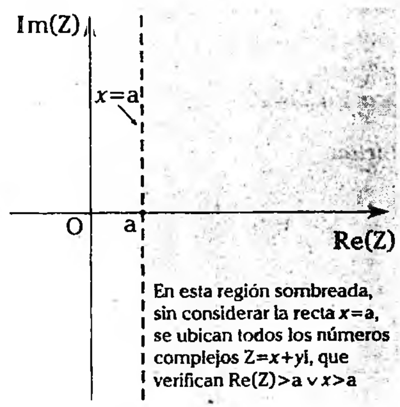


Figura 9.11

Ejemplo 4 Grafique $\mathbb{R}e(Z) \geq 1$

Resolución

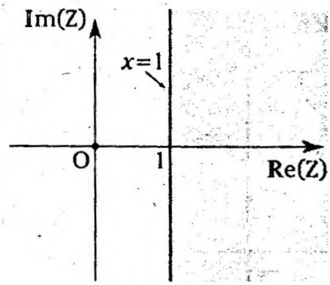


Figura 9.12

Los puntos pertenecientes a la recta horizontal $y=b$, es el lugar geométrico donde se ubican todos los números complejos $Z=x+yi$ cuya parte imaginaria es igual a **b**.
Es decir $\text{Im}(Z)=b$

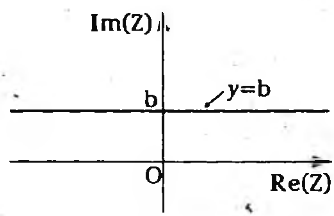


Figura 9.13

Ejemplo 5
Grafique $\text{Im}(Z)=\sqrt{2}$

Resolución

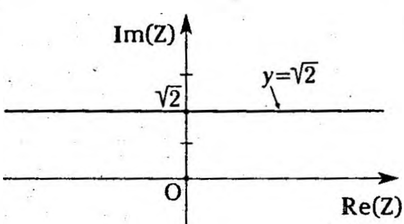
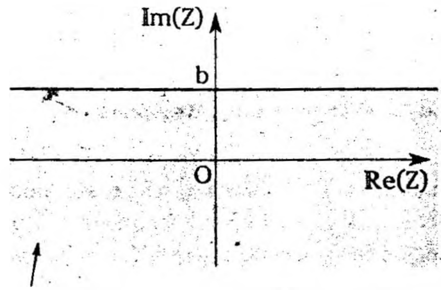


Figura 9.14

La región sombreada incluyendo la recta $y=b$, vista en la figura 9.15, representa el conjunto de todos los números complejos donde la parte imaginaria es menor o igual que b.



En esta región sombreada, se ubican todos los números complejos $Z=x+yi$, que satisfacen
$\text{Im}(Z) \leq b \vee y \leq b$

Figura 9.15

Ejemplo 6
Grafique
$\text{Im}(Z) > -3$

Resolución

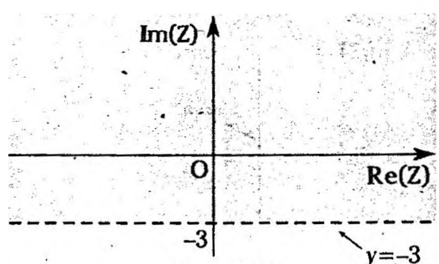
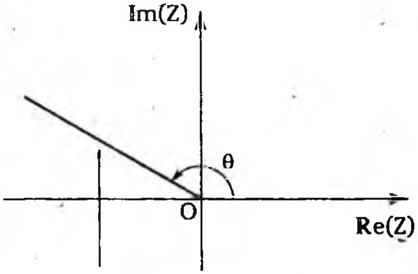


Figura 9.16

Cualquier número complejo no nulo Z, ubicado en el lado final del ángulo θ mostrado en la figura 9.17 tiene el argumento principal igual a θ.



En esta semirrecta se ubican todos los números complejos $Z=x+iy$, que verifican Arg $(Z)=\theta$

Figura 9.17

Ejemplo 7
Grafique
$\text{Arg}(Z)=5\pi/4$

Resolución

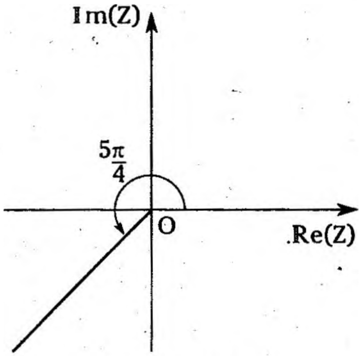
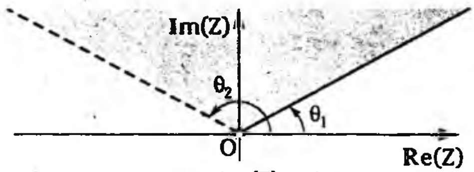


Figura 9.18

Cualquier número complejo Z no nulo, ubicado en la región sombreada incluyendo el lado final de θ_1 (véase figura 9.19), cumple que su argumento principal es mayor o igual a θ_1, pero menor que θ_2, es decir:

$$\theta_1 \leq \text{Arg}(Z) < \theta_2$$



$\theta_1 \leq \text{Arg}(Z) < \theta_2$

Figura 9.19

Ejemplo 8
Grafique

$$-\frac{\pi}{3} < \text{Arg}(Z) \leq \frac{\pi}{2}$$

Resolución

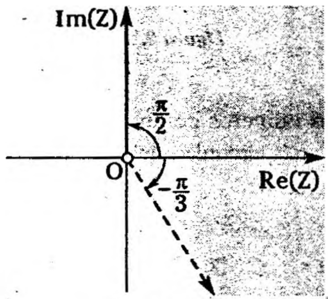


Figura 9.20

Sea Z_0 (Fijo), entonces cualquier número complejo Z ubicado en la región sombreada de la figura 9.21 verifica $\theta_1 \leq \text{Arg}(Z-Z_0) \leq \theta_2$

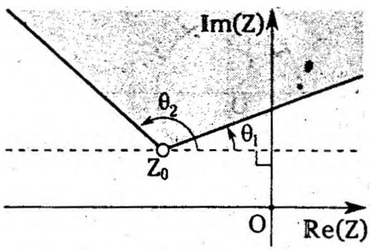


Figura 9.21

Ejemplo 9

Grafique $\frac{\pi}{3} \leq \text{Arg}(Z+2-i) < \frac{5\pi}{6}$

Resolución

$$\frac{\pi}{3} \leq \text{Arg}(Z-\underbrace{(-2+i)}_{Z_0}) < \frac{5\pi}{6}$$

$$Z_0 = -2+i = (-2;1)$$

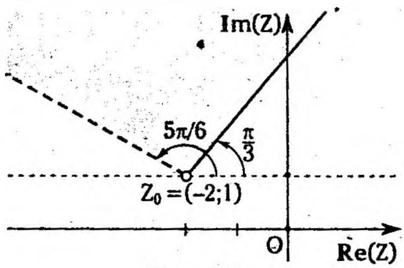


Figura 9.22

Todos los números complejos $Z=x+iy$ que se ubiquen en la circunferencia de radio r, tienen el módulo igual a r.

Es decir

$$|Z| = r$$

$$\sqrt{x^2+y^2} = r$$

$$x^2+y^2 = r^2$$

Graficando

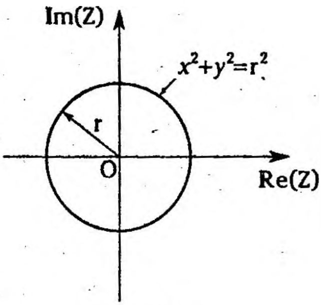


Figura 9.23

Ejemplo 10

Grafique $|Z|=3$

Resolución

En esta circunferencia, se ubican todos los números complejos Z cuyo módulo es $|Z|=3$.

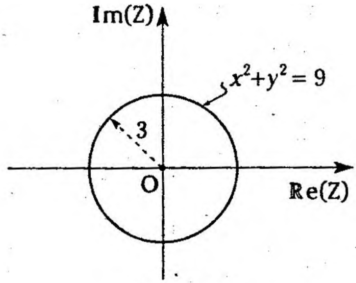


Figura 9.24

Todos los números complejos que se ubiquen en la región interna de la circunferencia de radio r (vea figura 9.25) tienen el módulo menor que r.

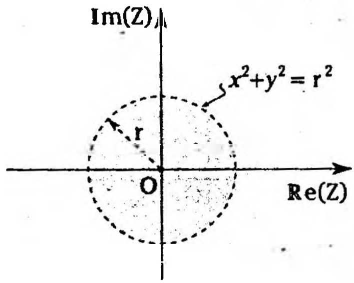


Figura 9.25

En la región sombreada se ubican todos los números complejos Z que cumplen

$|Z|<r$ ó $x^2+y^2<r^2$

Todos los números complejos Z, ubicados en la parte externa de una circunferencia de radio r, incluyendo la misma, tienen el módulo mayor o igual a r.

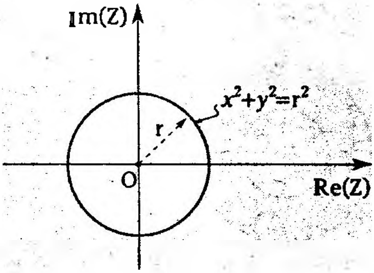


Figura 9.26

En la región sombreada se ubican todos los números complejos Z que verifican $|Z| \geq r$ ó $x^2+y^2 \geq r^2$

Ejemplo 11

Grafique $|Z| > 1$

Resolución

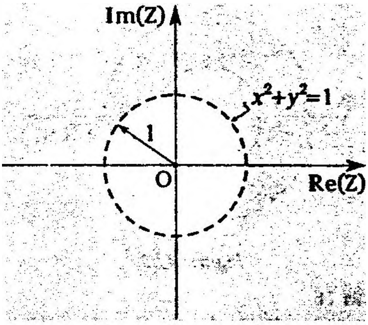


Figura 9.27

La gráfica de $|Z - Z_0| = r$ con Z_0 **fijo**, es una circunferencia con centro en Z_0 y radio r.

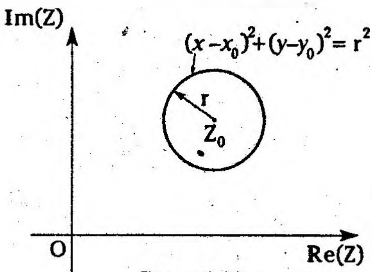


Figura 9.28

donde $Z = (x;y)$ y $Z_0 = (x_0;y_0)$

Ejemplo 12

Grafique la curva representado por $|Z+1+i| = 2$

Resolución $|Z-(\underbrace{-1-i}_{})| = 2$

$z_0 = (-1;-1)$ ...Centro $\wedge$ $r=2$

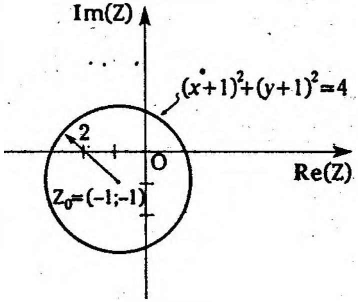


Figura 9.29

La gráfica de $|Z - Z_0| \leq r$ es un círculo incluido la circunferencia de radio r y centro Z_0(fijo)

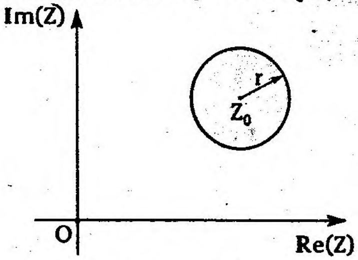


Figura 9.30

Ejemplo 13

Grafique $|Z-2| < \sqrt{2}$

Resolución

$|Z - \underbrace{(2+0i)}| < \sqrt{2}$

$Z_0 = (2;0)$ ... centro y $r=\sqrt{2}$

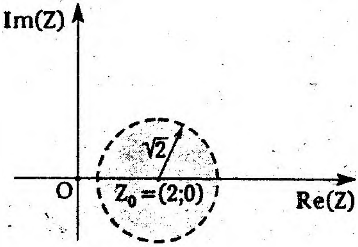


Figura 9.31

La gráfica de $|Z - Z_0| > r$, es la región fuera de la circunferencia, sin incluir la circunferencia con centro en Z_0 (fijo) y radio r.

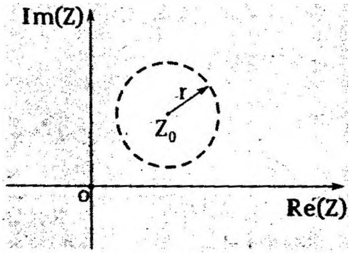


Figura 9.32

Ejemplo 14
Grafique el conjunto de números complejos tales que $\left|Z - \frac{1}{2}i\right| \geq 2$

Resolución

$$\left|Z - \underbrace{\left(0 + \frac{1}{2}i\right)}\right| \geq 2$$

sea $\quad Z_0 = \left(0; \frac{1}{2}\right) \wedge r = 2$

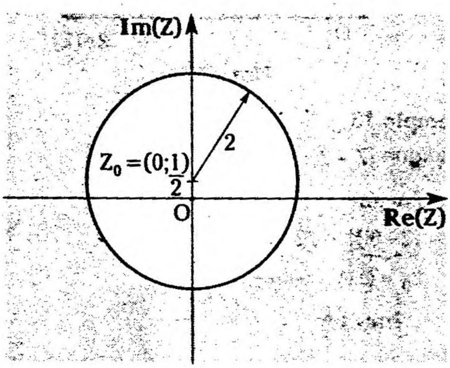


Figura 9.33

Todos los números complejos Z ubicados en la región sombreada (corona circular) de la figura 9.34, incluyendo la circunferencia de radio r_1, tienen el módulo mayor o igual r_1 pero menor a r_2.

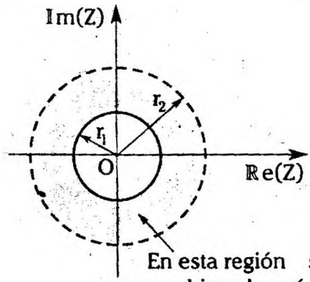


Figura 9.34

En esta región sombreada, se ubican los números $Z = x + iy$, que verifican $r_1 \leq |Z| < r_2$

Ejemplo 15
Grafique los números complejos tales que $\sqrt{3} \leq |Z| < 3$

Resolución

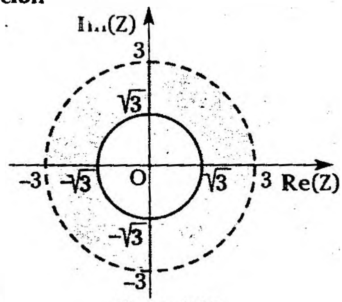


Figura 9.35

Ejemplo 16
Grafique el conjunto de números complejos tales que $1 \leq |Z + 2 - 3i| < 3$

Resolución

$$1 \leq \left|Z - \underbrace{(-2 + 3i)}\right| < 3$$

$$Z_0 = (-2; 3) \wedge r_1 = 1 \wedge r_2 = 3$$

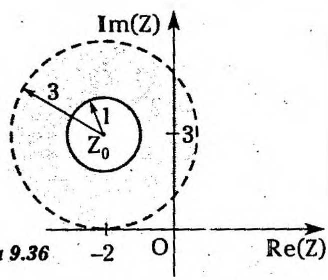


Figura 9.36

Problemas Resueltos

Problema 1

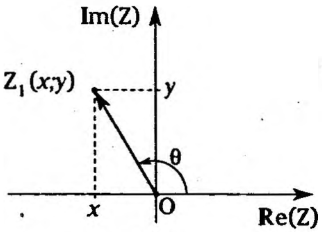
Exprese en la forma trigonométrica los números complejos

i) $Z_1 = -2 + 5i$ *ii)* $Z_2 = a+bi$, si $a<0 \wedge b<0$

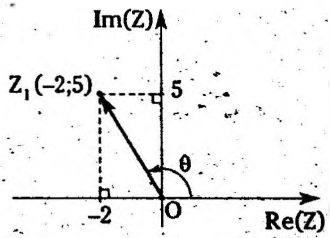
Resolución

i) Ubicando Z_1 en el plano complejo (Vea la figura 9.37(a) y 9.37(b))

$$z_1 = x + iy \quad \Rightarrow x = -2 \;\wedge\; y=5$$



(a)



(b)

Cálculo de $|Z_1|$

$$|Z_1| = \sqrt{(-2)^2 + 5^2} = \sqrt{29}$$

Hallando el argumento principal y general

De la figura $\tan\theta = -\dfrac{5}{2}$

Por ecuaciones trigonométricas sabemos $\theta = K\pi + \arctan\left(-\dfrac{5}{2}\right)$

$$\theta = K\pi - \arctan\left(\frac{5}{2}\right);\; K \in \mathbb{Z}$$

como $\dfrac{\pi}{2} < \theta < \pi$ (véase figura 9.37(b)), entonces $\theta = \pi - \arctan\left(\dfrac{5}{2}\right)$

$$\therefore \text{Arg}(Z_1) = \pi - \arctan\left(\frac{5}{2}\right) \wedge \arg(Z_1) = \pi - \arctan\left(\frac{5}{2}\right) + 2n\pi;\; n \in \mathbb{Z}$$

Finalmente la forma trigonométrica de Z_1, considerando el argumento principal es

$$Z_1 = \sqrt{29}\left\{\cos\left[\pi - \arctan\left(\frac{5}{2}\right)\right] + i\,\text{sen}\left[\pi - \arctan\left(\frac{5}{2}\right)\right]\right\}$$

y considerando $\arg(Z_1)$, tenemos

$$Z_1 = \sqrt{29}\left\{\cos\left[(2n+1)\pi - \arctan\left(\frac{5}{2}\right)\right] + i\,\text{sen}\left[(2n+1)\pi - \arctan\left(\frac{5}{2}\right)\right]\right\};\; n \in \mathbb{Z}$$

ii) Como a y b son números negativos entonces $Z_2=a+ib$ se ubica como muestra la figura 9.37 (c)

Hallando $|Z_2|$

$$|Z_2|=\sqrt{a^2+b^2}$$

Hallando Arg(Z_2) y arg(Z_2)

De la figura $\tan\theta=\dfrac{b}{a}>0$

Por ecuaciones trigonométricas, sabemos $\theta=K\pi+\arctan\left(\dfrac{b}{a}\right);\ K\in\mathbb{Z}$

Como

$\pi<\theta<3\dfrac{\pi}{2}$, (véase figura 9.37), entonces

$$\theta=\pi+\arctan\left(\frac{b}{a}\right)\qquad (\text{haciendo } K=1)$$

$$\text{Arg}(Z_2)=\pi+\arctan\left(\frac{b}{a}\right)\ \wedge\ \arg(Z_2)=\pi+\arctan\left(\frac{b}{a}\right)+2n\pi\ ;\ n\in\mathbb{Z}$$

Finalmente la forma trigonométrica de Z_2, considerando el argumento principal es

$$Z_2=\sqrt{a^2+b^2}\left\{\cos\left[\pi+\arctan\left(\frac{b}{a}\right)\right]+i\,\text{sen}\left[\pi+\arctan\left(\frac{b}{a}\right)\right]\right\}$$

y considerando arg(Z_2), tenemos

$$Z_2=\sqrt{a^2+b^2}\left\{\cos\left[\pi+\arctan\left(\frac{b}{a}\right)+2n\pi\right]+i\,\text{sen}\left[\pi+\arctan\left(\frac{b}{a}\right)+2n\pi\right]\right\};\ n\in\mathbb{Z}$$

Problema 2

Exprese en forma polar el siguiente número complejo

$$Z=\cos\theta+i\,\text{sen}\theta-1\ ;\ \text{si}\ \frac{\pi}{2}<\theta<\pi$$

Resolución

$Z=-(1-\cos\theta)+i\,\text{sen}\theta$ agrupando

$Z=-2\text{sen}^2\dfrac{\theta}{2}+i\times 2\text{sen}\dfrac{\theta}{2}\cos\dfrac{\theta}{2}$ por identidades del arco doble

$Z=2\text{sen}\dfrac{\theta}{2}\left[-\text{sen}\dfrac{\theta}{2}+i\cos\dfrac{\theta}{2}\right]$ factorizando $2\text{sen}\dfrac{\theta}{2}$

$Z=2\text{sen}\dfrac{\theta}{2}\left[\text{sen}\left(-\dfrac{\theta}{2}\right)+i\cos\left(-\dfrac{\theta}{2}\right)\right]$ por identidades sen($-x$) = $-$sen$x$ y cos($-x$) = cos$x$

$Z=2\text{sen}\dfrac{\theta}{2}\left[\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\theta}{2}\right)+i\,\text{sen}\left(\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\theta}{2}\right)\right]$ por reducción al primer cuadrante

Como $2\text{sen}\frac{\theta}{2}$ es positivo, ya que

$$\frac{\pi}{4}<\frac{\theta}{2}<\frac{\pi}{2} \Rightarrow \sqrt{2}<2\text{sen}\frac{\theta}{2}<2$$

$$\text{y } \frac{3\pi}{4}<\frac{\pi}{2}+\frac{\theta}{2}<\pi,$$

entonces la forma polar de Z, considerando

$$a\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\theta}{2}\right)$$

como argumento principal, será

$$Z=2\text{sen}\frac{\theta}{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\theta}{2}\right)+i\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\theta}{2}\right)\right]$$

$$\Rightarrow \begin{cases}|Z|=2\text{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)\\ \text{Arg}(Z)=\frac{\pi}{2}+\frac{\theta}{2}\end{cases}$$

Problema 3

Si

$$Z=\left\{\frac{5+5i}{10\sqrt{3}+10i}\right\}^{36}$$

calcule $\text{Log}_2(-Z)$

Resolución

$$Z=\left\{\frac{5(1+i)}{10(\sqrt{3}+i)}\right\}^{36}=\left\{\frac{1+i}{2(\sqrt{3}+i)}\right\}^{36}$$

$$\Rightarrow Z=\left\{\frac{\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\text{sen}\frac{\pi}{4}\right)}{2\times 2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\text{sen}\frac{\pi}{6}\right)}\right\}^{36}$$

Aplicando la fórmula de D' Moivre

$$Z=\frac{\sqrt{2}^{36}\left[\cos\left(36\frac{\pi}{4}\right)+i\text{sen}\left(36\frac{\pi}{4}\right)\right]}{4^{36}\left[\cos\left(36\frac{\pi}{6}\right)+i\text{sen}\left(36\frac{\pi}{6}\right)\right]}$$

$$\Rightarrow Z=\frac{2^{18}[\cos 9\pi+i\text{sen}9\pi]}{2^{72}[\cos 6\pi+i\text{sen}6\pi]}$$

$$Z=2^{-54}\times\frac{-1+i0}{1+i0}=-2^{-54}$$

luego

$$Z=-2^{-54}\Rightarrow -Z=2^{-54}$$

Piden calcular

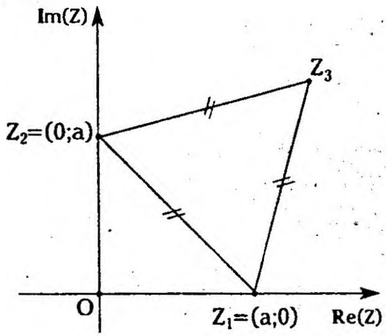
$$\text{Log}_2(-Z)=\text{Log}_2(2^{-54})=-54\underbrace{\text{Log}_2 2}_{1}=-54$$

$$\therefore \text{Log}_2(-Z)=-54$$

Problema 4

En la figura mostrada, se cumple $|Z_2-Z_1|=4$

Exprese el producto $(Z_1Z_2Z_3)$ en su forma cartesiana.



(a)

Resolución

De la figura

- $Z_1 = a + 0i$
- $Z_2 = 0 + ai$

Como $|Z_2-Z_1|=4$

$$\Rightarrow |0+ai-(a+0i)|=4$$

$$\Rightarrow \sqrt{(-a)^2+a^2}=4$$

$$\Rightarrow \sqrt{2a^2}=4$$

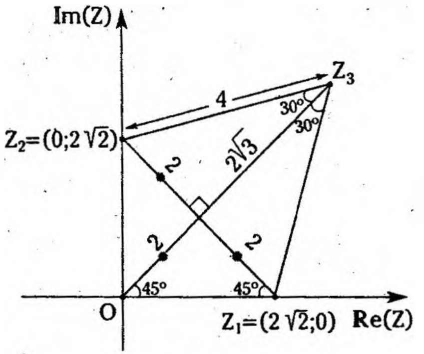
$$\Rightarrow a^2=8$$

$$\Rightarrow a=\pm 2\sqrt{2}$$

como a>0

$$\therefore a=2\sqrt{2}$$

Reemplazando $a=2\sqrt{2}$ en la figura 9.38(a) obtenemos la figura 9.38(b)



(b)
Figura 9.38

De la figura 9.38(b) tenemos que

- Para Z_1: $|Z_1|=2\sqrt{2} \wedge Arg(Z_1)=0$

$$\Rightarrow Z_1=2\sqrt{2}e^{i0}$$

- Para Z_2: $|Z_2|=2\sqrt{2} \wedge Arg(Z_2)=\frac{\pi}{2}$

$$\Rightarrow Z_2=2\sqrt{2}e^{i\pi/2}$$

- Para Z_3: $|Z_3|=2+2\sqrt{3} \wedge Arg(Z_3)=\frac{\pi}{4}$

$$\Rightarrow Z_3=(2+2\sqrt{3})e^{i\pi/4}$$

Piden $(Z_1Z_2Z_3)$ en su forma cartesiana

$$\Rightarrow (Z_1Z_2Z_3) = \underbrace{(Z_1)}\ \underbrace{(Z_2)}\ \underbrace{(Z_3)}$$

$$(Z_1Z_2Z_3) = (2\sqrt{2}e^{i0})(2\sqrt{2}e^{i\pi/2})\left((2+2\sqrt{3})e^{i\pi/4}\right)$$

$$(Z_1Z_2Z_3) = 8(2+2\sqrt{3})e^{i\left(0+\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}$$

$$(Z_1Z_2Z_3) = 16(1+\sqrt{3})e^{i\left(\frac{3\pi}{4}\right)}$$

$$(Z_1Z_2Z_3) = 16(1+\sqrt{3})\left[\underbrace{\cos\frac{3\pi}{4}}+i\underbrace{\operatorname{sen}\frac{3\pi}{4}}\right]$$

$$(Z_1Z_2Z_3) = 16(1+\sqrt{3})\left[-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$$

$$\therefore Z_1Z_2Z_3 = -8\sqrt{2}(1+\sqrt{3})+8\sqrt{2}(1+\sqrt{3})i$$

Problema 5

Si

$$Z=2\cos\theta+i\operatorname{sen}3\theta\text{, donde } i=\sqrt{-1}$$

además

$$|Z|^2+|Z|=6 \wedge \frac{\pi}{2}<\theta\leq 5\frac{\pi}{6}$$

Exprese en forma polar el número complejo Z.

Resolución

Hallando el módulo de Z, de la ecuación dada e el problema

$$|Z|^2+|Z|=6 \Rightarrow |Z|^2+|Z|-6=0$$

Factorizando $\Rightarrow (|Z|+3)(|Z|-2)=0$

Igualando cada factor a cero

$$\Rightarrow |Z|=-3 \quad \text{o} \quad |Z|=2$$

Como $|Z|>0 \Rightarrow |Z|=2$ ...(1)

De la condición

$$Z=2\cos\theta+i\operatorname{sen}3\theta \Rightarrow |Z|=|2\cos\theta+i\operatorname{sen}3\theta| \quad ...(2)$$

Reemplazando(1)en(2)

$$2=\sqrt{(2\cos\theta)^2+(\operatorname{sen}3\theta)^2}$$

Elevando al cuadrado

$$4=4\cos^2\theta+\operatorname{sen}^2 3\theta$$

$$4(1-\cos^2\theta)=\operatorname{sen}^2 3\theta$$

Por identidades fundamentales

$$4\text{sen}^2\theta = \text{sen}^2 3\theta \text{ ; pero } \text{sen}3\theta = 3\text{sen}\theta - 4\text{sen}^3\theta$$

$$\Rightarrow 4\text{sen}^2\theta = \text{sen}^2\theta[3-4\text{sen}^2\theta]^2 \text{ ; como } \frac{\pi}{2} < \theta \leq 5\frac{\pi}{6} \text{ , entonces}$$

$$\frac{1}{2} \leq \text{sen}\theta < 1 \qquad \therefore \frac{1}{4} \leq \text{sen}^2\theta < 1 \text{, entonces cancelamos } \text{sen}^2\theta$$

sin igualar a cero ya que $\text{sen}^2\theta \neq 0$, obteniendo

$$4 = [3 - 4\text{sen}^2\theta]^2$$

$$\Rightarrow \pm 2 = 3 - 4\text{sen}^2\theta$$

$$\Rightarrow \text{sen}^2\theta = \frac{1}{4} \quad \text{ó} \quad \text{sen}^2\theta = \frac{5}{4}$$

Como $\frac{1}{4} \leq \text{sen}^2\theta < 1$ se tiene $\text{sen}^2\theta = \frac{1}{4}$

$$\Rightarrow \text{sen}\theta = \pm\frac{1}{2}$$

Como $\frac{1}{2} \leq \text{sen}\theta < 1$ consideremos $\text{sen}\theta = \frac{1}{2}$; como $\frac{\pi}{2} < \theta \leq \frac{5\pi}{6} \Rightarrow \theta = \frac{5\pi}{6}$

Reemplazamos $\theta = \frac{5\pi}{6}$ en $Z = 2\cos\theta + i\text{sen}3\theta$, obteniendo

$$Z = 2\cos 5\frac{\pi}{6} + i\text{sen}3\left(\frac{5\pi}{6}\right) = 2 \times \frac{-\sqrt{3}}{2} + i \times 1$$

$$Z = -\sqrt{3} + i = 2\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\text{sen}\frac{5\pi}{6}\right) \qquad \text{... forma polar de Z}$$

Generalizando la forma polar de Z, obtenemos

$$Z = 2\left[\cos\left(\frac{5\pi}{6} + 2n\pi\right) + i\text{sen}\left(\frac{5\pi}{6} + 2n\pi\right)\right] \text{ ; } n \in \mathbb{Z}$$

Problema 6

Calcule el argumento principal y módulo del siguiente número complejo: $Z = (1+i)^{7-i}\ (\sqrt{2})^{i-7}$

Resolución

Como $1 + i = \sqrt{2}e^{i\pi/4}$ y $\sqrt{2}^{i-7} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{7-i}$,

entonces $Z = (\sqrt{2}e^{i\pi/4})^{7-i}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{7-i} = \left[(\sqrt{2}e^{i\pi/4})\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right]^{7-i} = [e^{i\pi/4}]^{7-i} = e^{\frac{\pi}{4}+i7\frac{\pi}{4}} = e^{\frac{\pi}{4}} \times e^{i7\frac{\pi}{4}}$

De la forma exponencial de un número complejo $Z = re^{i\theta}$ donde
$|Z| = r$ y $Arg(Z) = \theta$, tenemos

$$Z = e^{\pi/4}e^{i7\pi/4} \Rightarrow |Z| = e^{\pi/4} \quad \wedge \quad Arg(Z) = \frac{7\pi}{4}$$

Problema 7

De la siguiente identidad $sen7\alpha = A\cos^6\alpha sen\alpha + B\cos^4\alpha sen^3\alpha + C\cos^2\alpha sen^5\alpha + Dsen^7\alpha$
Calcule los coeficientes A, B, C y D

Resolución

Del teorema de D'Moivre, tenemos $\cos 7\alpha + isen7\alpha = (\cos\alpha + isen\alpha)^7$ ...(*)
Para desarrollar $(\cos\alpha + isen\alpha)^7$ podemos utilizar el binomio de Newton o el triángulo de Pascal.
Para este problema haremos uso del triángulo de Pascal, para determinar los coeficientes del desarrollo del binomio a la séptima.

1 1 ⟶ $(a+b)^1 = a + b$
1 2 1 ⟶ $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
1 3 3 1 ⟶ $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1 ⋮
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1 ⟶ $(a+b)^7 = a^7 + 7a^6b + 21a^5b^2 + 35a^4b^3 + 35a^3b^4 + 21a^2b^5 + 7ab^6 + b^7$

Entonces en el segundo miembro de (*) tenemos

$$\underline{\cos 7\alpha + isen7\alpha} = \cos^7\alpha + 7\cos^6\alpha(isen\alpha) + 21\cos^5\alpha(isen\alpha)^2 + 35\cos^4\alpha(isen\alpha)^3 + 35\cos^3\alpha(isen\alpha)^4 + 21\cos^2\alpha(isen\alpha)^5 + 7\cos\alpha(isen\alpha)^6 + (isen\alpha)^7$$

$$\underline{\cos 7\alpha + isen7\alpha} = \cos^7\alpha + i7\cos^6\alpha sen\alpha - 21\cos^5\alpha sen^2\alpha - i35\cos^4\alpha sen^3\alpha + 35\cos^3\alpha sen^4\alpha + i21\cos^2\alpha sen^5\alpha - 7\cos\alpha sen^6\alpha - isen^7\alpha$$

Agrupando la parte real e imaginaria, obtenemos

$$\cos 7\alpha + isen7\alpha = \cos^7\alpha - 21\cos^5\alpha sen^2\alpha + 35\cos^3\alpha sen^4\alpha - 7\cos\alpha sen^6\alpha + i[-sen^7\alpha + 21\cos^2\alpha sen^5\alpha - 35\cos^4\alpha sen^3\alpha + 7\cos^6\alpha sen\alpha]$$

Igualando parte real y parte imaginaria, de ambos miembros tenemos

$$\cos 7\alpha = \cos^7\alpha - 21\cos^5\alpha sen^2\alpha + 35\cos^3\alpha sen^4\alpha - 7\cos\alpha sen^6\alpha$$

$$sen7\alpha = -sen^7\alpha + 21\cos^2\alpha sen^5\alpha - 35\cos^4\alpha sen^3\alpha + 7\cos^6\alpha sen\alpha$$

$$\Rightarrow sen7\alpha = 7\cos^6\alpha sen\alpha + (-35)\cos^4\alpha sen^3\alpha + 21\cos^2\alpha sen^5\alpha + (-1)sen^7\alpha \quad ...(1)$$

De la identidad del problema

$$\text{sen}7\alpha = A\cos^6\alpha\,\text{sen}\alpha + 13\cos^4\alpha\,\text{sen}^3\alpha + C\cos^2\alpha\,\text{sen}^5\alpha + D\,\text{sen}^7\alpha \qquad ...(2)$$

De (1) $\wedge$ (2): $A=7$; $B=-35$; $C=21$; $D=-1$

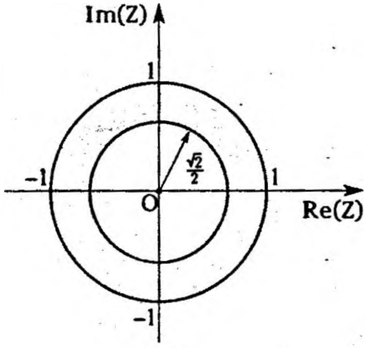
Problema 8

Represente en el plano complejo los números $Z=x+iy$ que verifiquen $\frac{\sqrt{2}}{2} \leq |Z| \leq 1 \ \wedge \ \frac{\pi}{4} \leq \text{Arg}(Z+i) \leq \frac{3\pi}{4}$

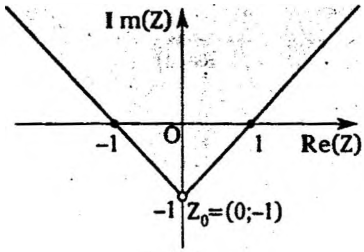
Resolución

a) La gráfica de $\frac{\sqrt{2}}{2} \leq |Z| \leq 1$

b) La gráfica de $\frac{\pi}{4} \leq \text{Arg}(Z+i) \leq \frac{3\pi}{4}$

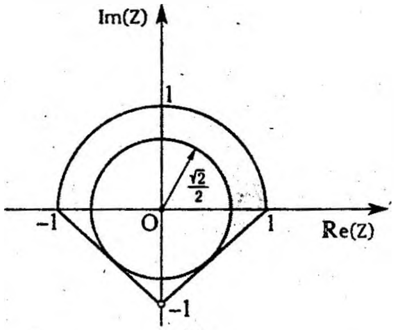


(a)



(b)

Si intersectamos las regiones obtenidas en (a) y (b) obtendremos la región pedida.



(c)

Figura 9.39

Problema 9

Indique las regiones que se definen en el plano de Gauss mediante las relaciones siguientes: $(Z = x+iy; i=\sqrt{-1})$

a) $|Z| \leq 1 \ \wedge \ |\text{Im}(Z)| \geq |\text{Re}(Z)|^2$

b) $|\text{Re}(Z)||\text{Im}(Z)| > 1 \ \wedge \ |Z| < 2$

c) $\left|e^{Z^2}\right| < 1$

Resolución

a) $|Z| \leq 1 \wedge |\text{Im}(Z)| \geq |\text{Re}(Z)|^2$

$|Z|^2 \leq 1 \wedge |y| \geq |x|^2$

$\Rightarrow x^2+y^2 \leq 1 \wedge |y| \geq x^2$

La región obtenida en el plano complejo, será la intersección de las regiones obtenidas en la figura 9.40(a) y figura 9.40(b)

Graficando las relaciones anteriores en el plano de Gauss

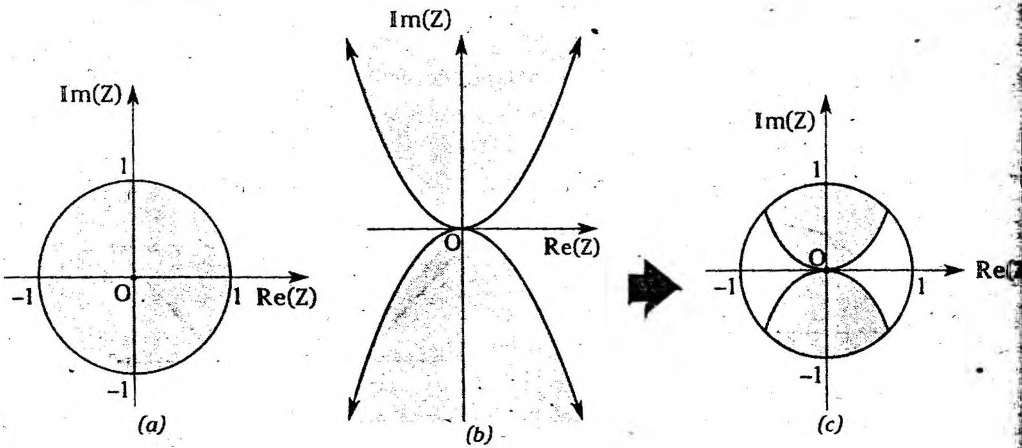


Figura 9.40

b) $|\text{Re}(Z)||\text{Im}(Z)| > 1 \ \wedge |Z| < 2$

$|x||y| > 1 \wedge |Z|^2 < 4$

$|xy| > 1 \wedge x^2+y^2 < 4$

El recinto requerido en el plano complejo, será la intersección de las regiones obtenidas en la figura 9.41(a) y figura 9.41 (b)

Graficando las relaciones anteriores:

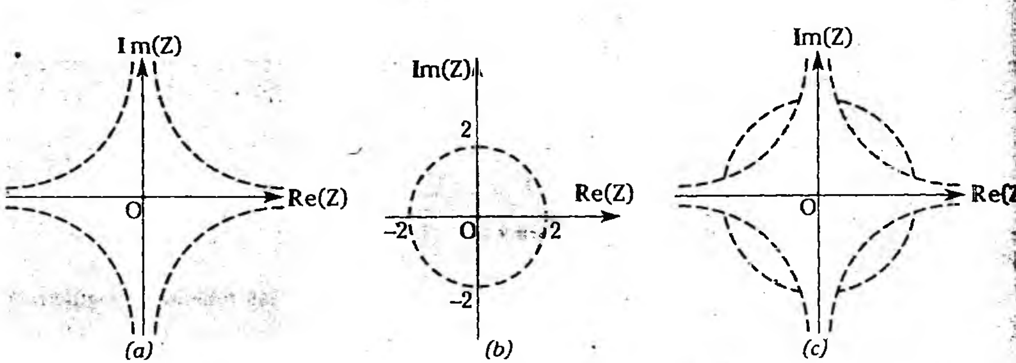


Figura 9.41

c) Para obtener la región pedida se tiene que buscar una relación entre x e y, para ello planteamos:

Como $Z = x + iy \Rightarrow Z^2 = x^2 - y^2 + i2xy$

$$\Rightarrow e^{Z^2} = e^{x^2-y^2+i2xy}$$

$$\Rightarrow e^{Z^2} = e^{x^2-y^2}e^{i2xy}$$

$$\Rightarrow |e^{Z^2}| = e^{x^2-y^2}$$

Por condición

$$|e^{Z^2}| < 1 \Rightarrow e^{x^2-y^2} < 1$$

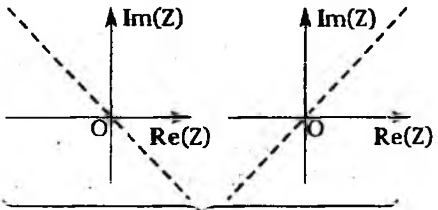
$$\Rightarrow x^2 - y^2 < 0$$

$$\Rightarrow (x+y)(x-y) < 0$$

$$\Rightarrow x+y>0 \wedge x-y<0 \vee x+y<0 \wedge x-y>0$$

$$\Rightarrow (y>-x \;\wedge\; y>x) \vee (y<-x \;\wedge\; y<x)$$

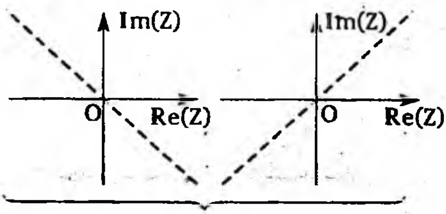
i)



Intersectando

(a)

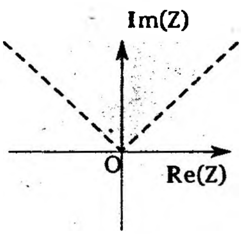
ii)



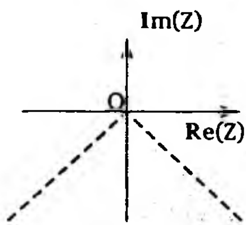
Intersectando

(b)

De las figuras 9.42(a) y 9.42(b) se obtienen

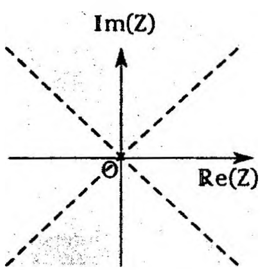


(c)



(d)

Uniendo las regiones de las figuras 9.42(c) y 9.42(d), se obtiene la región pedida. Para ello observe el gráfico de la figura 9.42(e)

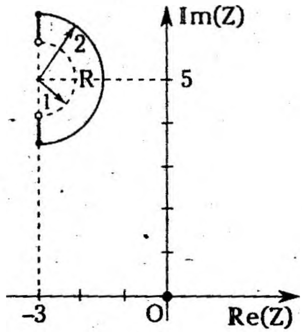


(e)

Figura 9.42

Problema 10

Determine el conjunto de los números complejos correspondientes a la región R, representado en la figura 9.43(a).



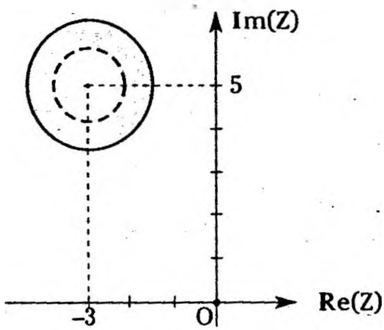
(a)

Resolución

La región R puede estar determinada, para un $Z=x+iy$, mediante las siguientes relaciones

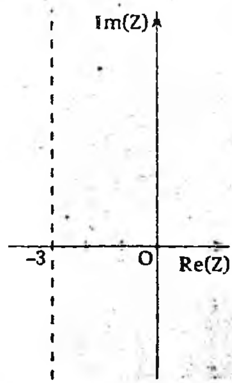
a) $1<|Z-(\underbrace{-3+5i}))|\leq 2$

$Z_0=(-3;5)$



(b)

b) $\text{Re}(Z)>-3$



(c)

Si interceptamos lo obtenido en a y b, se logra obtener la región R, en consecuencia R se puede representar por el conjunto

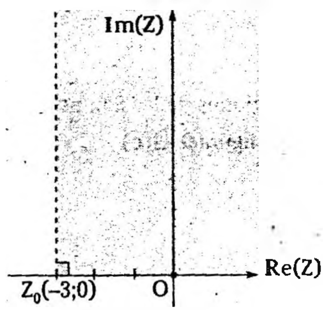
$$R=\{Z\in\mathbb{C}/1<|Z+3-5i|\leq 2\ \wedge\ \text{Re}(Z)>-3\}$$

Otra forma de obtener la región R representado como un conjunto de números complejos es intersectando las regiones obtenidas en a) y c) si

c) $0\leq \text{Arg}(Z+3)<\frac{\pi}{2}$

$0\leq \text{Arg}(Z-\underbrace{(-3+0i)})<\frac{\pi}{2}$

$Z_0=(-3;0)$



(d)

Figura 9.43

Intersectando a) y c), obtenemos la región R entonces

$$R=\left\{Z\in\mathbb{C}/1<|Z+3-5i|\leq 2\ \wedge\ 0\leq \text{Arg}(Z+3)<\frac{\pi}{2}\right\}$$

Problema 11

Utilice la Teoría de Números Complejos para hallar las siguientes sumas

a) $1+\cos x+\cos 2x+ \dots + \cos nx$

b) $\operatorname{sen}x + 2\operatorname{sen}2x + 3\operatorname{sen}3x + \dots + n\operatorname{sen}nx$

c) $\frac{1}{2}\operatorname{sen}x + \frac{1}{4}\operatorname{sen}2x + \frac{1}{8}\operatorname{sen}3x + \dots$

Resolución

a) Para hallar la suma de términos consideramos otra suma de la forma

$$iM = i\operatorname{sen}x + i\operatorname{sen}2x + i\operatorname{sen}3x + \dots + i\operatorname{sen}nx$$

$$N = 1+\cos x+\cos 2x+\cos 3x+ \dots + \cos nx$$

$$N+iM = 1+\underbrace{\cos x + i\operatorname{sen}x}+\underbrace{\cos 2x+i\operatorname{sen}2x}+\underbrace{\cos 3x+i\operatorname{sen}3x}+\dots+\underbrace{\cos nx+i\operatorname{sen}nx}$$

$$N+iM = 1+ e^{ix} + e^{i2x} + e^{i3x} + \dots + e^{inx}$$

Sea $e^{ix}=a$

Considerando

$$1+a+a^2+a^3+\dots+a^n=\frac{a^{n+1}-1}{a-1}$$

Luego

$$N+iM=1+e^{ix}+(e^{ix})^2+(e^{ix})^3+(e^{ix})^4+\dots+(e^{ix})^n$$

$$N+iM=1+a+a^2+a^3+a^4+\dots+a^n$$

$$N+iM=\frac{(e^{ix})^{n+1}-1}{e^{ix}-1} \quad \dots\dots\dots\dots (*)$$

$$N+iM=\frac{(e^{ix})^{n+1}-1}{e^{ix}-1}=\frac{e^{\frac{ix(n+1)}{2}}}{e^{\frac{ix}{2}}}\left(\frac{e^{\frac{ix(n+1)}{2}}-e^{\frac{-ix(n+1)}{2}}}{e^{\frac{ix}{2}}-e^{-\frac{ix}{2}}}\right)$$

Por definición

$$\operatorname{sen}\left(\frac{x(n+1)}{2}\right)=\frac{e^{\frac{ix(n+1)}{2}}-e^{\frac{-ix(n+1)}{2}}}{2i}$$

Reemplazando

$$N+iM=\frac{2i\operatorname{sen}\left(\frac{x(n+1)}{2}\right)}{2i\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)}e^{i\left(\frac{x(n+1)}{2}-\frac{x}{2}\right)}$$

$$N+iM=\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{x(n+1)}{2}\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)}e^{i\left(\frac{xn}{2}\right)}$$

$$N+iM=\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{x(n+1)}{2}\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)}\left[\cos\frac{xn}{2}+i\operatorname{sen}\frac{xn}{2}\right]$$

$$N=\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{x(n+1)}{2}\right)\cos\frac{xn}{2}}{\operatorname{sen}\frac{x}{2}}$$

$$M=\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{x(n+1)}{2}\right)\operatorname{sen}\frac{xn}{2}}{\operatorname{sen}\frac{x}{2}}$$

Finalmente podemos concluir que

$$1+\cos x+\cos 2x+\cos 3x+\dots+\cos nx=\frac{\operatorname{sen}(n+1)\frac{x}{2}\cos\frac{nx}{2}}{\operatorname{sen}\frac{x}{2}}$$

$$\operatorname{sen}x+\operatorname{sen}2x+\operatorname{sen}3x+\dots+\operatorname{sen}nx=\frac{\operatorname{sen}(n+1)\frac{x}{2}\operatorname{sen}\frac{nx}{2}}{\operatorname{sen}\frac{x}{2}}$$

b) Sean

$$A = \cos x + 2\cos 2x + 3\cos 3x + ... + n\cos nx$$

$$iB = i\operatorname{sen}x + i2\operatorname{sen}2x + i3\operatorname{sen}3x + ... + ni\operatorname{sen}nx$$

$$A + iB = (\cos x + i\operatorname{sen}x) + 2(\cos 2x + i\operatorname{sen}2x) + 3(\cos 3x + i\operatorname{sen}3x) + ... + n(\cos nx + i\operatorname{sen}x)$$

$$= e^{ix} + 2e^{i2x} + 3e^{i3x} + ... + ne^{inx}$$

Sea $Z = e^{ix}$,

entonces

$$A + iB = Z + 2Z^2 + 3Z^3 + ... + nZ^n \qquad ...(1)$$

$$\Rightarrow Z(A + iB) = Z^2 + 2Z^3 + 3Z^4 + ... + nZ^{n+1} \qquad ...(2)$$

Restando (1) y (2)

$$A + iB - Z(A + iB) = \underline{Z + Z^2 + Z^3 + ... + Z^n} - nZ^{n+1}$$

$$(A + iB)(1 - Z) = \frac{Z - Z^{n+1}}{1 - Z} - nZ^{n+1}$$

$$(A + iB)(1 - Z) = \frac{Z - Z^{n+1} - nZ^{n+1} + nZ^{n+2}}{1 - Z}$$

Reemplazando $Z = e^{ix}$ tenemos

$$A + iB = \frac{e^{ix} - (n+1)[e^{ix}]^{n+1} + n[e^{ix}]^{n+2}}{(1 - e^{ix})^2}$$

$$A + iB = \frac{e^{ix} - (n+1)e^{i(nx+x)} + ne^{i(nx+2x)}}{(1 - e^{ix})^2}$$

Pero

$$(1 - e^{ix})^2 = (1 - \cos x - i\operatorname{sen}x)^2 = \left[2\operatorname{sen}^2\frac{x}{2} - i2\operatorname{sen}\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\right]^2$$

$$(1 - e^{ix})^2 = \left[2\operatorname{sen}\frac{x}{2}\left(\operatorname{sen}\frac{x}{2} - i\cos\frac{x}{2}\right)\right]^2 = \left[2\operatorname{sen}\frac{x}{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{2}\right) - i\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{2}\right)\right)\right]^2$$

$$(1 - e^{ix})^2 = 4\operatorname{sen}^2\frac{x}{2}(\cos(\pi - x) - i\operatorname{sen}(\pi - x)) = 4\operatorname{sen}^2\frac{x}{2}(-\cos x - i\operatorname{sen}x)$$

$$(1 - e^{ix})^2 = -4\operatorname{sen}^2\frac{x}{2}(\cos x + i\operatorname{sen}x) = -4\operatorname{sen}^2\frac{x}{2}e^{ix}$$

$$\Rightarrow A + iB = \frac{e^{ix} - (n+1)e^{i(nx+x)} + ne^{i(nx+2x)}}{\left(-4\text{sen}^2\frac{x}{2}\right)e^{ix}}$$

$$A + iB = \frac{\left(e^{ix} - (n+1)e^{i(nx+x)} + ne^{i(nx+2x)}\right)e^{-ix}}{\left(-4\text{sen}^2\frac{x}{2}\right)e^{ix}\left(e^{-ix}\right)}$$

$$A + iB = \frac{\overbrace{e^0}^{1} - (n+1)e^{i(nx)} + ne^{i(nx+x)}}{\left(-4\text{sen}^2\frac{x}{2}\right)\underbrace{e^0}_{1}}$$

$$A + iB = \frac{(n+1)e^{i(nx)} - ne^{i(nx+x)} - 1}{4\text{sen}^2\frac{x}{2}}$$

$$A + iB = \frac{(n+1)[\cos nx + i\,\text{sen}\,nx] - n[\cos(nx+x) + i\,\text{sen}(nx+x)] - 1}{4\text{sen}^2\frac{x}{2}}$$

$$A + iB = \frac{(n+1)\cos nx + i(n+1)\text{sen}\,nx - n\cos(nx+x) - i\,n\,\text{sen}(nx+x) - 1}{4\text{sen}^2\frac{x}{2}}$$

$$A + iB = \frac{(n+1)\cos nx - n\cos(n+1)x - 1 + i\,[(n+1)\text{sen}\,nx - n\,\text{sen}(n+1)x]}{4\text{sen}^2\frac{x}{2}}$$

$$\Rightarrow A + iB = \frac{(n+1)\cos nx - n\cos(n+1)x - 1}{4\text{sen}^2\frac{x}{2}} + \frac{i\,[(n+1)\text{sen}\,nx - n\,\text{sen}(n+1)x]}{4\text{sen}^2\frac{x}{2}}$$

$$\Rightarrow A = \frac{(n+1)\cos nx - n\cos(n+1)x - 1}{4\text{sen}^2\frac{x}{2}} \quad \wedge \quad B = \frac{(n+1)\text{sen}\,nx - n\,\text{sen}(n+1)x}{4\text{sen}^2\frac{x}{2}}$$

Finalmente podemos concluir que

$$\cos x + 2\cos 2x + 3\cos 3x + \ldots + n\cos nx = \frac{(n+1)\cos nx - n\cos(n+1)x - 1}{4\text{sen}^2\frac{x}{2}}$$

$$\text{sen}\,x + 2\,\text{sen}\,2x + 3\,\text{sen}\,3x + \ldots + n\,\text{sen}\,nx = \frac{(n+1)\text{sen}\,nx - n\,\text{sen}(n+1)x}{4\text{sen}^2\frac{x}{2}}$$

c) Sean

$$A=\frac{1}{2}\cos x+\frac{1}{4}\cos 2x+\frac{1}{8}\cos 3x+ .... + \frac{1}{2^n}\cos nx$$

$$iB=i\frac{1}{2}\operatorname{sen}x+i\frac{1}{4}\operatorname{sen}2x+i\frac{1}{8}\operatorname{sen}3x+ ... + i\frac{1}{2^n}\operatorname{sen}nx$$

$$\Rightarrow A+iB=\frac{1}{2}(\cos x+i\operatorname{sen}x)+\frac{1}{4}(\cos 2x+i\operatorname{sen}2x)+\frac{1}{8}(\cos 3x+i\operatorname{sen}3x) + ... + \frac{1}{2^n}(\cos nx+i\operatorname{sen}nx)$$

$$=\frac{1}{2}e^{ix}+\frac{1}{4}e^{i2x}+\frac{1}{8}e^{i3x}+ ... + \frac{1}{2^n}e^{inx}$$

Sea $\frac{1}{2}e^{ix} = Z \Rightarrow \frac{1}{4}e^{i2x} = Z^2$; $\frac{1}{8}e^{i3x} = Z^3$; ... etc.

$$\Rightarrow A + iB=\underline{Z+Z^2+Z^3+ ... + Z^n}$$

$$A + iB=\frac{Z - Z^{n+1}}{1-Z}$$

Reemplazando $Z = \frac{1}{2}e^{ix}$ tenemos

$$A + iB=\frac{\frac{1}{2}e^{ix} - \left(\frac{1}{2}e^{ix}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}e^{ix}}$$

$$A + iB=\frac{\frac{1}{2}e^{ix} - \frac{1}{2^{n+1}}e^{i(nx+x)}}{1 - \frac{1}{2}e^{ix}}$$

$$A + iB=\frac{\left[\frac{1}{2}e^{ix} - \frac{1}{2^{n+1}}e^{i(nx+x)}\right]\left(1-\frac{1}{2}e^{-ix}\right)}{\left(1 - \frac{1}{2}e^{ix}\right)\left(1 - \frac{1}{2}e^{-ix}\right)}$$

$$A + iB=\frac{\frac{1}{2}e^{ix} - \frac{1}{2^{n+1}}e^{i(nx+x)} - \frac{1}{4}e^{0} + \frac{1}{2^{n+2}}e^{i(nx)}}{1 - \frac{1}{2}e^{ix} - \frac{1}{2}e^{-ix}+ \frac{1}{4}e^{0}}$$

$$A + iB=\frac{\frac{1}{2}[\cos x+i\operatorname{sen}x]-\frac{1}{2^{n+1}}[\cos(nx+x)+i\operatorname{sen}(nx+x)]-\frac{1}{4}+\frac{1}{2^{n+2}}[\cos nx+i\operatorname{sen}nx]}{1 - \frac{1}{2}(e^{ix}+e^{-ix})+ \frac{1}{4}}$$

$$A+iB=\frac{\frac{1}{2}\cos x-\frac{1}{2^{n+1}}\cos(n+1)x+\frac{1}{2^{n+2}}\cos nx-\frac{1}{4}+i\left[\frac{1}{2}\operatorname{sen}x-\frac{1}{2^{n+1}}\operatorname{sen}(n+1)x+\frac{1}{2^{n+2}}\operatorname{sen}nx\right]}{\frac{5}{4}-\frac{1}{2}(2\cos x)}$$

$$A+iB=\frac{\frac{1}{2}\cos x-\frac{1}{2^{n+1}}\cos(n+1)x+\frac{1}{2^{n+2}}\cos nx-\frac{1}{4}}{\frac{5}{4}-\cos x}+\frac{i\left[\frac{1}{2}\operatorname{sen}x-\frac{1}{2^{n+1}}\operatorname{sen}(n+1)x+\frac{1}{2^{n+2}}\operatorname{sen}nx\right]}{\frac{5}{4}-\cos x}$$

$$\Rightarrow A=\frac{\frac{1}{2}\cos x-\frac{1}{2^{n+1}}\cos(n+1)x+\frac{1}{2^{n+2}}\cos nx-\frac{1}{4}}{\frac{5}{4}-\cos x}\wedge B=\frac{\left[\frac{1}{2}\operatorname{sen}x-\frac{1}{2^{n+1}}\operatorname{sen}(n+1)x+\frac{1}{2^{n+2}}\operatorname{sen}nx\right]}{\frac{5}{4}-\cos x}$$

Como n es muy grande $(n\to+\infty)$, obtendremos que

$$A_1=\frac{\frac{1}{2}\cos x-0\cos(n+1)x+0\cos nx-\frac{1}{4}}{\frac{5}{4}-\cos x}\quad\wedge\quad B_1=\frac{\frac{1}{2}\operatorname{sen}x-0\operatorname{sen}(n+1)x+0\operatorname{sen}x}{\frac{5}{4}-\cos x}$$

$$A_1=\frac{2\cos x-1}{5-4\cos x}\qquad\wedge\qquad B_1=\frac{2\operatorname{sen}x}{5-4\cos x}$$

Finalmente podemos concluir que

$$\frac{1}{2}\cos x+\frac{1}{4}\cos 2x+\frac{1}{8}\cos 3x+\ldots+\frac{1}{2^n}\cos nx+\ldots=\frac{2\cos x-1}{5-4\cos x}$$

$$\frac{1}{2}\operatorname{sen}x+\frac{1}{4}\operatorname{sen}2x+\frac{1}{8}\operatorname{sen}3x+\ldots+\frac{1}{2^n}\cos nx\ +\ldots=\frac{2\operatorname{sen}x}{5-4\cos x}$$

A partir del problema anterior, podemos resolver los siguientes ejemplos

1. $$1+\cos 10^\circ+\cos 20^\circ+\cos 30^\circ+\ldots\ldots+\cos 80^\circ=\frac{\operatorname{sen}(8+1)\left(\frac{10^\circ}{2}\right)\cos\left(8\frac{10^\circ}{2}\right)}{\operatorname{sen}\frac{10^\circ}{2}}$$

$$\Rightarrow 1+\cos 10^\circ+\cos 20^\circ+\cos 30^\circ+\ldots\ldots+\cos 80^\circ=\frac{\cos 40^\circ}{\sqrt{2}\operatorname{sen}5^\circ}$$

2. $$\frac{1}{2}\operatorname{sen}2^\circ+\frac{1}{4}\operatorname{sen}4^\circ+\frac{1}{8}\operatorname{sen}6^\circ+\frac{1}{16}\operatorname{sen}8^\circ+\ldots\ldots=\frac{2\operatorname{sen}2^\circ}{5-4\cos 2^\circ}$$

Problema 12

Demuestre que el conjugado del número complejo $(e^{i\alpha}-1)$ es $(e^{-i\alpha}-1)$, considerando $\alpha \in \mathbb{R}$

Resolución

Sea

$$Z = e^{i\alpha} - 1$$

por definición de la exponencial compleja

Si definimos al conjugado de Z

$$\Rightarrow Z = \cos\alpha + i\operatorname{sen}\alpha - 1$$

$$\Rightarrow Z = \cos\alpha - 1 + i\operatorname{sen}\alpha$$

$$\bar{z} = \cos\alpha - 1 - i\operatorname{sen}\alpha$$

$$\Rightarrow \bar{z} = \cos\alpha - i\operatorname{sen}\alpha - 1$$

$$\therefore \quad \bar{Z} = e^{-i\alpha} - 1$$

Problema 13

Utilizando las raíces de la ecuación

$$x^{2n} - 1 = 0 \qquad \text{... (i)}$$

halle las siguientes productorias

a) $\prod_{K=1}^{n-1} \operatorname{sen}\frac{K\pi}{2n}$

b) $\prod_{K=1}^{n-1} \cos\frac{K\pi}{2n}$

c) $\prod_{K=1}^{n-1} \operatorname{sen}\frac{K\pi}{n}$

d) $\prod_{K=1}^{m} \operatorname{sen}\frac{K\pi}{2m+1}$

e) $\prod_{K=1}^{m} \cos\frac{K\pi}{2m+1}$

Resolución

De la ecuación: $x^{2n} = 1$ ....(*);

como

$$1 = e^{2k\pi i}\ ;\ K \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow x^{2n} = e^{i2k\pi}$$

$$\Rightarrow x = e^{\frac{i2k\pi}{2n}}$$

$$\Rightarrow x = e^{\frac{ik\pi}{n}} \ ;$$

donde K=0;1; 2; 3; ... ; n−1; n; n+1; ... ; 2n−1

Las raíces de la ecuación (*) tienen la forma

$$x_K = e^{\frac{ik\pi}{n}}$$

Determinando las (2n) raíces de la ecuación (*)

$$x_0 = e^{i0} = 1$$

$$x_1 = e^{i\pi/n} = \cos\frac{\pi}{n} + i\operatorname{sen}\frac{\pi}{n}$$

$$x_2 = e^{i2\pi/n} = \cos\frac{2\pi}{n} + i\operatorname{sen}\frac{2\pi}{n}$$

$$x_3 = e^{i3\pi/n} = \cos\frac{3\pi}{n} + i\operatorname{sen}\frac{3\pi}{n}$$

$$\vdots$$

$$x_{n-1} = e^{i(n-1)\pi/n} = -\cos\frac{\pi}{n} + i\operatorname{sen}\frac{\pi}{n}$$

$$x_n = e^{i\pi} = -1$$

$$x_{n+1} = e^{i(n+1)\pi/n} = -\cos\frac{\pi}{n} - i\operatorname{sen}\frac{\pi}{n}$$

$$\vdots$$

$$x_{2n-2} = e^{i(2n-2)\pi/n} = \cos\frac{2\pi}{n} - i\operatorname{sen}\frac{2\pi}{n}$$

$$x_{2n-1} = e^{i(2n-1)\pi/n} = \cos\frac{\pi}{n} - i\operatorname{sen}\frac{\pi}{n}$$

(x_1 y x_{2n-1}: conjugados; x_2 y x_{2n-2}: conjugados; x_{n-1} y x_{n+1}: conjugados)

De lo anterior, se observa que la ecuación (*) tiene 2n raíces de las cuales dos son reales (1 y −1) y las (2n−2) restantes son números complejos donde (n−1) de estas son parejas conjugadas de las otras; así por ejemplo

$$x_{2n-1} = \overline{x_1}\ ;\ x_{2n-2} = \overline{x_2}\ ;\ \dots\dots\ ;\ x_{n+1} = \overline{x_{n-1}}$$

Luego $x^{2n}-1=(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\ldots\ldots(x-x_{n-1})(x-x_n)(x-x_{n+1})\ldots\ldots(x-x_{2n-2})(x-x_{2n-1})$

$$x^{2n}-1=(x-1)\underbrace{(x-x_1)(x-x_2)\ldots\ldots(x-x_{n-1})}_{\prod_{K=1}^{n-1}(x-x_K)}(x+1)\underbrace{(x-\bar{x}_{n-1})\ldots\ldots(x-\bar{x}_2)(x-\bar{x}_1)}_{\prod_{K=1}^{n-1}(x-\bar{x}_K)}$$

Ordenando los factores

$$x^{2n}-1=(x^2-1)\prod_{K=1}^{n-1}(x-x_K)(x-\bar{x}_K)$$

$$x^{2n}-1=(x^2-1)\prod_{K=1}^{n-1}(x^2-(x_K+\bar{x}_K)x+x_K\bar{x}_K)$$

como $x_K=e^{\frac{ik\pi}{n}} \wedge \bar{x}_K=e^{\frac{-ik\pi}{n}} \Rightarrow x_K+\bar{x}_K=2\cos\frac{K\pi}{n} \wedge x_K\bar{x}_K=1$

Entonces $x^{2n}-1=(x^2-1)\prod_{K=1}^{n-1}\left(x^2-2\cos\frac{K\pi}{n}x+1\right)$

$$\therefore \quad \boxed{\frac{x^{2n}-1}{x^2-1}=\prod_{K=1}^{n-1}\left(x^2-2\cos\frac{K\pi}{n}x+1\right)}$$

Hallando la parte (a): $\prod_{K=1}^{n-1}\operatorname{sen}\frac{k\pi}{2n}$

Si hacemos $x=1$ en el recuadro anterior, en el límite el valor real de $\frac{x^{2n}-1}{x^2-1}$ es n

$$\text{es decir } \lim_{x\to 1}\frac{x^{2n}-1}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{2nx^{2n-1}}{2x}=\frac{2n(1)^{2n-1}}{2(1)}=n$$

$$\Rightarrow n=\prod_{K=1}^{n-1}\left(1^2-2\cos\frac{K\pi}{n}\times 1+1\right)$$

$$\Rightarrow n=\prod_{K=1}^{n-1}\left(2-2\cos\frac{K\pi}{n}\right)$$

$$\Rightarrow n=\prod_{K=1}^{n-1}2\left(1-\cos\frac{K\pi}{n}\right) \quad ; \text{ pero } 1-\cos\frac{K\pi}{n}=2\operatorname{sen}^2\frac{K\pi}{2n}$$

$$\Rightarrow n=\prod_{K=1}^{n-1}2^2\operatorname{sen}^2\frac{K\pi}{2n}$$

$$\Rightarrow n=2^{2(n-1)}\prod_{K=1}^{n-1}\operatorname{sen}^2\frac{K\pi}{2n}$$

$$\Rightarrow n=\left[2^{(n-1)}\prod_{K=1}^{n-1}\operatorname{sen}\frac{K\pi}{2n}\right]^2$$

$$\Rightarrow \sqrt{n}=2^{n-1}\prod_{K=1}^{n-1}\operatorname{sen}\frac{K\pi}{2n} \qquad \therefore \prod_{K=1}^{n-1}\operatorname{sen}\frac{K\pi}{2n}=\frac{\sqrt{n}}{2^{n-1}}$$

Hallando la parte (b): $\prod_{k=1}^{n-1}\cos\left(\frac{k\pi}{2n}\right)$

Análogamente al caso anterior ahora si hacemos $x=-1$ en el límite, el valor real de

$\frac{x^{2n}-1}{x^2-1}$ también es n ya que $\lim_{x\to-1}\frac{x^{2n}-1}{x^2-1}=\lim_{x\to-1}\frac{2nx^{2n-1}}{2x}=\frac{2n(-1)^{2n-1}}{2(-1)}=n$

$$\Rightarrow n=\prod_{K=1}^{n-1}\left((-1)^2-2\cos\frac{K\pi}{n}(-1)+1\right)$$

$$\Rightarrow n=\prod_{K=1}^{n-1}\left(2+2\cos\frac{K\pi}{n}\right)$$

$$\Rightarrow n=\prod_{K=1}^{n-1}2\left(1+\cos\frac{K\pi}{n}\right)\ ;\ \text{pero } 1+\cos\frac{K\pi}{n}=2\cos^2\frac{K\pi}{2n}$$

$$\Rightarrow n=\prod_{K=1}^{n-1}2^2\cos^2\frac{K\pi}{2n}$$

$$\Rightarrow n=2^{2(n-1)}\prod_{K=1}^{n-1}\cos^2\frac{K\pi}{2n}$$

$$\Rightarrow n=\left[2^{n-1}\prod_{K=1}^{n-1}\cos\frac{K\pi}{2n}\right]^2$$

$$\Rightarrow \sqrt{n}=2^{n-1}\prod_{K=1}^{n-1}\cos\frac{K\pi}{2n} \qquad \therefore \prod_{K=1}^{n-1}\cos\frac{K\pi}{2n}=\frac{\sqrt{n}}{2^{n-1}}$$

De donde se concluye:

$$\operatorname{sen}\frac{\pi}{2n}\operatorname{sen}\frac{2\pi}{2n}\operatorname{sen}\frac{3\pi}{2n}\operatorname{sen}\frac{4\pi}{2n}\ \dots\ \operatorname{sen}(n-1)\frac{\pi}{2n}=\frac{\sqrt{n}}{2^{n-1}}$$

$$\cos\frac{\pi}{2n}\cos\frac{2\pi}{2n}\cos\frac{3\pi}{2n}\cos\frac{4\pi}{2n}\ \dots\ \cos(n-1)\frac{\pi}{2n}=\frac{\sqrt{n}}{2^{n-1}}\ ;\ \forall n\in\mathbb{Z}^+-\{1\}$$

Hallando la parte (c) : $\prod_{k=1}^{n-1}\operatorname{sen}\frac{k\pi}{n}$

Para (c)

$$\prod_{K=1}^{n-1}\operatorname{sen}\frac{K\pi}{n}=\prod_{K=1}^{n-1}2\operatorname{sen}\frac{K\pi}{2n}\cos\frac{K\pi}{2n} \qquad \text{utilizando la identidad } \operatorname{sen}\theta=2\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$$

$$=2^{n-1}\prod_{K=1}^{n-1}\operatorname{sen}\frac{K\pi}{2n}\prod_{K=1}^{n-1}\cos\frac{K\pi}{2n} \qquad \text{por(a) y (b) obtenemos}$$

$$=2^{n-1}\frac{\sqrt{n}}{2^{n-1}}\frac{\sqrt{n}}{2^{n-1}} \qquad \therefore \prod_{K=1}^{n-1}\operatorname{sen}\frac{K\pi}{n}=\frac{n}{2^{n-1}}$$

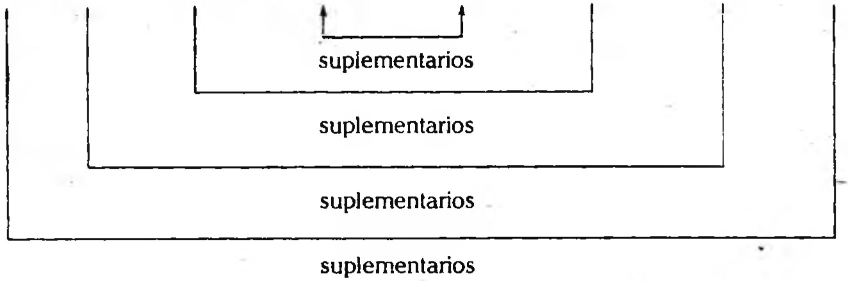
Desarrollando la productoria, obtenemos

$$\operatorname{sen}\frac{\pi}{n}\operatorname{sen}\frac{2\pi}{n}\operatorname{sen}\frac{3\pi}{n}\ \dots\ \operatorname{sen}(n-1)\frac{\pi}{n}=\frac{n}{2^{n-1}};\ \forall n\in\mathbb{Z}^+-\{1\}$$

Para (d)

Haciendo que n sea impar, es decir $n=2m+1$; $m\in\mathbb{Z}^+$
entonces $n-1=2m$; y reemplazando en el último recuadro obtenemos

$$\operatorname{sen}\frac{\pi}{2m+1}\operatorname{sen}\frac{2\pi}{2m+1}\dots\operatorname{sen}\frac{(m-1)\pi}{2m+1}\operatorname{sen}\frac{m\pi}{2m+1}\operatorname{sen}\frac{(m+1)\pi}{2m+1}\operatorname{sen}\frac{(m+2)\pi}{2m+1}\dots\operatorname{sen}\frac{(2m-1)\pi}{2m+1}\operatorname{sen}\frac{2m\pi}{2m+1}=\frac{2m+1}{2^{2m}}$$



Como los senos de dos ángulos suplementarios son iguales (Si $\alpha+\beta=\pi\Rightarrow\operatorname{sen}\alpha=\operatorname{sen}\beta$), entonces

$$\operatorname{sen}\frac{\pi}{2m+1}=\operatorname{sen}\frac{2m\pi}{2m+1}\ ;\ \operatorname{sen}\frac{2\pi}{2m+1}=\operatorname{sen}\frac{(2m-1)\pi}{2m+1}\ ;\ \operatorname{sen}\frac{m\pi}{2m+1}=\operatorname{sen}\frac{(m+1)\pi}{2m+1}$$

reemplazando se tiene

$$\operatorname{sen}^2\frac{\pi}{2m+1}\operatorname{sen}^2\frac{2\pi}{2m+1}\ \dots\ \operatorname{sen}^2\frac{m\pi}{2m+1}=\frac{2m+1}{2^{2m}}$$

$$\left[\operatorname{sen}\frac{\pi}{2m+1}\operatorname{sen}\frac{2\pi}{2m+1}\ \dots\ \operatorname{sen}\frac{m\pi}{2m+1}\right]^2=\frac{2m+1}{2^{2m}}$$

$$\operatorname{sen}\frac{\pi}{2m+1}\operatorname{sen}\frac{2\pi}{2m+1}\ \dots\ \operatorname{sen}\frac{m\pi}{2m+1}=\frac{\sqrt{2m+1}}{2^m}$$

$$\therefore\ \boxed{\operatorname{sen}\frac{\pi}{2m+1}\operatorname{sen}\frac{2\pi}{2m+1}\operatorname{sen}\frac{3\pi}{2m+1}\ \dots\ \operatorname{sen}\frac{m\pi}{2m+1}=\frac{\sqrt{2m+1}}{2^m}\ ;\ \forall m\in\mathbb{Z}^+}$$

o también, utilizando el símbolo Π (productoria) tenemos

$$\boxed{\prod_{K=1}^{m}\operatorname{sen}\frac{K\pi}{2m+1}=\frac{\sqrt{2m+1}}{2^m}}$$

Para (e)

Como

$$\text{sen}\frac{\pi}{2m+1}\text{sen}\frac{2\pi}{2m+1}\text{sen}\frac{3\pi}{2m+1}\text{sen}\frac{4\pi}{2m+1}\text{sen}\frac{5\pi}{2m+1}\text{sen}\frac{6\pi}{2m+1}\dots\text{sen}\frac{m\pi}{2m+1}=\frac{\sqrt{2m+1}}{2^m}$$

$$\text{sen}\frac{2m\pi}{2m+1}\text{sen}\frac{2\pi}{2m+1}\text{sen}\frac{(2m-2)\pi}{2m+1}\text{sen}\frac{4\pi}{2m+1}\text{sen}\frac{(2m-4)\pi}{2m+1}\text{sen}\frac{6\pi}{2m+1}\dots=\frac{\sqrt{2m+1}}{2^m}$$

$$\text{sen}\frac{2\pi}{2m+1}\text{sen}\frac{4\pi}{2m+1}\text{sen}\frac{6\pi}{2m+1}\dots\text{sen}\frac{(2m-4)\pi}{2m+1}\text{sen}\frac{(2m-2)\pi}{2m+1}\text{sen}\frac{2m\pi}{2m+1}=\frac{\sqrt{2m+1}}{2^m}$$

$$2\text{sen}\frac{\pi}{2m+1}\cos\frac{\pi}{2m+1}2\text{sen}\frac{2\pi}{2m+1}\cos\frac{2\pi}{2m+1}2\text{sen}\frac{3\pi}{2m+1}\cos\frac{3\pi}{2m+1}\dots2\text{sen}\frac{m\pi}{2m+1}\cos\frac{m\pi}{2m+1}=\frac{\sqrt{2m+1}}{2^m}$$

$$2^m\text{sen}\frac{\pi}{2m+1}\text{sen}\frac{2\pi}{2m+1}\text{sen}\frac{3\pi}{2m+1}\dots\text{sen}\frac{m\pi}{2m+1}\cos\frac{\pi}{2m+1}\cos\frac{2\pi}{2m+1}\cos\frac{3\pi}{2m+1}\dots\cos\frac{m\pi}{2m+1}=\frac{\sqrt{2m+1}}{2^m}$$

$$2^m\times\frac{\sqrt{2m+1}}{2^m}\times\cos\frac{\pi}{2m+1}\cos\frac{2\pi}{2m+1}\cos\frac{3\pi}{2m+1}\dots\cos\frac{m\pi}{2m+1}=\frac{\sqrt{2m+1}}{2^m}$$

$$\therefore\ \boxed{\cos\frac{\pi}{2m+1}\cos\frac{2\pi}{2m+1}\cos\frac{3\pi}{2m+1}\dots\cos\frac{m\pi}{2m+1}=\frac{1}{2^m}\qquad\forall m\in\mathbb{Z}^+}$$

o también $\boxed{\prod_{K=1}^{m}\cos\frac{K\pi}{2m+1}=\frac{1}{2^m}}$

Teniendo en cuenta el desarrollo de este problema, podemos plantear los ejemplos siguientes

- $A=\text{sen}\frac{\pi}{10}\text{sen}\frac{2\pi}{10}\text{sen}\frac{3\pi}{10}\text{sen}\frac{4\pi}{10}=\text{sen}\frac{\pi}{10}\text{sen}\frac{2\pi}{10}\text{sen}\frac{3\pi}{10}\text{sen}(5-1)\frac{\pi}{2(5)}$

  $\Rightarrow A=\frac{\sqrt{5}}{2^{5-1}}\quad\therefore A=\frac{\sqrt{5}}{16}$

- $B=\cos\frac{\pi}{12}\cos\frac{2\pi}{12}\cos\frac{3\pi}{12}\cos\frac{4\pi}{12}\cos\frac{5\pi}{12}=\cos\frac{\pi}{12}\cos\frac{2\pi}{12}\cos\frac{3\pi}{12}\cos\frac{4\pi}{12}\cos(6-1)\frac{\pi}{2(6)}$

  $\Rightarrow B=\frac{\sqrt{6}}{2^{6-1}}\quad\therefore B=\frac{\sqrt{6}}{32}$

- $C=\text{sen}\frac{\pi}{7}\text{sen}\frac{2\pi}{7}\text{sen}\frac{3\pi}{7}\text{sen}\frac{4\pi}{7}\text{sen}\frac{5\pi}{7}\text{sen}\frac{6\pi}{7}=\text{sen}\frac{\pi}{7}\text{sen}\frac{2\pi}{7}\text{sen}\frac{3\pi}{7}\text{sen}\frac{4\pi}{7}\text{sen}\frac{5\pi}{7}\text{sen}\frac{(7-1)\pi}{7}$

  $\Rightarrow C=\frac{7}{2^{7-1}}\quad\therefore C=\frac{7}{64}$

Problema 14

Calcule P = sen1°sen2°sen3° ... sen179°

Resolución

Como sabemos que si $\alpha+\beta=180° \Rightarrow \operatorname{sen}\alpha=\operatorname{sen}\beta$, entonces podemos plantear que

$$\operatorname{sen}179°=\operatorname{sen}1°$$
$$\operatorname{sen}178°=\operatorname{sen}2°$$

y así sucesivamente, luego la expresión P se puede plantear como

$$P=\operatorname{sen}1°\operatorname{sen}2°\operatorname{sen}3° \ldots \operatorname{sen}88°\operatorname{sen}89°\underbrace{\operatorname{sen}90°}\underbrace{\operatorname{sen}91°}\underbrace{\operatorname{sen}92°} \ldots \underbrace{\operatorname{sen}178°}\underbrace{\operatorname{sen}179°}$$

$$P=\operatorname{sen}1°\operatorname{sen}2°\operatorname{sen}3° \ldots \operatorname{sen}88°\operatorname{sen}89° \quad (1) \quad \operatorname{sen}89°\operatorname{sen}88° \ldots \quad \operatorname{sen}2°\operatorname{sen}1°$$

Reduciendo se obtiene

$$P=\operatorname{sen}^2 1°\operatorname{sen}^2 2°\operatorname{sen}^2 3° \ldots \operatorname{sen}^2 88°\operatorname{sen}^2 89°$$

$$P=[\operatorname{sen}1°\operatorname{sen}2°\operatorname{sen}3° \ldots \operatorname{sen}88°\operatorname{sen}89°]^2$$

En radianes

$$P=\left[\operatorname{sen}\frac{\pi}{180}\operatorname{sen}\frac{2\pi}{180}\operatorname{sen}\frac{3\pi}{180} \ldots \operatorname{sen}\frac{88\pi}{180}\operatorname{sen}\frac{89\pi}{180}\right]^2 \qquad \ldots(1)$$

Del problema 13 tenemos

$$\operatorname{sen}\frac{\pi}{2n}\operatorname{sen}\frac{2\pi}{2n}\operatorname{sen}\frac{3\pi}{2n} \ldots \operatorname{sen}\frac{(n-1)\pi}{2n}=\frac{\sqrt{n}}{2^{n-1}}$$

Para el problema que estamos resolviendo, 2n = 180 entonces n=90

por lo tanto

$$\operatorname{sen}\frac{\pi}{180}\operatorname{sen}\frac{2\pi}{180}\operatorname{sen}\frac{3\pi}{180} \ldots \operatorname{sen}\frac{89\pi}{180}=\frac{\sqrt{90}}{2^{90-1}}=\frac{\sqrt{90}}{2^{89}} \qquad \ldots(2)$$

Reemplazando (2) en (1), tenemos

$$P=\left[\frac{\sqrt{90}}{2^{89}}\right]^2=\frac{90}{2^{178}}$$

Problema 15

Al resolver la siguiente ecuación indique un conjunto solución y evalúe cuando $\theta=\pi/3$

$$(x+\cos\theta+i\operatorname{sen}\theta)^{m}+(x+\cos\theta-i\operatorname{sen}\theta)^{m}=0$$

Resolución

Sea

$$\cos\theta+i\operatorname{sen}\theta=e^{i\theta}\ ;\ \cos\theta-i\operatorname{sen}\theta=e^{-i\theta}$$

$$(x+e^{i\theta})^{m}=-(x+e^{-i\theta})^{m}$$

$$\left(\frac{x+e^{i\theta}}{x+e^{-i\theta}}\right)^{m}=-1\ ;\ \text{Sea: } Z=-1=e^{i\pi}$$

$$\frac{x+e^{i\theta}}{x+e^{-i\theta}}=\sqrt[m]{-1}\Rightarrow\frac{x+e^{i\theta}}{x+e^{-i\theta}}=e^{\frac{i\pi}{m}}$$

luego

$$x+e^{i\theta}=e^{\frac{i\pi}{m}}(x+e^{-i\theta})$$

$$\Rightarrow x=\frac{e^{i\left(\frac{\pi}{m}-\theta\right)}-e^{i\theta}}{1-e^{\frac{i\pi}{m}}}$$

$$x=\frac{\cos\left(\frac{\pi}{m}-\theta\right)+i\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{m}-\theta\right)-\cos\theta-i\operatorname{sen}\theta}{1-\cos\frac{\pi}{m}-i\operatorname{sen}\frac{\pi}{m}}$$

$$x=\frac{-2\operatorname{sen}\frac{\pi}{2m}\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2m}-\theta\right)+i2\cos\frac{\pi}{2m}\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2m}-\theta\right)}{2\operatorname{sen}^{2}\frac{\pi}{2m}-i2\operatorname{sen}\frac{\pi}{2m}\cos\frac{\pi}{2m}}$$

$$x=\frac{-2\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2m}-\theta\right)\left(\operatorname{sen}\frac{\pi}{2m}-i\cos\frac{\pi}{2m}\right)}{2\operatorname{sen}\frac{\pi}{2m}\left(\operatorname{sen}\frac{\pi}{2m}-i\cos\frac{\pi}{2m}\right)}$$

Ahora; evaluamos cuando $\theta=\frac{\pi}{3}$

$$x=\frac{-\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2m}-\frac{\pi}{3}\right)}{\operatorname{sen}\frac{\pi}{2m}}$$

$$x=\frac{-\operatorname{sen}\frac{\pi}{2m}\times\left(\frac{1}{2}\right)+\cos\frac{\pi}{2m}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{\operatorname{sen}\frac{\pi}{2m}}$$

$$x=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cot\frac{\pi}{2m}$$

Problema 16

Encuentre la región correspondiente al con[illegible] de los números complejos definidos por

$$R=\left\{Z\in\mathbb{C}/\left|e^{Z^2}\right|<1\right\}$$

Resolución

Como Z es un número complejo, considera[illegible] $Z=x+iy$, donde $x, y\in\mathbb{R}$

ahora

$$e^{Z^2}=e^{(x+iy)^2}=e^{x^2+2xyi-y^2}$$

$$e^{Z^2}=e^{x^2-y^2}.e^{(2xy)i}$$

luego el módulo del complejo: e^{Z^2}, será

$$\left|e^{Z^2}\right|=\left|e^{x^2-y^2}.e^{(2xyi)}\right|=\left|e^{x^2-y^2}\right| \qquad \underbrace{\left|e^{i2xy}\right|}_{1}$$

$$\Rightarrow\ \left|e^{Z^2}\right|=e^{x^2-y^2}\ ;$$

pero por condición del problema

$$\left|e^{Z^2}\right|<1\ ;\ \text{es decir } e^{x^2-y^2}<1$$

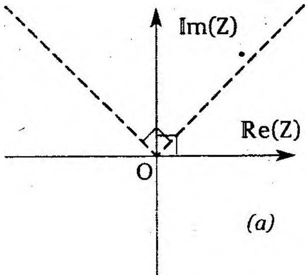
conclusión $x^2-y^2<0$

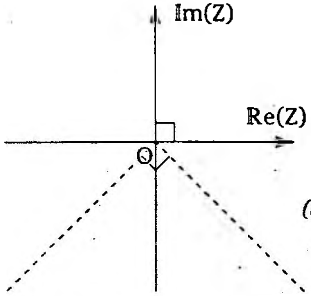
ahora hay que resolver la desigualdad

$$y^2-x^2>0$$

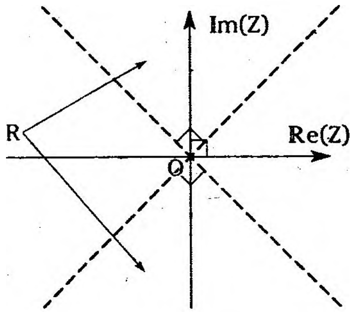
$$y^2>x^2\Rightarrow|y|>|x|$$

Cuando $y>0 \rightarrow y>|x|$ $\vee$ $y<0 \rightarrow y<-|x|$





Finalmente, uniendo las regiones de las figuras 9.44(a) y 9.44(b) obtenemos la figura 9.44(c)



(c)
Figura 9.44

Problema 17

Halle el equivalente de la siguiente sumatoria

$$C = 3(2) + 4(3)(2)\cos\theta + 5(4)(3)\cos 2\theta + \ldots + 22(21)(20)\cos 19\theta$$

Si $e^{i20\theta} = 1 \;\wedge\; e^{i\theta} \neq 1$

Resolución

Para poder resolver esta expresión mediante números complejos se le sumará un término adicional de tal forma que se forme la expresión $\cos A + i\operatorname{sen}A = e^{iA}$ o $A\cos A + Ai\operatorname{sen}A = Ae^{iA}$

según lo anterior

$$C = 3(2) + 4(3)(2)\cos\theta + 5(4)(3)\cos 2\theta + \ldots + 22(21)(20)\cos 19\theta \quad \ldots(1)$$

el término adicional sería

$$S = +4(3)(2)\operatorname{sen}\theta + 5(4)(3)\operatorname{sen}2\theta + 6(5)(4)\operatorname{sen}3\theta + \ldots + 22(21)(20)\operatorname{sen}19\theta \quad \ldots(2)$$

y para formar la sumatoria compleja multiplicaremos por (i) a (2), entonces

$$iS = +i4(3)(2)\operatorname{sen}\theta + i5(4)(3)\operatorname{sen}2\theta + i6(5)(4)\operatorname{sen}3\theta + \ldots + i22(21)(20)\operatorname{sen}19\theta \quad \ldots(3)$$

sumando (1) y (2) se obtiene

$$\underbrace{C+iS}_{Z} = 3(2)+4(3)(2)\cos\theta+5(4)(3)\cos 2\theta+6(5)(4)\cos 3\theta\ldots+22(21)(20)\cos 19\theta$$

$$\underline{+i4(3)(2)\operatorname{sen}\theta+i5(4)(3)\operatorname{sen}2\theta+i6(5)(4)\operatorname{sen}3\theta+\ldots+i22(21)(20)\operatorname{sen}19\theta} \quad \ldots(4)$$

$$Z= 3(2)+4(3)(2)e^{i\theta}+5(4)(3)e^{i2\theta}+6(5)(4)e^{i3\theta}+\ldots+22(21)(20)e^{i19\theta} \quad \ldots(5)$$

Puesto que $Z = C+iS$ ... (6)

De (6) nuestro propósito será calcular $\mathbb{R}e(Z)$, porque $C = \mathbb{R}e(Z)$ ... (7)

Multiplicamos a (5) por $(1-e^{i\theta})$ y obtenemos

$$(1-e^{i\theta})Z=(1-e^{i\theta})\left(3(2)+4(3)(2)e^{i\theta}+5(4)(3)e^{i2\theta}+6(5)(4)e^{i3\theta}+\ldots+22(21)(20)e^{i19\theta}\right)$$

$$\Rightarrow (1-e^{i\theta})Z=\left[3(2)+4(3)(2)e^{i\theta}+5(4)(3)e^{i2\theta}+6(5)(4)e^{i3\theta}+\ldots+22(21)(20)e^{i19\theta}\right]$$

$$-\left[(3(2)e^{i\theta}+4(3)(2)e^{i2\theta}+5(4)(3)e^{i3\theta}+\ldots+21(20)(19)e^{i19\theta}+22(21)(20)\underbrace{e^{i20\theta}}_{1})\right]$$

Reduciendo se tiene

$$\Rightarrow (1-e^{i\theta})Z=3(2)+3(3)(2)e^{i\theta}+3(4)(3)e^{i2\theta}+3(5)(4)e^{i3\theta}+\ldots+3(21)20e^{i19\theta}-22(21)(20)$$

$$\Rightarrow (1-e^{i\theta})Z=3\Big[\underbrace{2+3(2)e^{i\theta}+4(3)e^{i2\theta}+5(4)e^{i3\theta}+\ldots+21(20)e^{i19\theta}}_{Z_1}\Big]-22(21)(20)$$

$$\Rightarrow (1-e^{i\theta})Z=3Z_1-22(21)(20) \quad \ldots(8)$$

Seguidamente hallaremos una expresión equivalente para Z_1, puesto que

$$Z_1=2+3(2)e^{i\theta}+4(3)e^{i2\theta}+5(4)e^{i3\theta}+\ldots+21(20)e^{i19\theta} \quad \ldots(9)$$

Multiplicamos a (9) por $(1-e^{i\theta})$

$$(1-e^{i\theta})Z_1=(1-e^{i\theta})(2+3(2)e^{i\theta}+4(3)e^{i2\theta}+5(4)e^{i3\theta}+\ldots+21(20)e^{i19\theta})$$

Multiplicando obtenemos

$$\Rightarrow (1-e^{i\theta})Z_1=2+3(2)e^{i\theta}+4(3)e^{i2\theta}+5(4)e^{i3\theta}+\ldots+21(20)e^{i19\theta}$$

$$-((2)e^{i\theta}+3(2)e^{i2\theta}+4(3)e^{i3\theta}+\ldots+20(19)e^{i19\theta}+21(20)\underbrace{e^{i20\theta}}_{1})$$

$$\Rightarrow (1-e^{i\theta})Z_1=2+(2)e^{i\theta}+2(3)e^{i2\theta}+2(4)e^{i3\theta}+\ldots+2(20)e^{i19\theta}-21(20)$$

$$(1-e^{i\theta})Z_1=2(\underbrace{1+2e^{i\theta}+3e^{i2\theta}+4e^{i3\theta}+\ldots+20e^{i19\theta}}_{Z_2})-21(20)$$

$$\Rightarrow (1-e^{i\theta})Z_1=2Z_2-21(20) \quad \ldots(10)$$

Seguidamente hallaremos una expresión equivalente para Z_2 puesto que

$$Z_2 = 1+2e^{i\theta}+3e^{i2\theta}+4e^{i3\theta}+\dots+20e^{i19\theta} \qquad \dots(11)$$

Multiplicamos a (11) por $(1-e^{i\theta})$

$$(1-e^{i\theta})Z_1 = (1-e^{i\theta})(1+2e^{i\theta}+3e^{i2\theta}+4e^{i3\theta}+\dots+20e^{i19\theta})$$

Multiplicando obtenemos

$$(1-e^{i\theta})Z_2 = 1+2e^{i\theta}+3e^{i2\theta}+4e^{i3\theta}+\dots+20e^{i19\theta})$$

$$-(e^{i\theta}+2e^{i2\theta}+3e^{i3\theta}+\dots+19e^{i19\theta}+20\underbrace{e^{i20\theta}}_{1})$$

Reduciendo obtenemos

$$\Rightarrow (1-e^{i\theta})Z_2 = \underline{1+e^{i\theta}+e^{i2\theta}+e^{i3\theta}+\dots+e^{i19\theta}}-20 \qquad \dots(12)$$

esta suma es un cociente notable

se sugiere repasar sus lecciones de Álgebra

respecto a lo mencionado.

$$1+e^{i\theta}+e^{i2\theta}+e^{i3\theta}+\dots+e^{i19\theta} = \frac{(e^{i20\theta}-1)}{(e^{i\theta}-1)} \begin{matrix} \leftarrow \text{numerador} \\ \leftarrow \text{denominador} \end{matrix}$$

por dato $e^{i20\theta} = 1 \Rightarrow$ el numerador es 0

y como $e^{i\theta} \neq 1$

$\Rightarrow$ el denominador es diferente de 0

$$\Rightarrow 1+e^{i\theta}+e^{i2\theta}+e^{i3\theta}+\dots+e^{i19\theta} = 0 \qquad \dots(13)$$

Reemplazando (13) en (12) obtenemos

$$\Rightarrow (1-e^{i\theta})Z_2 = 0-20$$

$$\Rightarrow \text{Despejando } Z_2 : Z_2 = \frac{-20}{1-e^{i\theta}} \qquad \dots(14)$$

Reemplazando (14) en (10) obtenemos

$$(1-e^{i\theta})Z_1 = 2\left(\frac{-20}{1-e^{i\theta}}\right)-21(20)$$

Despejando Z_1 se obtiene

$$Z_1 = \frac{-2(20)}{(1-e^{i\theta})^2} - \frac{21(20)}{(1-e^{i\theta})} \qquad \dots(15)$$

Reemplazando (15) en (8) obtenemos

$$(1-e^{i\theta})Z = 3\left(\frac{-2(20)}{(1-e^{i\theta})^2} - \frac{21(20)}{(1-e^{i\theta})}\right)-22(21)(20)$$

Despejando Z se obtiene

$$Z = \frac{-3(2)(20)}{(1-e^{i\theta})^3} - \frac{3(21)(20)}{(1-e^{i\theta})^2} - \frac{-22(21)(20)}{1-e^{i\theta}} \qquad \dots(16)$$

Pero

$$1-e^{i\theta} = e^{\frac{i\theta}{2}}\left(e^{\frac{-i\theta}{2}}-e^{\frac{i\theta}{2}}\right) = \frac{-e^{\frac{i\theta}{2}}\left(e^{\frac{i\theta}{2}}-e^{\frac{-i\theta}{2}}\right)}{2i}2i$$

$$1-e^{i\theta} = -2ie^{\frac{i\theta}{2}}\underbrace{\left(\frac{e^{\frac{i\theta}{2}}-e^{\frac{-i\theta}{2}}}{2i}\right)}_{\text{forma compleja del sen}\frac{\theta}{2}} = -2ie^{\frac{i\theta}{2}}\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}$$

$$\Rightarrow 1-e^{i\theta} = -2ie^{\frac{i\theta}{2}}\operatorname{sen}\frac{\theta}{2} \qquad \dots(17)$$

Reemplazando (17) en (16) se obtiene

$$Z = \frac{-3(2)(20)}{\left(-2ie^{\frac{i\theta}{2}}.\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\right)^3} - \frac{3(21)(20)}{\left(-2ie^{\frac{i\theta}{2}}.\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\right)^2} - \frac{-22(21)(20)}{\left(-2ie^{\frac{i\theta}{2}}.\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\right)}$$

Reduciendo

$$Z = \frac{-3(2)(20)}{8ie^{\frac{i3\theta}{2}}.\operatorname{sen}^3\frac{\theta}{2}} - \frac{3(21)(20)}{4e^{i\theta}.\operatorname{sen}^2\frac{\theta}{2}} + \frac{22(21)(20)}{2ie^{\frac{i\theta}{2}}.\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}} \quad ; i = e^{\frac{i\pi}{2}}$$

Si se reemplaza i por $i = e^{\frac{i\pi}{2}}$ se obtiene

$$Z = \underbrace{\frac{3(2)(20)}{8\operatorname{sen}^3\frac{\theta}{3}}e^{-i\left(\frac{3\theta}{2}+\frac{\pi}{2}\right)}}_{Z_3} - \underbrace{\frac{3(21)(20)}{4\operatorname{sen}^2\frac{\theta}{2}}e^{-i\theta}}_{Z_4}$$

$$+ \underbrace{\frac{22(21)(20)e^{-i\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{2}\right)}}{2\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}}}_{Z_5} \qquad \dots(18)$$

Se sabe que para una suma de números complejos $Z=Z_3+Z_4+Z_5$

se cumple $\mathrm{Re}(Z)=\mathrm{Re}(Z_3)+\mathrm{Re}(Z_4)+\mathrm{Re}(Z_5)$

$\Rightarrow$ De (18)

$$\underbrace{\mathrm{Re}(Z)}_{C_{(\mathrm{De}(7))}}=\frac{-3(2)(20)}{8\mathrm{sen}^3\frac{\theta}{2}}\underbrace{\cos\left(\frac{3\theta}{2}+\frac{\pi}{2}\right)}_{-\mathrm{sen}\frac{3\theta}{2}}-\frac{3(21)(20)}{4\mathrm{sen}^2\frac{\theta}{2}}\cos\theta+\frac{22(21)(20)}{2\mathrm{sen}\frac{\theta}{2}}\overbrace{\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\theta}{2}\right)}^{-\mathrm{sen}\frac{\theta}{2}}$$

Reduciendo obtenemos que la suma pedida C es $C=15\,\mathrm{sen}\frac{3\theta}{2}\csc^3\frac{\theta}{2}-315\cos\theta.\csc^2\frac{\theta}{2}-4620$

Problema 18

A partir de la siguiente identidad $A\cos 2x+R\cos x+F=\dfrac{(1+\cos x-i\,\mathrm{sen}\,x)^4}{\cos 2x-i\,\mathrm{sen}\,2x}$

Halle el valor A+R+F

Resolución

De la condición

$$A\cos 2x+R\cos x+F=\frac{(1+\cos x-i\,\mathrm{sen}\,x)^4}{\cos 2x-i\,\mathrm{sen}\,2x}$$

$$A\cos 2x+R\cos x+F=\frac{\left(2\cos^2\frac{x}{2}-i2\mathrm{sen}\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\right)^4}{\cos(-2x)+i\,\mathrm{sen}(-2x)}$$

$$A\cos 2x+R\cos x+F=\frac{\left(2\cos\frac{x}{2}\right)^4\left(\cos\frac{x}{2}-i\,\mathrm{sen}\frac{x}{2}\right)^4}{e^{i(-2x)}}$$

$$\Rightarrow A\cos 2x+R\cos x+F=16\cos^4\frac{x}{2}e^{i2x}\left(\cos\left(-\frac{x}{2}\right)+i\,\mathrm{sen}\left(-\frac{x}{2}\right)\right)^4$$

$$A\cos 2x+R\cos x+F=16\cos^4\frac{x}{2}e^{i2x}\left[e^{i\left(-\frac{x}{2}\right)}\right]^4$$

$$A\cos 2x+R\cos x+F=16\cos^4\frac{x}{2}e^{i2x}e^{i(-2x)}$$

Reduciendo obtenemos $A\cos 2x+R\cos x+F=16\cos^4\frac{x}{2}$ ...(1)

Pero se sabe $2^3\cos^4\frac{x}{2}=\cos 4\left(\frac{x}{2}\right)+4\cos 2\left(\frac{x}{2}\right)+3$ ...(2)

Reemplazando (2) en (1) $A\cos 2x+R\cos x+F=2(\cos 2x+4\cos x+3)$

$$\Rightarrow A\cos 2x+R\cos x+F=2\cos x+8\cos x+6$$

Identificando A=2, R=8 y F=6

$\therefore$ A+R+F=16

Problema 19

Halle α en el intervalo $\left\langle -2\pi ; \frac{-3\pi}{2} \right\rangle$

si se cumple la siguiente igualdad

$$3\tan\alpha = |2003^i| + |2004^i| + |2005^i|$$

Resolución

Partimos de la fórmula de Euler

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\text{sen}\theta \; ;$$

y por módulo se sabe

$$|e^{i\theta}| = |\cos\theta + i\text{sen}\theta| = \sqrt{(\cos\theta)^2 + (\text{sen}\theta)^2}$$

$$|e^{i\theta}| = \sqrt{\cos^2\theta + \text{sen}^2\theta} \qquad ...(1)$$

Pero por identidad trigonométrica

$$\text{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1 \qquad ...(2)$$

(Revise el capítulo 5)

Reemplazando (2) en (1) obtenemos

$$|e^{i\theta}| = 1 \qquad ...(3)$$

(la cual es una de las propiedades de la forma exponencial compleja mencionada en la página **654**)

Se sabe por propiedad de logaritmos que $\forall a \in \mathbb{R}^+$ se cumple $a = e^{\ln a}$

según esto, 2003, 2004 y 2005 pueden expresarse respectivamente como

$$\left.\begin{aligned} 2003 &= e^{\ln 2003} \\ 2004 &= e^{\ln 2004} \\ 2005 &= e^{\ln 2005} \end{aligned}\right| ...(4)$$

y como la condición inicial es

$$3\tan\alpha = |2003^i| + |2004^i| + |2005^i| \qquad ...(5)$$

Reemplazamos (4) en (5) obteniendo

$$3\tan\alpha = |(e^{\ln 2003})^i| + |(e^{\ln 2004})^i| + |(e^{\ln 2005})^i|$$

ordenando

$$\Rightarrow 3\tan\alpha = \underbrace{|e^{i(\ln 2003)}|}_{1} + \underbrace{|e^{i(\ln 2004)}|}_{1} + \underbrace{|e^{i(\ln 2005)}|}_{1} \qquad ...(6)$$

(cada uno de estos módulos son unos por la propiedad mencionada)

$$|e^{i\theta}| = 1$$

De (6): $3\tan\alpha = 1 + 1 + 1$

$$\Rightarrow 3\tan\alpha = 3$$

$$\tan\alpha = 1$$

$$\tan\alpha = \tan\frac{\pi}{4}$$ (revise el tema de funciones trigonométricas)

$$\therefore \alpha = \frac{\pi}{4} + K\pi; \; K \in \mathbb{Z}$$

Algunos valores de α son

$$\alpha = \frac{\pi}{4} \; ; \; \frac{-3\pi}{4} \; ; \; \frac{-7\pi}{4} \; ; \; \frac{-11\pi}{4} \; ; \; \frac{-15\pi}{4} \; ; \; ...$$

Pero puesto que hay una condición para α ;

$\alpha \in \left\langle -2\pi ; \frac{-3\pi}{2} \right\rangle$ se concluye $\alpha = -7\pi/4$

Problema 20

Sabiendo que

$$Z = x + iy, \; x, y \in \mathbb{R} \; ; \; i = \sqrt{-1}$$

indique qué representa la siguiente ecuación

$$\text{Arg}\left(\frac{Z-2}{Z-2i}\right) = \frac{\pi}{3} \qquad ...(1)$$

Resolución

A partir de (1) se sabe que

$$\text{Arg}\left(\frac{Z_1}{Z_2}\right) = \text{Arg } Z_1 - \text{Arg } Z_2$$

$$\Rightarrow \text{Si Arg}\left(\frac{Z-2}{Z-2i}\right) = \frac{\pi}{3}$$

$$\Rightarrow \text{Arg}(\underset{\substack{\Uparrow \\ x+iy}}{Z}-2) - \text{Arg}(\underset{\substack{\Uparrow \\ x+iy}}{Z}-2i) = \frac{\pi}{3}$$

Ordenando se obtiene

$$\underbrace{\text{Arg}[(x-2)+iy]}_{} - \underbrace{\text{Arg}[x+i(y-2)]}_{} = \frac{\pi}{3}$$

$$\underbrace{\arctan\left(\frac{y}{x-2}\right)}_{} - \underbrace{\arctan\left(\frac{y-2}{x}\right)}_{} = \frac{\pi}{3}$$

$$\alpha \quad - \quad \beta \quad = \frac{\pi}{3} \quad ...(2)$$

de donde

$$\tan\alpha = \frac{y}{x-2} \;;\; \tan\beta = \frac{y-2}{x} \qquad ...(3)$$

y para encontrar una relación entre x e y de (2) tomaremos un R.T., la cual por conveniencia se sugiere tangente

$$\Rightarrow \tan(\alpha-\beta) = \tan\frac{\pi}{3}$$

Desarrollando

$$\Rightarrow \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta} = \sqrt{3} \qquad ...(4)$$

Reemplazando (3) en (4) obtenemos

$$\frac{\dfrac{y}{x-2} - \dfrac{y-2}{x}}{1+\left(\dfrac{y}{x-2}\right)\left(\dfrac{y-2}{x}\right)} = \sqrt{3}$$

$$\frac{xy-(x-2)(y-2)}{x(x-2)+y(y-2)} = \sqrt{3}$$

$$\frac{xy-(xy-2x-2y+4)}{x^2-2x+y^2-2y} = \sqrt{3}$$

Reduciendo

$$\Rightarrow 2x+2y-4 = \sqrt{3}x^2 - 2\sqrt{3}x + \sqrt{3}y^2 - 2\sqrt{3}y$$

Finalmente se obtiene la siguiente ecuación

$$\sqrt{3}x^2 - (2\sqrt{3}+2)x + \sqrt{3}y^2 - (2\sqrt{3}+2)y + 4 = 0$$

la cual representa a una circunferencia.

Observación

La ecuación

$$\sqrt{3}x^2 - (2\sqrt{3}+2)x + \sqrt{3}y^2 - (2\sqrt{3}+2)y + 4 = 0$$

Al completar cuadrados se obtiene

$$\left(x-\left(\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}}\right)\right)^2 + \left(y-\left(\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}}\right)\right)^2 = \left(\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)^2$$

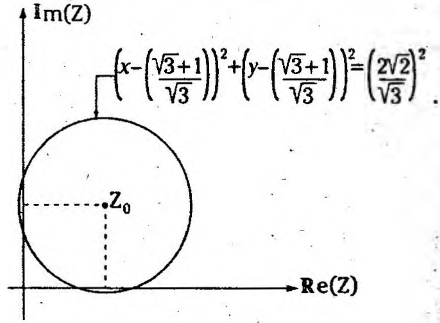


Figura 9.45

Problema 21

Usando la ecuación

$$x^{2n}+x^n+1=0$$

Reduzca la productoria

$$\prod_{K=0}^{n-1}\cos^2\left(\frac{(3K+1)\pi}{3n}\right)$$

Resolución

Dada la ecuación $x^{2n}+x^n+1=0$ se resuelve para x^n

$$x^n = \frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2} \text{ de los cuales}$$

- $x^n = \dfrac{-1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i \Rightarrow x^n = \cos\left(2K\pi+\dfrac{2\pi}{3}\right) + i\,\text{sen}\left(2K\pi+\dfrac{2\pi}{3}\right)$

$$x^n = e^{\left(2K\pi+\frac{2\pi}{3}\right)i} \Rightarrow x_k = e^{\frac{2\pi(3K+1)i}{3n}} \qquad k=0,1,2,\dots n-1$$

- $x^n = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \Rightarrow x^n = \cos\left(2K\pi+\frac{2\pi}{3}\right) - i\,\text{sen}\left(2K\pi+\frac{2\pi}{3}\right)$

$$x^n = e^{-\left(2K\pi+\frac{2\pi}{3}\right)i} \Rightarrow \bar{x}_K = e^{-\frac{(2\pi(3K+1)i}{3n}} \qquad k=0,1,2,\dots n-1$$

Las raíces son conjugadas

Se observa que la ecuación tiene **2n** raíces en la cual **n** son complejas y las otras **n** raíces son sus conjugadas.

Luego

$$x^{2n}+x^n+1 = \prod_{K=0}^{n-1}(x-x_K)\prod_{K=0}^{n-1}(x-\bar{x}_K)$$

$$= \prod_{K=0}^{n-1}(x-x_K)(x-\bar{x}_K)$$

$$x^{2n}+x^n+1 = \prod_{K=0}^{n-1}\left[x^2 - x(x_K+\bar{x}_K) + (|x_K|)^2\right]$$

Se sabe

$$x_K+\bar{x}_K = 2\text{Re}\left[e^{\frac{2\pi(3K+1)i}{3n}}\right] \quad \wedge \quad |x_K| = 1$$

Luego

$$x_K+\bar{x}_K = 2\cos\left(\frac{2\pi(3K+1)}{3n}\right)$$

Luego

$$x^{2n}+x^n+1 = \prod_{K=0}^{n-1}\left[x^2 - 2x\cos\left(\frac{2\pi(3K+1)}{3n}\right)+1\right]$$

se cumple

para todo $x\in\mathbb{R}$, en particular si $x=-1$

$$2+(-1)^n = \prod_{K=0}^{n-1}\left[2+2\cos\left(\frac{2\pi(3K+1)}{3n}\right)\right]$$

$$2+(-1)^n = \prod_{K=0}^{n-1}\left[4\cos^2\left(\frac{\pi(3K+1)}{3n}\right)\right]$$

$$2+(-1)^n = 4^n\left[\prod_{K=0}^{n-1}\cos\left(\frac{\pi(3K+1)}{3n}\right)\right]^2$$

$$\Rightarrow \prod_{K=0}^{n-1}\cos^2\frac{\pi(3K+1)}{3n} = \frac{2+(-1)^n}{4^n}$$

Problema 22

Halle $Z\in\mathbb{C}$, tal que se verifique la siguiente igualdad $\text{sen}Z=2$

Resolución

A partir del dato $\text{sen}Z=2$ ...(1)

se sabe que $\text{sen}Z = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$ ...(2)

Reemplazando (2) en (1) obtenemos

$$\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i} = 2$$

$$\Rightarrow e^{iz}-e^{-iz} = 4i$$

$$\Rightarrow e^{iz} - \frac{1}{e^{iz}} = 4i$$

$$\Rightarrow e^{2iz} - 1 = 4e^{iz}i$$

$$\Rightarrow e^{2iz} - 4e^{iz}i - 1 = 0 \quad \text{...(3)}$$

Si hacemos $e^{iz}=a$ ...(4)

Reemplazando (4) en (3)

$$\Rightarrow a^2 - 4ai - 1 = 0$$

$$a = \frac{4i \pm \sqrt{(4i)^2 - 4(1)(-1)}}{2}$$

$$a = \frac{4i \pm \sqrt{-12}}{2} = \frac{4i \pm 2\sqrt{3}i}{2}$$

$$\Rightarrow a = (2+\sqrt{3})i \;\vee\; a = (2-\sqrt{3})i \quad \text{...(5)}$$

Reemplanzando (5) en 4

$$\Rightarrow e^{iz} = (2+\sqrt{3})i \;\vee\; e^{iz} = (2-\sqrt{3})i$$

$$\Rightarrow iz = \ln(2+\sqrt{3})i \;\vee\; iz = \ln(2-\sqrt{3})i$$

$\therefore$ los valores de z serán $-i\ln(2+\sqrt{3})i \;\vee\; -i\ln(2-\sqrt{3})i$

Problemas Propuestos

En los problemas del 1 al 8, exprese en forma polar los números complejos dados (considérese argumento principal)

1. $3\sqrt{2}+i3\sqrt{2}$

2. $2-i2\sqrt{3}$

3. $-5i$

4. -4

5. $-\sqrt{3}-i$

6. $-2-i(3-i)$

7. $\pi+\sqrt{2}i$

8. $\text{sen}4+i\cos 4$

En los problemas del 9 al 12 exprese en forma cartesiana los números complejos dados.

9. $2(\cos 210^{o}+i\text{sen}210^{o})$

10. $\sqrt{6}\left(\cos 91\frac{\pi}{4}+i\text{sen}91\frac{\pi}{4}\right)$

11. $3\left[\cos\left(\frac{5\pi}{6}+2n\pi\right)+i\text{sen}\left(\frac{5\pi}{6}+2n\pi\right)\right]$; $n\in\mathbb{Z}$

12. $-i\left(\text{sen}\frac{55\pi}{6}+i\cos 33\pi\right)$

En los problemas del 13 al 18, exprese en forma exponencial los números complejos dados (considere argumento principal).

13. $\pi+\pi i$

14. $\sqrt{6}+\sqrt{2}i$

15. $-2(\text{sen}2+i\cos 2)$

16. $1-(\text{sen}\theta-i\cos\theta)$; si $0<\theta<\pi/2$

17. $i-\cos\theta-i\text{sen}\theta$; si $\pi<\theta<\frac{3\pi}{2}$

18. $\frac{1}{Z+1}$: si $Z=\text{sen}\theta+i\cos\theta$ $\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$

19. Sea el siguiente número complejo:

$Z=r(\cos\theta+i\text{sen}\theta)$; $r>0 \wedge 0\leq\theta\leq\frac{2\pi}{3}$,

calcule el valor de $\dfrac{\text{Arg}(Z^2)+\text{Arg}(2Z^3)}{\text{Arg}\left(\frac{Z}{10}\right)}$

A) 1 B) 3/2 C) 4
D) 5 E) 7/2

20. Obtenga el equivalente de la siguient[e] expresión

$E=(1+\cos\theta+i\text{sen}\theta)^m+(1+\cos\theta-i\text{sen}\theta)^m$

$i=\sqrt{-1}$

A) $2^{m+1}\cos^m\left(\frac{\theta}{2}\right)\text{sen}\left(\frac{m\theta}{2}\right)$

B) $2^m\text{sen}^m\left(\frac{\theta}{2}\right)\text{sen}\left(\frac{m\theta}{2}\right)$

C) $2^{m+1}\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{m\theta}{2}\right)$

D) $2\text{sen}^m\left(\frac{\theta}{2}\right)\text{sen}\left(\frac{m\theta}{2}\right)$

E) $2^{m+1}\cos\left(\frac{m\theta}{2}\right)\cos^m\frac{\theta}{2}$

21. Si $\{Z,W\}\in\mathbb{C}$, $W\neq 0$ entonces demuestre que existe un $K\in\mathbb{C}$ tal q[ue] verifique $Z=K\overline{W}$

22. Si $z\in\mathbb{C}$, tal que $z^2=\bar{z}^{-2}$; entonc[es] demuestre que z es un número real [o] imaginario puro.

23. Halle la parte real del número complejo $W=e^{i\theta}-e^{2i\theta}+e^{3i\theta}$

considerando:

I) $\theta \in \mathbb{R}$

II) $\theta \in \mathbb{C}$ tal que: $\theta = a + bi$, donde $a; b \in \mathbb{R}$

A) I) $\cos 2\theta \cdot (2\cos\theta - 1)$

II) $e^{-b}\cos a - e^{2b}\cos 2a + e^{-3b}\cos 3a$

B) I) $\cos\theta(2\cos 2\theta - 1)$

II) $e^{-2b}\cos a - e^{a+b}\cos 2a + e^{3b}\cos 3a$

C) I) $\cos 3\theta$

II) $e^{-3b}\cos a - e^{-b}\cos 2a + e^{2b}\cos 3a$

D) I) $\cos 3\theta(2\cos\theta + 1)$

II) $e^{-b}\cos a - e^{2b}\cos 2a - e^{-3b}\cos 3a$

E) I) $\cos(2\theta)(2\cos 2\theta + 1)$

II) $e^{-b}\cos 3a - e^{-2b}\cos a - e^{-3b}\cos 2a$

24. Calcule el máximo valor de

$$R = \text{sen}\left\{\frac{1}{3}\text{arcsen}\left[\text{sen}\theta(e^{2i\theta} + e^{-2i\theta} + 1)\right]\right\};$$

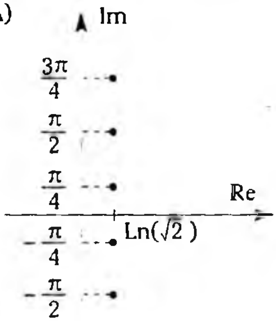
si $\theta \in \left[-\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{6}\right] - \{0\}$

A) -1 B) $-\frac{1}{2}$ C) 0

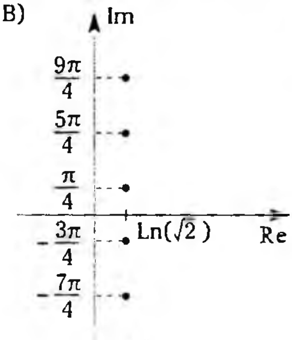
D) $\frac{1}{2}$ E) 1

25. Halle todos los números complejos $z = x + iy$, y represéntelos en el Plano de Gauss, tal que $e^z = 1 + i$

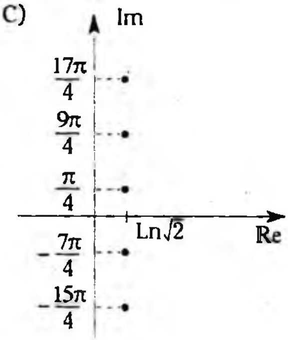
A)



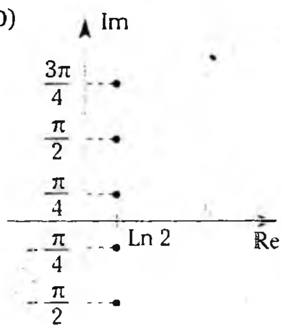
B)



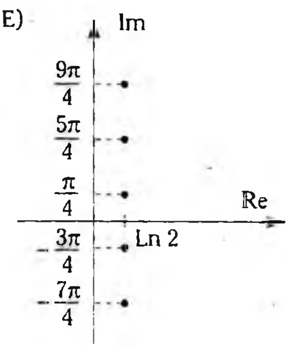
C)



D)



E)



26. Si $2\pi/3$ es el argumento de un número complejo que se genera por el cociente de dos números complejos conjugados entre sí y además el producto de los módulos de dichos números complejos es 4, calcule dichos números complejos conjugados.

A) $Z=\sqrt{3}+i$, $\bar{Z}=\sqrt{3}-i$

B) $Z=\sqrt{3}-i$, $\bar{Z}=\sqrt{3}+i$

C) $Z=1+\sqrt{3}i$, $\bar{Z}=1-\sqrt{3}i$

D) $Z=1-\sqrt{3}i$, $\bar{Z}=1+\sqrt{3}i$

E) $Z=1+i$, $\bar{Z}=1-i$

27. Calcule $\cos\left[\arg\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^n\right]$,

siendo $n\in Z$

A) -1

B) 0

C) 1

D) $\{-1;1\}$

E) $\{-1;0;1\}$

28. Resuelva $\cos z=2$,
siendo $z=x+iy$; $i^2=-1 \wedge K\in Z$

A) $i\ln(2+\sqrt{3})$, $-i\ln(2-\sqrt{3})$

B) $2K\pi\pm i\ln(2+\sqrt{3})$

C) $2K\pi\pm i\ln(2-\sqrt{3})$

D) $2K\pi\pm i\ln(\sqrt{5}-2)$

E) $2K\pi\pm i\ln(2\pm\sqrt{3})$

29. Encuentre los vértices z_K de un polígono regular de n lados si su centro se encuentra en el punto z=0, y uno de sus vértices z es conocido.
Dato K=0;1;2; ....; n−1

A) $Z_1e^{\frac{(2K-1)}{n}\pi i}$

B) $Z_1e^{\frac{K\pi}{n}i}$

C) $Z_1e^{(K-1)\frac{\pi}{n}i}$

D) $Z_1e^{\frac{2K\pi}{n}i}$

E) $Z_1e^{\frac{(K-1)\pi}{n-1}i}$

30. Resuelva
$\text{sen}(ix)+i\cos(ix)=2i$;
$K\in \mathbb{Z} \quad \wedge \quad i^2=-1$

A) $2K\pi+\ln 2$

B) $2K\pi i-\ln 2$

C) $K\pi-\ln 2$

D) $2K\pi+i\ln 2$

E) $2K\pi i+\ln 2$

31. Simplifique

$$E=\frac{\cos2\theta+i\,\text{sen}2\theta}{\cos(\theta+\beta)-i\,\text{sen}(\theta+\beta)}+\frac{\cos2\theta-i\,\text{sen}2\theta}{\cos(\theta+\beta)+i\,\text{sen}(\theta+\beta)};$$

si $i=\sqrt{-1}$

A) $2\cos(3\theta-\beta)$

B) $2\cos(3\theta+\beta)$

C) $\cos(3\theta+\beta)$

D) $\cos(3\theta-\beta)$

E) $2\csc(3\theta+\beta)$

32. Si $z=a+bi$,
donde $i^2=-1$; $a>0 \wedge b>0$
Calcule en términos de a y b: $\sec[\arg(\text{Ln}Z)]$

A) $\sqrt{4\arctan^2\left(\frac{b}{a}\right)+1}$

B) $\sqrt{\left(\frac{\arctan\left(\frac{b}{a}\right)}{\ln(a^2+b^2)}\right)^2+1}$

C) $\sqrt{\left(\frac{\arctan\left(\frac{b}{a}\right)}{\ln\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2+1}$

D) $\sqrt{\left(\arctan\frac{b}{a}\right)^2+1}$

E) $\sqrt{\left(\frac{2\arctan\left(\frac{b}{a}\right)}{\ln\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2+1}$

33. Se define el seno hiperbólico de θ denotado por $\operatorname{senh}(\theta)=\dfrac{e^{\theta}-e^{-\theta}}{2}$, entonces el valor de $\dfrac{|\operatorname{sen} i\alpha|}{\operatorname{senh}\alpha}$ es

A) -1 B) 1 C) 2

D) -2 E) $\frac{1}{2}$

34. Calcule $\cos(i\ln 5)$

A) $\frac{12}{5}$ B) $\frac{13}{10}$ C) $\frac{12}{17}$

D) $\frac{13}{5}$ E) $\frac{13}{2}$

35. Calcule $\operatorname{arcsen}(i)$, siendo $i^2=-1$

A) $i\ln(\sqrt{2}-1)$ B) $i\ln(\sqrt{2}+1)$ C) $\ln(\sqrt{2}-1)$

D) $\ln(\sqrt{2}+1)$ E) $i\ln(\sqrt{2})$

36. Indique qué alternativa corresponde a $|\cos Z|$, si se define $2\cosh(a)=e^{a}+e^{-a}$ y $2\operatorname{senh}(a)=e^{a}-e^{-a}$, además $Z=x+iy$, $i^2=-1$

A) $\sqrt{\cos^2 x\cosh^2(y)+\operatorname{sen}^2 x\operatorname{senh}^2(y)}$

B) $\sqrt{\cos^2 x\cosh^2(y)-\operatorname{sen}^2 x\operatorname{senh}^2(y)}$

C) $\sqrt{\cos^2 x\operatorname{senh}^2(y)+\operatorname{sen}^2 x\cosh^2(y)}$

D) $\sqrt{\cos^2 x\operatorname{senh}^2(y)-\operatorname{sen}^2 x\cosh^2(y)}$

E) $\sqrt{\operatorname{senh}^2(y)+\cosh^2(y)}$

37. Identifique gráficamente en el plano complejo los conjuntos de números complejos que satisfacen las siguientes condiciones

I) $\operatorname{Re}(z)=2$ II) $\operatorname{Im}(z)=-1$

III) $\operatorname{Re}(z)\geq -\pi$ IV) $\operatorname{Im}(z)=\operatorname{Re}(z)$

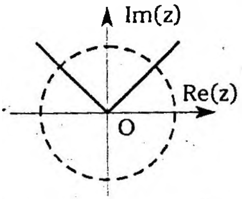
V) $\operatorname{Im}(z)<0$ VI) $\operatorname{Im}(z)=-2\operatorname{Re}(z)\leq 3$

VII) $\operatorname{Im}(z)=[\operatorname{Re}(z)]^2+1$

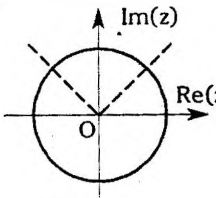
En los problemas del 38 al 50, identifique gráficamente en el plano complejo los conjuntos de números complejos que verifican las condiciones señaladas.

38. Identifique gráficamente en el plano complejo el conjunto de números complejos que verifican la condición señalada. $R_1=\{Z\in\mathbb{C}/\operatorname{Im}(Z)\leq|\operatorname{Re}(Z)|\wedge|Z|<1\}$

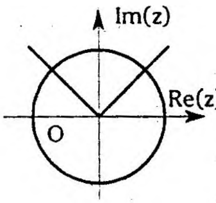
A)



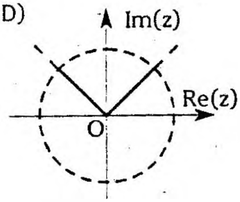
B)



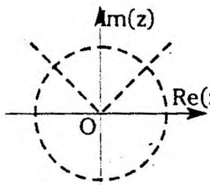
C)



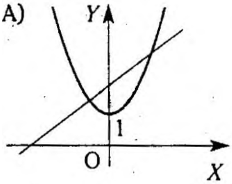
D)

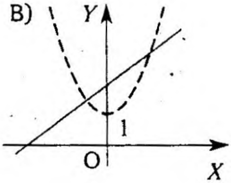


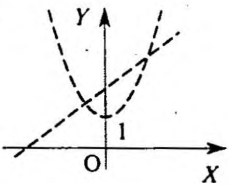
E)

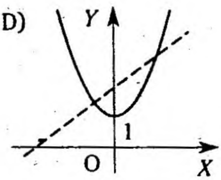


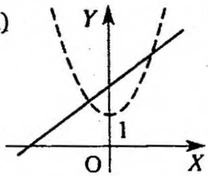
39. $R=\{z\in\mathbb{C}\,/\,\mathrm{Im}(z)>\mathrm{Re}^2(z)+1\wedge \mathrm{Im}(z)-2\mathrm{Re}(z)\leq 3\}$

A) 

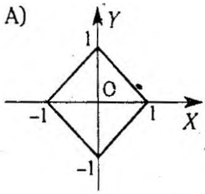
B) 

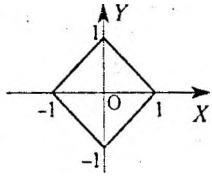
C) 

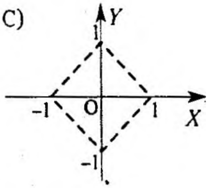
D) 

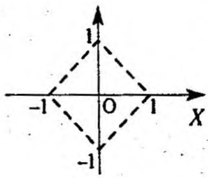
E) 

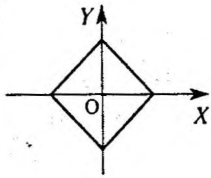
40. $R=\{z\in\mathbb{C}\,/\,|\mathrm{Im}(z)|+|\mathrm{Re}(z)|\leq 1\}$

A) 

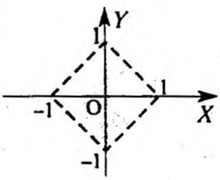
B) 

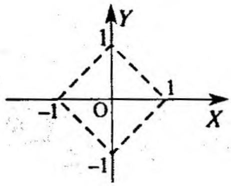
C) 

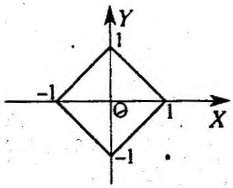
D) 

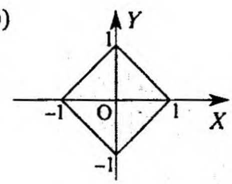
E) 

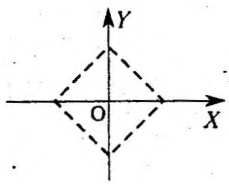
41. $R=\{z\in\mathbb{C}\,/\,|\mathrm{Im}(z)|+|\mathrm{Re}(z)|>1\}$

A) 

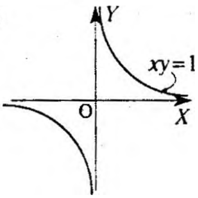
B) 

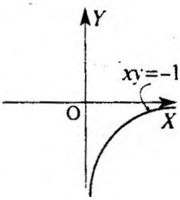
C) 

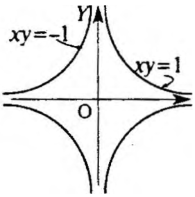
D) 

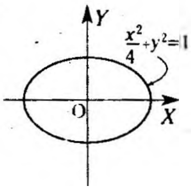
E) 

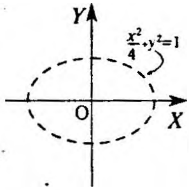
42. $R = \left\{ z\in\mathbb{C} / \mathrm{Im}(\bar{z})^2 \ge 2 \wedge \left|\frac{z-2}{z+2}\right| \le 1 \right\}$

A) 

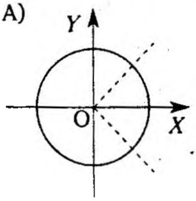
B) 

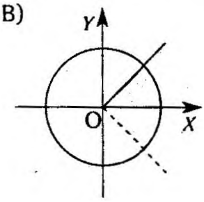
C) 

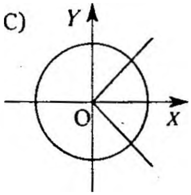
D) 

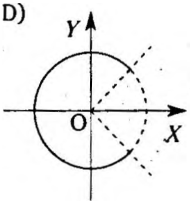
E) 

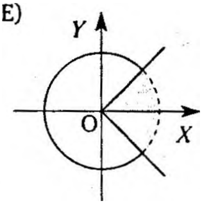
43. $R = \left\{ z = re^{i\theta} \in \mathbb{C} / |z| \le 1 \ \wedge \ -\frac{\pi}{4} \le \mathrm{Arg}(z^2) \le \frac{\pi}{4} \right\}$

A) 

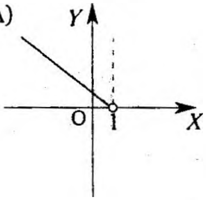
B) 

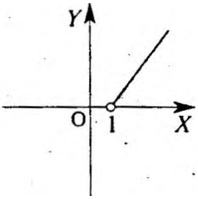
C) 

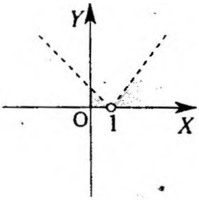
D) 

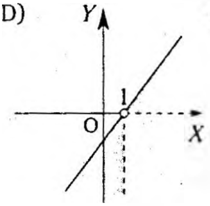
E) 

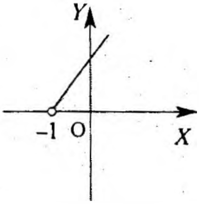
44. $R = \left\{ z\in\mathbb{C} / 0 < \mathrm{Arg}\left(\frac{z-1}{i}\right) \le \frac{\pi}{3} \right\}$

A) 

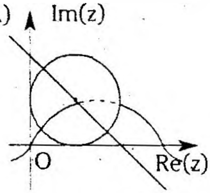
B) 

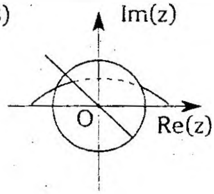
C) 

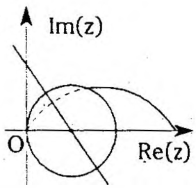
D) 

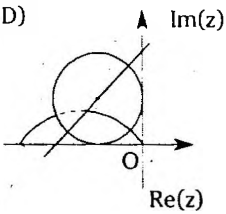
E) 

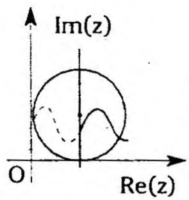
45. $R = \{z \in \mathbb{C} / |z-1-i| \leq 1 \wedge \text{Im}(z) > \text{sen}(\text{Re}(z)) \wedge \wedge\ \text{Im}(z) \geq 2 - \text{Re}(z)\}$

A) 

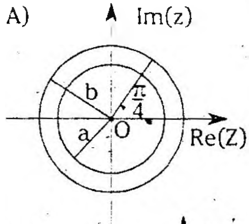
B) 

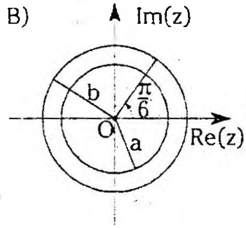
C) 

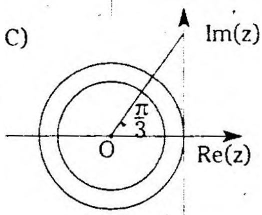
D) 

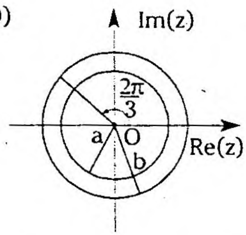
E) 

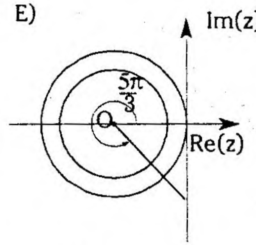
46. $R = \{Z \in \mathbb{C} / a \leq |Z| \leq b \ ;\ a \wedge b \in \mathbb{R}^+ \wedge \wedge\ 0 \leq \text{Arg}\,(Z^3) \leq \frac{\pi}{2}\}$

A) 

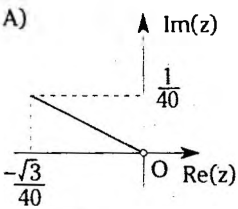
B) 

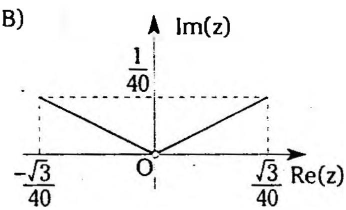
C) 

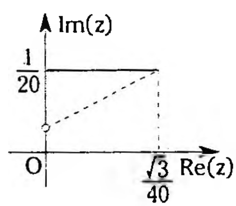
D) 

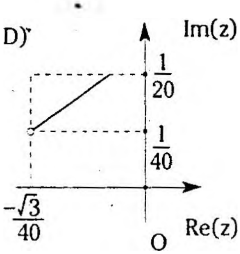
E) 

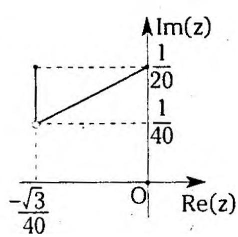
47. $R = \left\{ Z \in \mathbb{C} / \text{Im}(Z) < A \wedge \frac{\pi}{6} \leq \text{Arg}\left(Z - \frac{i}{40} + \frac{\sqrt{3}}{40} \right) \leq \frac{\pi}{2} \right\}$ Siendo $A = \cos(i\ln 20) + i\,\text{sen}(i\ln 20)$

A) 

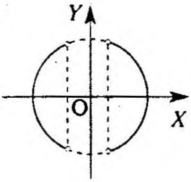
B) 

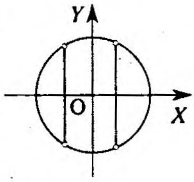
C) 

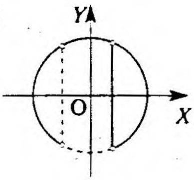
D) 

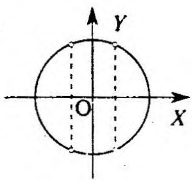
E) 

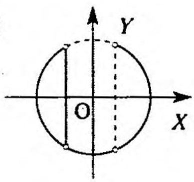
48. $R = \left\{ z \in \mathbb{C} / |Re(z)| < \frac{1}{2} \wedge |z| \leq 1 \right.$

A)


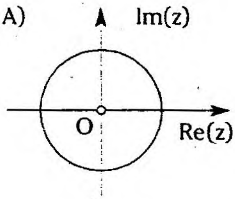
B)


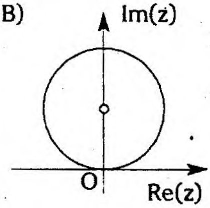
C)


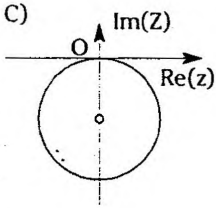
D)


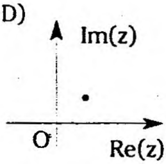
E)


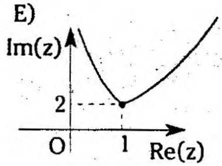
49. $R = \left\{ z \in \mathbb{C} / Im\left(z + \frac{1}{z} \right) = 0 \right\}$

A)


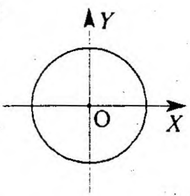
B)


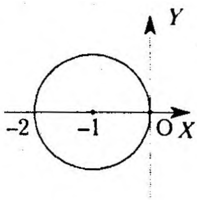
C)


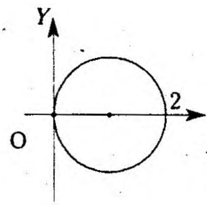
D)


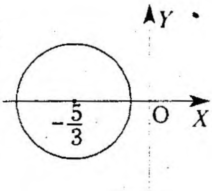
E)


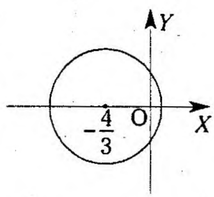
50. $R = \{ z \in \mathbb{C} / |z-1| \geq 2|z+1| \}$

A)


B)


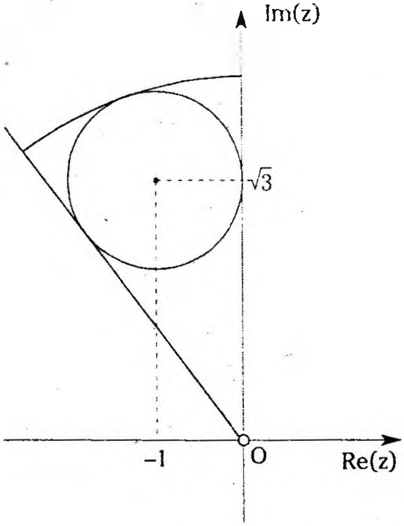
C)


D)


E)


En los problemas del 51 al 54, exprese las regiones correspondientes a números complejos por medio de conjuntos.

51.



A) $\left\{z\in\mathbb{C}/|z-(-1;\sqrt{3})|\geq 1\wedge|z|\leq 3\wedge\frac{\pi}{2}\leq\arg z\leq\frac{5\pi}{6}\right\}$

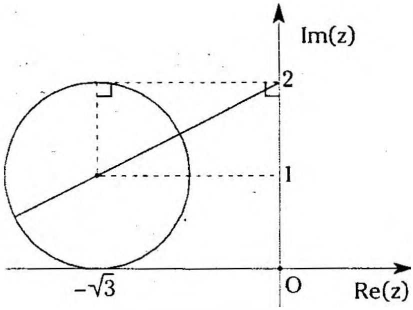
B) $\left\{z\in\mathbb{C}/|z-i|\leq 1\wedge|z|\geq 3\wedge 0\leq\arg z\leq\frac{\pi}{2}\right\}$

C) $\left\{z\in\mathbb{C}/|z-1-4i|\geq 1\wedge|z|\geq 2\wedge\frac{\pi}{4}\leq\arg z\leq\frac{\pi}{2}\right\}$

D) $\left\{z\in\mathbb{C}/|z-2-\sqrt{3}i|\leq 1\wedge|z|\leq 4\wedge 0\leq\arg z<\frac{\pi}{4}\right\}$

E) $\left\{z\in\mathbb{C}/|z-\sqrt{3}-2i|\leq 1\wedge|z|\geq 2\wedge\frac{\pi}{3}\leq\arg z<\frac{5\pi}{6}\right\}$

52.



A) $\left\{z\in\mathbb{C}/|z-1-\sqrt{3}i|\leq 1\wedge\operatorname{Im}(z)\leq\operatorname{Re}(z)+\frac{1}{2}\right\}$

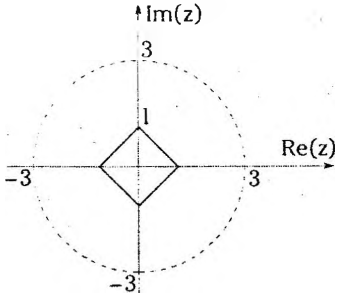
B) $\left\{z\in\mathbb{C}/\ |z-2-\sqrt{3}i|\leq 1\wedge\operatorname{Im}(z)\leq\operatorname{Re}(z)+1\right\}$

C) $\left\{z\in\mathbb{C}/|z-1-i|\leq 2\wedge\operatorname{Im}(z)\leq\operatorname{Re}(z)+3\right\}$

D) $\left\{z\in\mathbb{C}/|z+\sqrt{3}-i|\leq 1\wedge\operatorname{Im}(z)\leq\tan\frac{\pi}{6}\operatorname{Re}(z)+2\right\}$

E) $\left\{z\in\mathbb{C}/|z-1+\sqrt{3}i|\leq 1\wedge\operatorname{Im}(z)\leq\tan\frac{\pi}{3}\operatorname{Re}(z)+1\right\}$

53.



A) $\left\{z\in\mathbb{C}/|\operatorname{Re}(z)|+|\operatorname{Im}(z)|\geq 1\wedge\arg(z)>\frac{\pi}{3}\right\}$

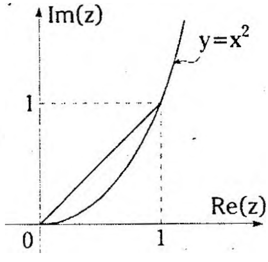
B) $\left\{z\in\mathbb{C}/|\operatorname{Re}(z)|+|\operatorname{Im}(z)|\leq 1\wedge|z|>3\right\}$

C) $\left\{z\in\mathbb{C}/|\operatorname{Re}(z)|+|\operatorname{Im}(z)|\geq 1\wedge|z|<3\right\}$

D) $\left\{z\in\mathbb{C}/|\operatorname{Re}(z)|+|\operatorname{Im}(z)|\leq 1\wedge|z|<2\right\}$

E) $\left\{z\in\mathbb{C}/|\operatorname{Re}(z)|+|\operatorname{Im}(z)|\leq 1\wedge|z|<\frac{1}{3}\right\}$

54.



A) $\{z \in \mathbb{C} / \operatorname{Im}(z) \geq \operatorname{Re}(z) \wedge 0 \leq \operatorname{Re}(z) \leq 1 \wedge \operatorname{Im}(z) \leq 2\}$

B) $\{z \in \mathbb{C} / \operatorname{Im}(z) \geq (\operatorname{Re}(z))^2 \wedge \operatorname{Im}(z) \leq \operatorname{Re}(z)\}$

C) $\{z \in \mathbb{C} / \operatorname{Im}(z) \leq (\operatorname{Re}(z))^2 \wedge 0 \leq \operatorname{Re}(z) \leq 1 \wedge \operatorname{Im}(z) \geq \operatorname{Re}(z)\}$

D) $\{z \in \mathbb{C} / \operatorname{Im}(z) < \operatorname{Re}^2(z) \wedge 0 \leq \operatorname{Re}(2z) \leq 1 \wedge \operatorname{Im}(z) \geq \operatorname{Re}(z)\}$

E) $\{z \in \mathbb{C} / \operatorname{Im}(z) < \operatorname{Re}^2(z) \wedge 0 \leq \operatorname{Re}(z) \leq 1\}$

55. Sabiendo que

$\tan\alpha = \frac{3}{4}$ (α : agudo),

determine el valor de x e y, si se verifica que $m \to \infty +$.

Además

$$x = 7 + \frac{7}{2}\cos\alpha + \frac{7}{2^2}\cos 2\alpha + \ldots + \frac{7}{2^m}\cos m\alpha$$

$$y = \frac{7}{2}\operatorname{sen}\alpha + \frac{7}{2^2}\operatorname{sen}2\alpha + \ldots + \frac{7}{2^m}\operatorname{sen}m\alpha$$

A) $x = \frac{28}{3}$; $y = \frac{14}{3}$

B) $x = \frac{29}{7}$; $y = \frac{15}{7}$

C) $x = 1$; $y = \frac{1}{3}$

D) $x = \frac{38}{3}$; $y = \frac{14}{3}$

E) $x = \frac{17}{3}$; $y = \frac{19}{3}$

56. Sabiendo que

$Z^9 - 1 = 0$; $Z \neq 1$

Calcule

$$F = \sqrt{\cos^4\frac{\pi}{9} + \cos^4\frac{2\pi}{9} + \cos^4\frac{3\pi}{9} + \cos^4\frac{4\pi}{9}}$$

A) $\frac{\sqrt{17}}{3}$ B) $\frac{\sqrt{15}}{4}$ C) $\frac{\sqrt{17}}{4}$

D) $\frac{\sqrt{19}}{2}$ E) $\frac{\sqrt{19}}{4}$

57. Siendo $|a| < 1$, simplifique

$$F = \frac{a\operatorname{sen}\theta + a^2\operatorname{sen}2\theta + a^3\operatorname{sen}3\theta + \ldots\ldots}{1 + a\cos\theta + a^2\cos 2\theta + a^3\cos 3\theta + \ldots\ldots}$$

A) $\frac{a\operatorname{sen}\theta}{1 + 2a\cos\theta}$ B) $\frac{a\operatorname{sen}\theta}{1 - 2a\operatorname{sen}\theta}$ C) $\frac{a\operatorname{sen}\theta}{1 - a\cos\theta}$

D) $\frac{a\operatorname{sen}\theta}{1 + a\cos\theta}$ E) $\frac{a\operatorname{sen}\theta}{1 + \cos\theta}$

58. Siendo Z un número complejo, calcule

$$F = \frac{\operatorname{sen}\bar{z}}{\overline{\operatorname{sen}z}} \cdot \frac{\overline{\cos z}}{\cos\bar{z}} \cdot \frac{\tan\bar{z}}{\overline{\tan z}} + \operatorname{sen}^2 z + \cos^2 z$$

A) 1 B) 2 C) 3

D) 4 E) $\frac{2}{3}$

59. Para la siguiente función $v(x;y)$ tal que $f(z) = \mu + iv$, halle la parte imaginaria de $f(z) = \operatorname{sen}2z$

A) $v = \operatorname{sen}x\cosh(2y)$

B) $v = \operatorname{sen}2x\cosh(2y)$

C) $v = \cos 2x\operatorname{senh}(y)$

D) $v = \cos x\operatorname{senh}(y)$

E) $v = \cos 2x\operatorname{senh}(2y)$

60. Siendo $Z = x + iy$, calcule

$$F = \sqrt{\frac{\operatorname{senh}^2(z) + \cosh^2(z) + \tanh^2(z) + \operatorname{sech}^2(z)}{\sec^2 z - \tan^2 z}}$$

A) $\sqrt{2}\cosh(z)$ B) $\operatorname{senh}(z)$ C) $\sqrt{2}\operatorname{senh}(z)$

D) $\tanh(z)$ E) $\coth(z)$

61. Halle el equivalente de $f(z) = \arccos z$

A) $\ln\left(z + \sqrt{z^2 - 1}\right)$ B) $i\ln\left(z - \sqrt{z^2 + 1}\right)$

C) $\ln\left(z + \sqrt{z^2 + 1}\right)$

D) $\ln\left(z + \sqrt{z^2 - 1}\right)$ E) $\frac{1}{i}\ln\left(z + \sqrt{z^2 - 1}\right)$

62. Sabiendo que $f(z)=\dfrac{z}{z^4+1}$ es continua en todos los puntos dentro y sobre el círculo unitario $|Z|=1$, excepto en cuatro puntos, determine esos puntos.

A) $e^{\frac{k\pi}{4}}$; $k=0,1,2,3$

B) $e^{k\pi}$; $k=0,1,2,3$

C) $e^{(2k+1)\frac{\pi}{4}}$; $k=0,1,2,3$

D) $e^{\frac{k\pi}{8}}$; $k=0,1,2,3$

E) $e^{\frac{k\pi}{16}}$; $k=0,1,2,3$

63. Analice la verdad o falsedad de las siguientes proposiciones

I $\text{Log}(i^3)=3\text{Log}(i)$

II $\text{Log}(-1-i)-\text{Log}\,i\neq\text{Log}\left(\dfrac{-1-i}{i}\right)$

III $\text{Log}z_1+\log z_2=\log z_1z_2$

IV Si: $\text{sen}z=0\Rightarrow z=n\pi$; $n=0,\pm1,\pm2,\ldots$

A) FVVV B) VVVV C) FVFV
D) FVVF E) FFVV

64. Siendo $w=\cot\left(\dfrac{\pi}{4}-i\ln 2\right)$, calcule

$$F=\text{Im}(w)-\text{Re}(w)$$

A) 9/17 B) 6/17 C) 4/17
D) 2/17 E) 7/17

65. Halle $|\tan z|$; siendo $z=x+iy$

A) $\sqrt{\dfrac{\text{senh}^2y+\text{sen}^2x}{\text{senh}^2y+\cos^2x}}$ B) $\sqrt{\dfrac{\text{senh}^2(y)+\text{sen}^2x}{\cosh(2x)+\cos 2y}}$

C) $\dfrac{\text{sen}2x+i\,\text{senh}(2y)}{\cos 2x+\cosh(2y)}$

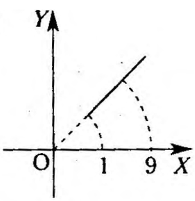
D) $\dfrac{\sqrt{\text{senh}^2(2x)+\text{sen}^2 2y}}{\cosh(2x)+\cos 2y}$ E) $\dfrac{\sqrt{\text{sen}^2 2x+\text{senh}^2(2y)}}{\cos 2x+\cosh(2y)}$

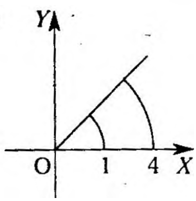
66. Resuelva $\cos z=0$; n entero

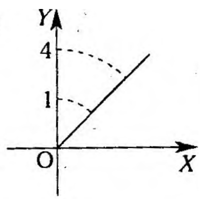
A) $\dfrac{e^i+e^{-i}}{2}$ B) $\dfrac{e^{-i}-e^i}{2}$ C) $\dfrac{n\pi}{2}$

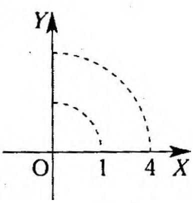
D) $n\pi$ E) $\left(n+\dfrac{1}{2}\right)\pi$

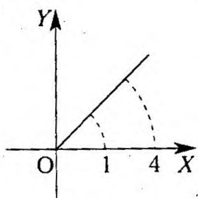
67. Grafique la región definida por $R=\left\{z\in C/|z-1+i|\leq|z+1-i|\wedge 1<|z|<4\wedge 0<\arg z<\dfrac{\pi}{2}\right\}$

A)


B)


C)


D)


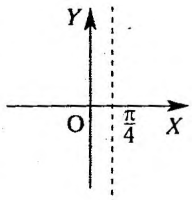
E)


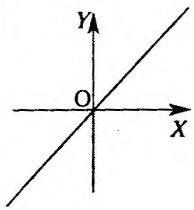
68. Luego de hallar la región $P=\{z\in C/|z|<13 \wedge |z+z_0|+|z-\bar{z}_0|<10/z_0=3-12i\}$ determine su área.

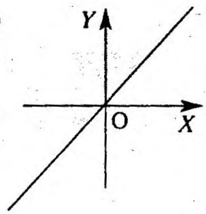
A) $9\pi+50+2\text{arcsen}\left(\frac{1}{2}\right)$ B) $10\pi+169\text{arcsen}\left(\frac{5}{13}\right)-60$ C) $10\pi+168\text{arcsen}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)-50$

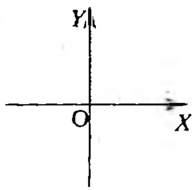
D) $10\pi+169\text{arcsen}\left(\frac{12}{13}\right)-60$ E) $10\pi+160\text{arctg}\left(\frac{5}{12}\right)-50$

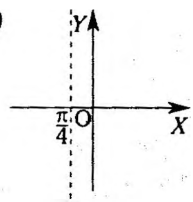
69. Grafique la siguiente región $T=\left\{Z\in \mathbb{C} / |e^{i\text{Im}(Z)}|\leq 2 \wedge \arg e^{i\text{Re}(Z)}<\frac{\pi}{4}\right\}$

A)


B)


C)


D)


E)


70. $m, n, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ simplifique la siguiente expresión

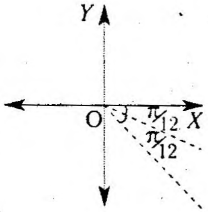
$$N=\frac{\cos(m\alpha+n\beta)+i\text{sen}(m\alpha+n\beta)}{\cos(n\alpha+m\beta)+i\text{sen}(n\alpha+m\beta)}-\frac{\cos(m\alpha+n\beta)-i\text{sen}(m\alpha+n\beta)}{\cos(n\alpha+m\beta)-i\text{sen}(n\alpha+m\beta)}+2\cos[(n-m)(\beta-\alpha)]$$

A) $2e^{i(m+n)(\alpha-\beta)}$ B) $2e^{i(m-n)(\alpha-\beta)}$ C) $2e^{i(m+n)}$

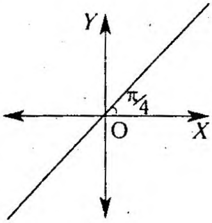
D) $2e^{i(m+n)(\alpha+\beta)}$ E) $2e^{i\left[\frac{\pi}{2}+(n-m)(\alpha-\beta)\right]}$

71. Grafique la siguiente región $M=\left\{z\in\mathbb{C}/\ \frac{\pi}{2}<\arg(\bar{z}^{6})<\pi\right\}$

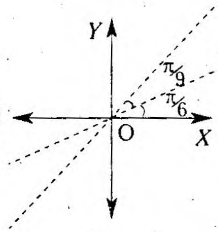
A)



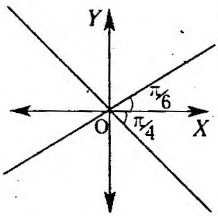
B)



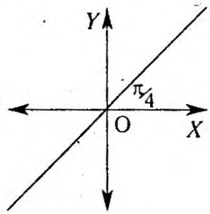
C)



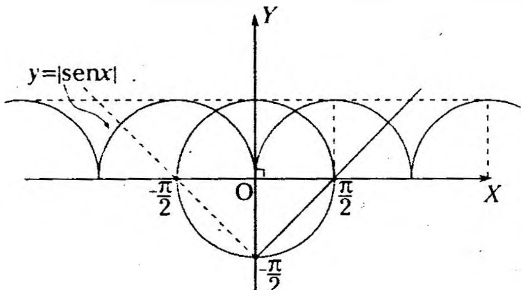
D)



E)



72. Determine el conjunto de números complejos que determina la región sombreada.



A) $\left\{z=re^{i\theta}/|z|\leq\frac{\pi}{2}\ \wedge\ \operatorname{Im}(z)\geq|\operatorname{sen}\operatorname{Re}(z)|\ \wedge\ \frac{\pi}{4}\leq\operatorname{Arg}\left(z+\frac{i\pi}{2}\right)<\frac{3\pi}{4}\right\}$

B) $\left\{z=re^{i\theta}/|z|\geq\frac{\pi}{2}\ \wedge\ \operatorname{Im}(z)\leq|\operatorname{sen}\operatorname{Re}(z)|\ \wedge\ \frac{\pi}{4}<\operatorname{Arg}\left(z+\frac{i\pi}{2}\right)<\frac{3\pi}{4}\right\}$

C) $\left\{Z=re^{i\theta}/|Z|\leq\frac{\pi}{2}\ \wedge\ \operatorname{Im}(Z)\leq|\operatorname{sen}\operatorname{Re}(Z)|\ \wedge\ \frac{\pi}{4}\leq\operatorname{Arg}\left(Z+\frac{i\pi}{2}\right)<\frac{3\pi}{4}\right\}$

D) $\left\{z=re^{i\theta}/|z|\leq\frac{\pi}{2}\ \wedge\ \operatorname{Im}(z)\leq|\operatorname{sen}\operatorname{Re}(z)|\ \wedge\ \frac{\pi}{4}\leq\operatorname{Arg}\left(z+\frac{i\pi}{2}\right)\leq\frac{3\pi}{4}\right\}$

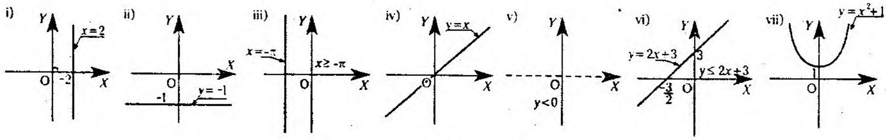
E) $\left\{z=re^{i\theta}/|z|\leq\frac{\pi}{2}\ \wedge\ \operatorname{Im}(z)\leq|\operatorname{sen}\operatorname{Re}(z)|\ \wedge\ \frac{\pi}{4}\leq\operatorname{Arg}\left(z-\frac{i\pi}{2}\right)<\frac{3\pi}{4}\right\}$

Colección Trigonometría

1	C	13	C	25	C
2	C	14	A	26	C
3	C	15	C	27	E
4	A	16	A	28	E
5	D	17	C	29	D
6	A	18	A	30	E
7	C	19	D	31	B
8	A	20	E	32	C
9	C	21	Demostración	33	B
10	A	22	Demostración	34	D
11	E	23	A	35	B
12	A	24	D	36	A

Claves

37



38 D

39 B

40 A

41 B

42 B

43 C

44 A

45 A

46 B

47 E

48 D

49 A

50 D

51 A

52 D

53 C

54 B

55 A

56 E

57 C

58 B

59 E

60 A

61 E

62 C

63 C

64 E

65 A

66 E

67 E

68 B

69 A

70 E

71 A

72 C

Claves

CAPÍTULO

X

Elementos de cálculo: Límites y derivadas



El extremo máximo de un nevado

Entre las aplicaciones de límites y derivadas, tenemos el cálculo de máximos y mínimos. Así, El hombre está en constante desarrollo por explorar y entender los fenómenos naturales. En la cordillera Blanca - Ancash, la cima (máximo extremo superior) del Alpamayo se halla a 6120 msnm. El Alpamayo es considerada "la montaña más bella del Mundo".

L E C T U R A

LA RELACIÓN ENTRE EL NÚMERO Y EL INTERÉS COMPUESTO

Es muy probable que haya oído hablar de intereses compuestos, puesto que estamos inmiscuidos en nuestro entorno social con personas que, de una u otra forma, alguna vez han pedido un préstamo a un banco o tienen una cuenta de ahorro, o compran un objeto a crédito: ello significa que los intereses se calculan sobre el monto que usted ha depositado como ahorro y también sobre los intereses que haya ganado al momento del cálculo.
A continuación, hacemos la siguiente consideración: supongamos que Andrés le prestó a Omar la cantidad de 1 nuevo sol al interés de 100% anual. Al final del año, Omar vendría a pagarle y traería 2 nuevos soles: 1 que tomó prestado y 1 de interés. Pero si Omar viniese a pagar seis meses después del préstamo, Andrés apenas recibiría $1+\frac{1}{2}$ nuevos soles. Pero esto quiere decir que, en aquella ocasión, Omar estaba con $1+\frac{1}{2}$ nuevos soles de Andrés y se quedó con ese dinero por seis meses más, a la tasa de 100% anual; luego, debería pagarle $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}\right)=\left(1+\frac{1}{2}\right)^2$ nuevos soles a fin de año: esto daría 2,25 nuevos soles. ¿Será justo este cálculo? Veamos ahora cuál es el máximo beneficio. Si se divide el año en un número "n" de partes iguales, transcurrido el primer período de $\frac{1}{n}$ año, el capital prestado estaría valiendo $\left(1+\frac{1}{n}\right)$ nuevos soles. Al final del segundo período de $\frac{1}{n}$ año estaría en $\left(1+\frac{1}{n}\right)^2$ nuevos soles, y así sucesivamente. A fin de año, Andrés debería recibir $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ nuevos soles. Debemos hacer tender n al infinito, es decir, el máximo capital que podríamos obtener al final del año sería:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e \approx 2,7182\ldots \text{ nuevos soles}$$

En general
Sea Co el capital inicial (la cantidad de dinero con que se calculan los intereses que usted dispone para ahorrar). h la fracción del año, por lo que el capital C al final del año será una función de h, la cuál denotaremos C(h), ahora asumimos también que la tasa de interés es r% anual; siguiendo el razonamiento anterior, obtenemos:

$$C(h)=Co\left(1+\frac{r}{100}.h\right)^{1/h}$$

Entonces podemos plantear que el capital final del año será:

$$\boxed{C=Co\times e^{r/100}}$$

Elementos de cálculo: Límites y derivadas

OBJETIVOS

- Aplicar los conceptos de límite de una función, para resolver y simplificar problemas de carácter real.
- Comprender las nociones de continuidad y reconocer puntos de discontinuidad de una función.
- Comprender el concepto de derivada, su significado geométrico y su aplicación en la resolución de problemas.
- Trazar gráficos precisos de funciones, analizando sus características al usar límites y derivadas.

INTRODUCCIÓN

En este capítulo se examina y fundamenta la teoría de límite para el estudio y desarrollo del cálculo diferencial e integral. En nuestra vida cotidiana, el análisis matemático es un instrumento insustituible de investigación y sustento en las más diversas aplicaciones de la ciencia e ingeniería. Los conocimientos del cálculo diferencial e integral son indispensables para todo científico e ingeniero. Sin embargo, para dicho estudio es necesario conocer la teoría de límites.

Efectivamente, con el estudio de la teoría de límites y su posterior aplicación a las derivadas de una función, se determinan:

- el área debajo de una curva
- el área de un círculo (véase figura 10.1)
- la longitud de una circunferencia
- el volumen del cilindro y del cono

La pendiente de una curva es el límite de las pendientes de las rectas secantes; la velocidad instantánea es el límite de las velocidades medias.

También se dará importancia y énfasis a las operaciones con límites trigonométricos notables como $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x}$, etc. Asimismo a las derivadas y aplicaciones de las funciones trigonométricas en el cálculo de máximos y mínimos de funciones.

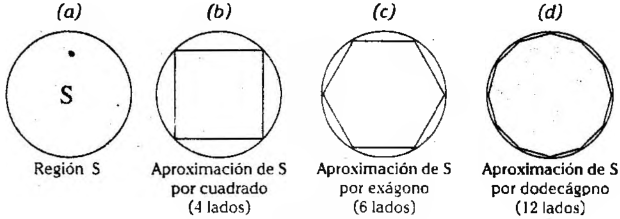


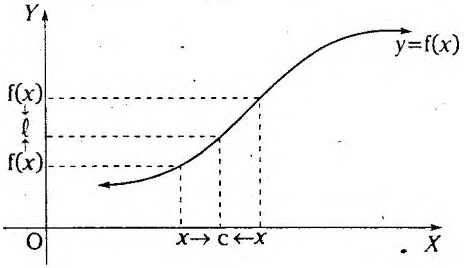
Figura 10.1

NOCIÓN INTUITIVA DE LÍMITE

¿Qué significa el símbolo $\lim\limits_{x\to c} f(x)=\ell$?

Significa que una función $f(x)$ tiende, o se aproxima, a ℓ, cuando x está muy próximo a **c** (diferente de **c**) o dicho de otra manera, para x próximo a **c**, pero distinto a **c**, $f(x)$ está próximo a ℓ.

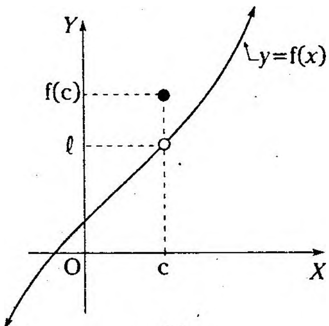
En la figura se ha ilustrado esta idea: la curva representa la gráfica de la función **f**. El número **c** aparece en el eje *X*, y el límite ℓ, en el eje *Y*. Nótese que cuando evaluamos la función para valores próximos a **c**, $f(x)$ se aproxima a ℓ.



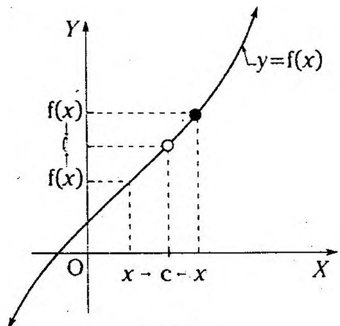
(a)

Al tomar el límite cuando x se aproxima a **c**, no importa el hecho de que f no esté definida en c, ni qué valor toma en ese punto si lo está. Lo único que importa es cómo f está definido cerca de **c**.

Por ejemplo, en la figura 10.2(b) se tiene la gráfica de la función f: es discontinua, pero f está definida en **c**; sin embargo, se verifica que $\lim\limits_{x\to c} f(x)=\ell$, puesto que, como se observa en la figura 10.2(c), cuando x se aproxima a **c**, $f(x)$ se aproxima a ℓ.



(b)



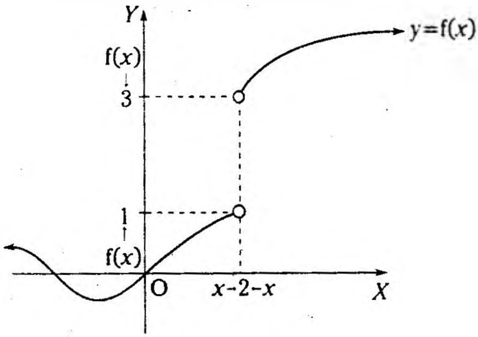
(c)

Los números x, que están cerca de c, se dividen en dos clases: los que están a la izquierda de c y los que están a la derecha de c, por ejemplo:

- $\lim\limits_{x\to c^-} f(x)=\ell$... Significa que cuando x se aproxima a **c** por la izquierda $f(x)$ se aproxima a ℓ, o el límite por la izquierda de $f(x)$ cuando x tiende a **c** es ℓ.
- $\lim\limits_{x\to c^+} f(x)=\ell$... Significa que cuando x se aproxima a **c** por la derecha $f(x)$ se aproxima a ℓ o el límite por la derecha de $f(x)$ cuando x tiende a **c** es ℓ.

En el ejemplo anterior, se observa que los límites por la izquierda y por la derecha coinciden.

En cambio, en la figura 10.2(d) se tiene la gráfica de una función f; nótese que los límites por la derecha e izquierda (límites laterales), para valores de x próximos a 2, no están coincidiendo o no tienen el mismo valor real.



(d)

Figura 10.2

Ya que $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=1$ y $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=3$

¿Cuándo podemos afirmar que $\lim\limits_{x\to c} f(x)$, existe o tiene un valor real?

Observación

En esta parte de noción de límite, podemos plantear que si se cumple $\lim\limits_{x\to c} f(x)=\ell$ entonces, se debe verificar previamente que los límites laterales coincidan, es decir

$$\lim_{x\to c^-} f(x)=\ell \quad \text{y} \quad \lim_{x\to c^+} f(x)=\ell$$

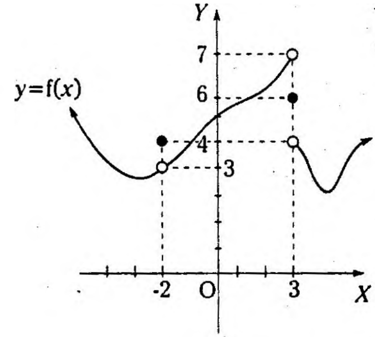
Ejemplos

- En la figura10.3 (a) se ha representado la gráfica de la función f, donde:

  $\lim\limits_{x\to(-2)^-} f(x)=3$ y $\lim\limits_{x\to(-2)^+} f(x)=3$

  Por lo tanto

  $\lim\limits_{x\to -2} f(x)=3$ (existe)



(a)

No importa que $f(-2)=4$

En cambio

$\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=7$ y $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=4$

Por lo tanto

$\lim\limits_{x\to 3} f(x)$ no existe, así se cumpla $f(3)=6$

- En la figura 10.3(b) se tiene la gráfica de una función f, en la cual se observa que, cuando x se aproxima a $\frac{\pi}{2}$ por la izquierda o por la derecha, $f(x)$ no puede quedarse cerca de ningún número fijado, luego

  $\lim\limits_{x\to\pi/2} f(x)$: no tiene un valor real

  Sin embargo, se aprecia que cuando x se acerca a $\frac{\pi}{2}$ por la izquierda, $f(x)$ crece positivamente y se escribe $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-} f(x)=+\infty$

  Análogamente, cuando x se acerca a $\pi/2$ por la derecha, tenemos: $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^+} f(x)=+\infty$

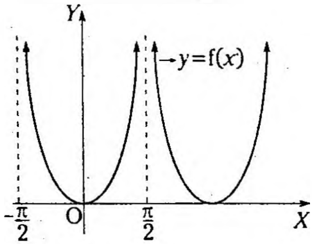
  Por lo tanto, cuando x tiende a $\frac{\pi}{2}$ por la derecha o izquierda, $f(x)$ crece indefinidamente y escribimos

  $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} f(x)=+\infty$... Se lee como el límite de $f(x)$ cuando x tiende a $\frac{\pi}{2}$, es infinito positivo o no tiene valor real.

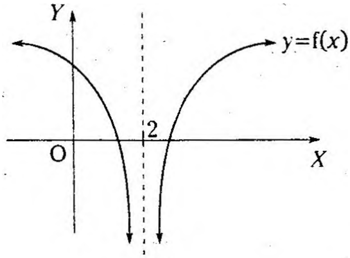
Nota

$+\infty$ no es un símbolo que corresponda a un número real; por eso, cuando escribimos $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$, ello no significa lo mismo que $\lim_{x \to a} f(x) = \ell$, donde ℓ es un número real.

- De la figura 10.3(c) tenemos la gráfica de una función f, donde
  $\lim_{x \to 2} f(x) = -\infty$ ... Se lee como el límite de $f(x)$ cuando x tiende a 2 es infinito negativo, o no tiene valor real



(b)



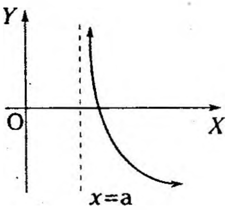
(c)

Figura 10.3

Definición

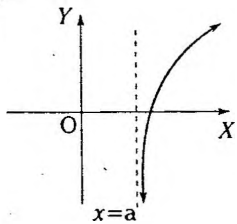
La recta $x = a$, es una asíntota vertical de la gráfica de una función f, si por lo menos uno de los enunciados siguientes es verdadero.

I. $\lim_{x \to a^+} f(x) = +\infty$



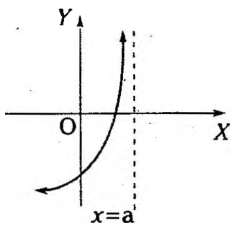
(a)

II. $\lim_{x \to a^+} f(x) = -\infty$



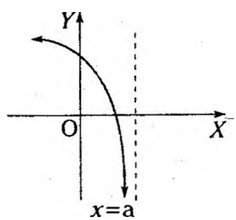
(b)

III. $\lim_{x \to a^-} f(x) = +\infty$



(c)

IV. $\lim_{x \to a^-} f(x) = -\infty$



(d)

Figura 10.4

Ejemplo 1

La función $f(x)=\dfrac{2}{x+3}$, cumple con

$$\lim_{x\to -3^-} f(x) = -\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x\to -3^+} f(x) = +\infty$$

Por lo tanto, se deduce que $x=-3$ es una asíntota vertical de la gráfica de f. En la figura 10.5 se muestra el trazo de la gráfica de f.

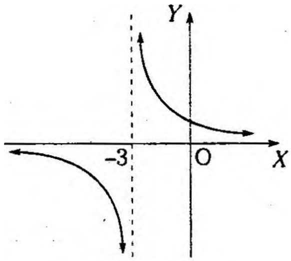


Figura 10.5

Ejemplo 2

De la función f cuya regla de correspondencia es

$$f(x)=\frac{\operatorname{sen}2x\csc x}{\operatorname{sen}2x-\cos x}$$

Se tiene que

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{6}} f(x)=\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{\operatorname{sen}2x\csc x}{\operatorname{sen}2x-\cos x}$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{6}} f(x)=\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{2\operatorname{sen}x\cos x\csc x}{2\operatorname{sen}x\cos x-\cos x}$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{6}} f(x)=\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{2}{2\operatorname{sen}x-1}$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{6}} f(x)=+\infty$$

$\therefore\ x=\dfrac{\pi}{6}$ es una asíntota vertical

Definición Formal del Límite de una Función

Sea $f: I\subset R\to R$ una función cuyo dominio es un intervalo abierto I el cual contiene al punto $x=c$ (también puede darse el caso de que $x=c$ no pertenezca a I).

El límite de $f(x)$ cuando x tiende a **c** es ℓ, y se escribe $\lim\limits_{x\to c} f(x)=\ell$

si y solo si para cada $\varepsilon>0$ existe un $\delta>0$ tal que

si $0<|x-c|<\delta$, entonces $|f(x)-\ell|<\varepsilon$

En la figura 10.6 se ilustra esta definición

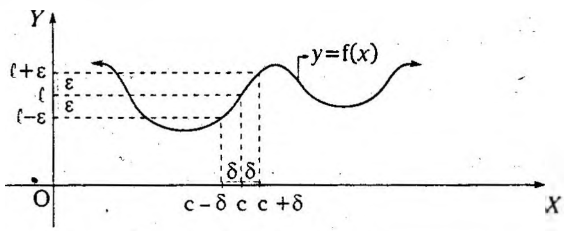


Figura 10.6

El desarrollo de ejercicios, utilizando la definición anterior, escapa a los objetivos de este capítulo, que son los límites trigonométricos. Es recomendable que el epsilón (ε) escogido sea un número positivo pequeño (no trabaje con números grandes).

Continuidad

A menudo, mencionar que un proceso es **continuo** equivale a decir que transcurre sin interrupción y sin cambios abruptos. En matemática, la palabra **continuo** tiene, en gran parte, el mismo significado.

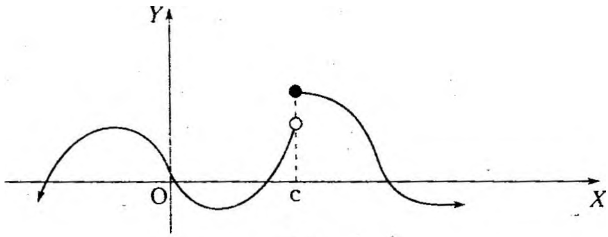
Definición (continuidad en un punto)

Sea **f** una función que puede quedar definida en un intervalo abierto, donde esté contenido el número **c**. Diremos que f es continua en **c**, si y solo si: $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$

Además, podemos complementarlo diciendo que una función f solo puede dejar de ser continua en c por una de las dos razones siguientes:

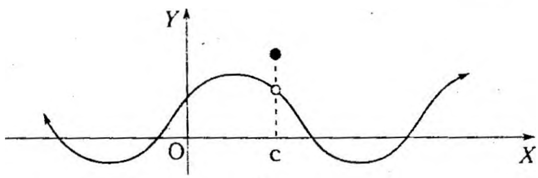
- f(x) no tiene límite cuando x tiende a **c**.
- f(x) tiene un límite que difiere de f(c).

Así, la función representada en la figura 10.7(a) es discontínua en **c** al no tener límite en ese punto.



(a)

La función representada en la figura 10.7(b) tiene un límite en **c**, pero es discontinuo en **c** porque su límite en **c** no coincide con el valor que toma en ese punto.



(b)

Figura 10.7

Nótese que las funciones representadas en las figuras **10.7(a)** y **10.7(b)** son continuas para cualquier otro número diferente de **c**.

Podemos concluir esta parte señalando que una función f es continua en c, si y solo si $f(c) = \lim_{x \to c^-} f(x) = \lim_{x \to c^+} f(x)$

Ejemplo 1
Determine las discontinuidades de la siguiente función

$$f(x)=\begin{cases}-\operatorname{sen}2x+4\,; & x<\frac{\pi}{2}\\ \cot x\,; & \frac{\pi}{2}\leq x<\pi\\ \cos x+2\,; & \pi\leq x<2\pi\\ \frac{3x}{2\pi}\,; & 2\pi\leq x\end{cases}$$

Resolución
Está claro que f es continua, en cualquier número contenido, en los intervalos abiertos

$$\left\langle -\infty;\frac{\pi}{2}\right\rangle,\ \left\langle \frac{\pi}{2};\pi\right\rangle,\ \langle \pi;2\pi\rangle,\ \langle 2\pi;+\infty\rangle$$

Entonces, solo tenemos que estudiar el comportamiento de f, en los puntos $x=\frac{\pi}{2};\ \pi;\ 2\pi$

En $x=\frac{\pi}{2}$ tenemos

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\cot\frac{\pi}{2}=0;\ \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} f(x)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}(-\operatorname{sen}2x+4)=4$$

y $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+} f(x)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+} \cot x=0$

como $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} f(x)\neq\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+} f(x)$, entonces $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} f(x)$ no existe

Por lo tanto, f es discontinua en $\frac{\pi}{2}$.

los resultados de los demás puntos, incluyendo el analizado $\left(x=\frac{\pi}{2}\right)$, quedan reflejados en la siguiente tabla

c	f(c)	$\lim_{x\to c^-} f(x)$	$\lim_{x\to c^+} f(x)$	conclusión
$\frac{\pi}{2}$	0	4	0	discontinua
π	1	no existe ó $-\infty$	1	discontinua
2π	3	3	3	continua

Finalmente la respuesta de este ejercicio serán los puntos $\frac{\pi}{2}$ y π.

En la figura 10.8 se ha bosquejado la gráfica de f correspondiente a este ejemplo.

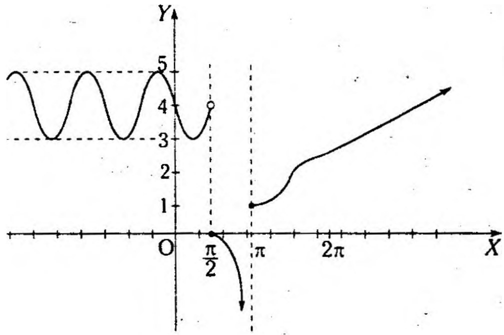


Figura 10.8

Ejemplo 2
Verifique que la función f, definida por

$$f(x)=\begin{cases}x^2+2\,; & x\leq 0\\ \frac{2\operatorname{sen}x}{x}\,; & x>0\end{cases}$$

es continua en c=0

Resolución
Se observa que f(0) está definido, es decir f(0)=2

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}(x^2+2)=2$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{2\operatorname{sen}x}{x}=2$$

entonces

$$\lim_{x\to 0} f(x)=2$$

y como

$$\lim_{x\to 0} f(x)=f(0)=2$$

entonces f es continua en c=0

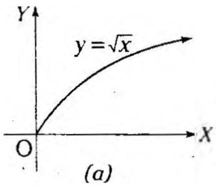
Definición (continuidad lateral)

Una función f es

I. continua por la izquierda de c, si y solo si $\lim\limits_{x \to c^-} f(x) = f(c)$

II. continua por la derecha de c, si y solo si $\lim\limits_{x \to c^+} f(x) = f(c)$

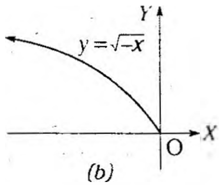
En la figura 10.9(a), tenemos un ejemplo de continuidad por la derecha de cero; y en la figura 10.9(b) tenemos un ejemplo de continuidad por la izquierda de cero.



(a)

Función continua a la derecha de O, ya que

$\lim\limits_{x \to 0} \sqrt{x} = 0$



(b)

Función continua a la izquierda de O, ya que

$\lim\limits_{x \to 0} \sqrt{-x} = 0$

Figura 10.9

Definición (continuidad en un intervalo cerrado)

Para una función f definida sobre un intervalo $[a; b]$, diremos que f es continua en dicho intervalo si se cumplen las siguientes condiciones:

I. Continuidad en cada punto c del intervalo abierto $\langle a; b\rangle$

II. Continuidad por la derecha de a, y.

III. Continuidad por la izquierda de b.

Por ejemplo, la función $f(x) = \arccos x$ (cuya gráfica la tenemos en la figura 10.10). Es continua en el intervalo cerrado $[-1; 1]$, puesto que es continua en cualquier número de $\langle -1; 1\rangle$, continua por la derecha de -1 y continua por la izquierda de 1.

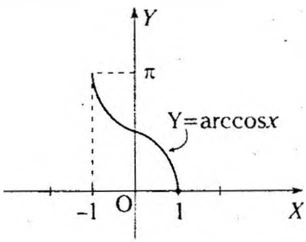


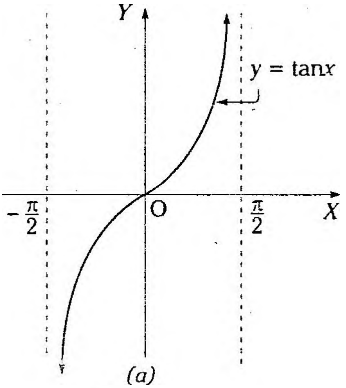
Figura 10.10

Definición (continuidad en un intervalo abierto)

Si una función f es continua en cada punto del intervalo abierto $\langle a; b\rangle$, entonces diremos que f es continua en $\langle a; b\rangle$.

Ejemplo 1

Tenemos la función $f(x) = \tan x$ donde su gráfica parcial, la tenemos en la figura 10.11(a)



(a)

Esta función es continua en el intervalo abierto $\left\langle -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right\rangle$, puesto que es continua en cada número perteneciente a dicho intervalo.

Ejemplo 2

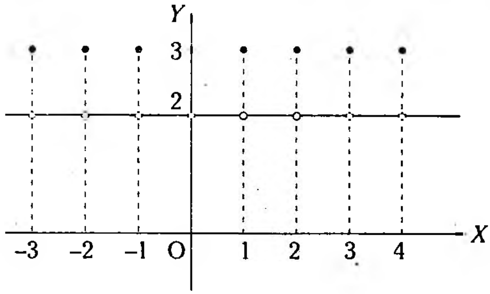
La función $f(x) = \begin{cases} 3, & x \in \mathbb{Z} \\ 2, & x \in \mathbb{R} - \mathbb{Z} \end{cases}$

cuya gráfica es 10.11(b), tiene límite en todo punto de su dominio $\mathbb{R}$, pero si $c \in \mathbb{Z}$ entonces

$$\lim_{x \to c} f(x) = 2$$

$$f(c) = 3 \neq 2$$

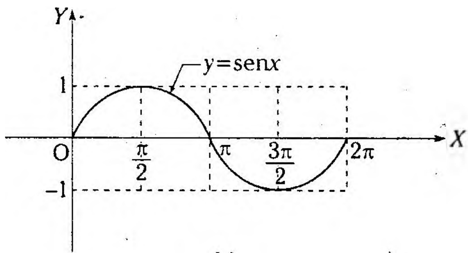
entonces f no es continua en $c \in \mathbb{Z}$



(b)

Ejemplo 3

La función $f(x) = \operatorname{sen} x$, donde su gráfica parcial, la tenemos en la figura 10.11(c).



(c)

Figura 10.11

Esta función es continua en el intervalo $\langle 0; 2\pi\rangle$ ya que es continua en cada número que pertenece a dicho intervalo.

Teorema de la función intermedia o de estricción

Si las funciones f, g y h están definidas en algún intervalo abierto I, donde está contenido el número c, excepto posiblemente en c mismo, y que $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ para todo x en I para lo cual $x \neq c$, entonces si $\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} h(x) = \ell$

Por lo tanto $\lim_{x\to c} g(x) = \ell$

Para ilustrar este teorema, en la figura 10.12 están representadas las gráficas de tres funciones f, g y h. Se observa que, para x próximo a c, g esta "atrapada" entre f y h (los valores de estas funciones en el mismo punto c no tienen importancia); además, se observa que cuando x tiende a c, $f(x)$ y $h(x)$ tienden ambos al mismo límite ℓ, entonces también $g(x)$ tiende a ℓ.

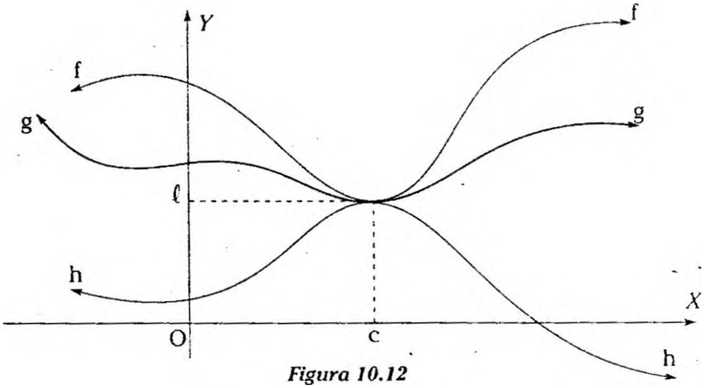


Figura 10.12

Ejemplo

Calcule

$$L = \lim_{x\to 0} x \operatorname{sen}\frac{1}{x}$$

Resolución

$$\left|x \operatorname{sen}\frac{1}{x}\right| = |x|\left|\operatorname{sen}\frac{1}{x}\right|$$

como $\left|\operatorname{sen}\frac{1}{x}\right| \leq 1 \quad \forall x \neq 0$

$$\Rightarrow |x|\left|\operatorname{sen}\frac{1}{x}\right| \leq |x|$$

$$\Rightarrow 0 \leq \left|x \operatorname{sen}\frac{1}{x}\right| \leq |x|$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0}\left|x \operatorname{sen}\frac{1}{x} = 0\right| \text{ (Por el teorema de estricción)}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} x \operatorname{sen}\frac{1}{x} = 0,$$

pues $\lim_{x\to 0} f(x) = 0 \leftrightarrow \lim_{x\to 0} |f(x)| = 0$

$\therefore L = 0$

LÍMITES TRIGONOMÉTRICOS NOTABLES

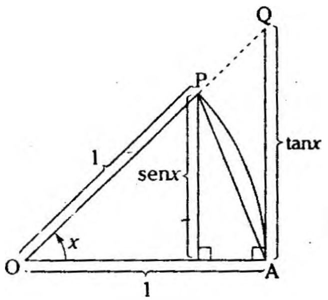
A continuación, vamos a utilizar el teorema de la función intermedia para demostrar límites trigonométricos que serán de mucha utilidad para cálculos posteriores.

Teorema

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}x}{x}=1$$

Demostración

Primero, analizaremos cuando x tiende a cero por la derecha, es decir, para $x>0$.



(a)

En la figura 10.13(a) se tiene que el ángulo x positivo, está expresado en radianes, donde

$$\begin{pmatrix}\text{área de}\\ \text{la región}\\ \text{triangular}\\ \text{OPA}\end{pmatrix} < \begin{pmatrix}\text{área del}\\ \text{sector}\\ \text{circular}\\ \text{OPA}\end{pmatrix} < \begin{pmatrix}\text{área de la}\\ \text{región}\\ \text{triangular}\\ \text{OAQ}\end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{2}\operatorname{sen}x \quad < \quad \frac{1}{2}x \quad < \quad \frac{1}{2}\tan x$$

$$\operatorname{sen}x \quad < \quad x \quad < \quad \frac{\operatorname{sen}x}{\cos x}$$

$$\frac{1}{\operatorname{sen}x} \quad > \quad \frac{1}{x} \quad > \quad \frac{\cos x}{\operatorname{sen}x}$$

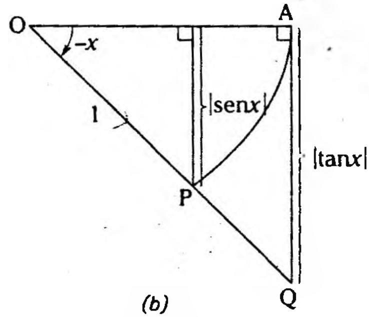
Multiplicando por $\operatorname{sen}x$; ($\operatorname{sen}x>0$)

$$1 \quad > \quad \frac{\operatorname{sen}x}{x} \quad > \quad \cos x$$

Ordenando

$$\cos x \quad < \quad \frac{\operatorname{sen}x}{x} \quad < \quad 1$$

Ahora, analizando cuando x tiende a cero por la izquierda, es decir $x<0$.



(b)

Figura 10.13

En la figura 10.13(b) se tiene una circunferencia cuya medida en radianes del ángulo central es $|x|$, además se verifica:

$$\frac{1}{2}|\operatorname{sen}x| < \frac{1}{2}|x| < \frac{1}{2}|\tan x|$$

Como $x<0$ y próximo a cero, entonces $|\operatorname{sen}x|=-\operatorname{sen}x$; $|x|=-x$ y $|\tan x|=-\tan x$, de donde obtenemos $-\frac{1}{2}\operatorname{sen}x<-\frac{1}{2}x<-\frac{1}{2}\tan x$

De donde $\operatorname{sen}x>x>\tan x$

$$\Rightarrow \frac{\operatorname{sen}x}{\operatorname{sen}x}<\frac{x}{\operatorname{sen}x}<\frac{\tan x}{\operatorname{sen}x}$$

Reduciendo $1<\dfrac{x}{\operatorname{sen}x}<\dfrac{1}{\cos x}$

Luego $\qquad \cos x<\dfrac{\operatorname{sen}x}{x}<1$

Entonces, decimos que la desigualdad $\cos x<\dfrac{\operatorname{sen}x}{x}<1$ se cumple para x próximo a cero (por la derecha o izquierda).

Además $\lim\limits_{x\to 0}\cos x=\cos 0=1$ y $\lim\limits_{x\to 0}1=1$.

Finalmente, por el teorema de la función intermedia, concluimos que $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sen}x}{x}=1$

En la figura 10.14, se tiene la gráfica de la función $f(x)=\dfrac{\operatorname{sen}x}{x}$, cuyo dominio son todos los reales, excepto cero; nótese que cuando x se aproxima a cero por la derecha o izquierda, f(x) tiende al valor de 1, sin importar que f(0) no esté definido.

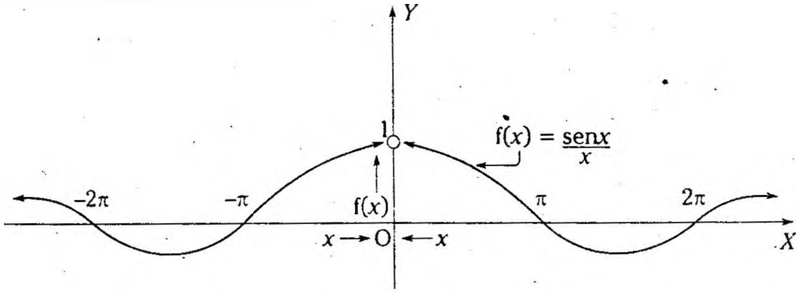


Figura 10.14

En forma análoga al teorema anterior, se demuestra el siguiente teorema.

Teorema

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=1$$

Sin embargo, este teorema lo podemos demostrar utilizando identidades y aplicando lo anterior.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\operatorname{sen}x}{\cos x}}{x}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}x}{x}\times\frac{1}{\cos x}$$
$$=\underbrace{\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}x}{x}}_{1}\times\underbrace{\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}}_{1}$$

$$\therefore\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=1$$

Ejemplo

Determine si existe $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sen}3x}{x}$

Resolución

Hay que escribir el cociente $\dfrac{\operatorname{sen}3x}{x}$ de tal manera que podamos aplicar el teorema como $x\neq 0$ (ya que x solo se aproxima a cero); tenemos

$$\frac{\operatorname{sen}3x}{x}=\frac{3\operatorname{sen}3x}{3x}$$

Cuando x tiende a cero, $3x$ tiende a cero; lo mismo sucede con $3x$, entonces

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}3x}{x}=\lim_{3x\to 0}\frac{3\operatorname{sen}3x}{3x}$$
$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}3x}{x}=\underbrace{\lim_{x\to 0}3}\times\underbrace{\lim_{3x\to 0}\frac{\operatorname{sen}3x}{3x}}$$
$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}3x}{x}=3\times 1\quad\therefore\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}3x}{x}=3$$

Teorema

Para todo número real p diferente de cero, se verifican

I. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sen}px}{x}=p$

II. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan px}{x}=p$

Ejemplo

Calcule el siguiente límite $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan 2x}{\tan 5x}$

Resolución

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan 2x}{\tan 5x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\times\frac{\tan 2x}{2x}}{5\times\frac{\tan 5x}{5x}}$$

$$=\frac{\lim\limits_{2x\to 0}2\times\frac{\tan 2x}{2x}}{\lim\limits_{5x\to 0}5\times\frac{\tan 5x}{5x}}=\frac{2\times\lim\limits_{2x\to 0}\frac{\tan 2x}{2x}}{5\times\lim\limits_{5x\to 0}\frac{\tan 5x}{5x}}=\frac{2\times 1}{5\times 1}=\frac{2}{5}$$

Teorema

Para todo p y q pertenecientes a los reales, tal que $q \neq 0$, se verifica

I. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\text{sen}(px)}{\text{sen}(qx)} = \dfrac{p}{q}$ III. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\text{sen}(px)}{\tan(qx)} = \dfrac{p}{q}$

II. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan(px)}{\tan(qx)} = \dfrac{p}{q}$ IV. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan(px)}{\text{sen}(qx)} = \dfrac{p}{q}$

Ejemplo

- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\text{sen}\,4x}{\text{sen}\,2x} = \dfrac{4}{2} = 2$

Teniendo en cuenta el límite siguiente $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\text{sen}\,x}{x} = 1$, se puede demostrar el teorema siguiente

Teorema

$$\lim_{x\to 0} \frac{\text{arcsen}\,x}{x} = 1 \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\text{arctan}\,x}{x} = 1$$

Demostración
Por la propiedad de funciones trigonométricas inversas $\text{sen}(\text{arcsen}x) = x$

luego $\dfrac{\text{arcsen}\,x}{x} = \dfrac{\text{arcsen}\,x}{\text{sen}(\text{arcsen}\,x)}$

como x tiende a cero, lo mismo sucede con arcsen$x$, entonces

$$\lim_{x\to 0} \frac{\text{arcsen}\,x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\text{arcsen}\,x}{\text{sen}(\text{arcsen}\,x)}$$

haciendo $\text{arcsen}x = \theta$, en consecuencia θ tiende a cero, luego

$$\lim_{x\to 0} \frac{\text{arcsen}x}{x} = \lim_{\theta\to 0} \frac{\theta}{\text{sen}\,\theta}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\text{arcsen}x}{x} = \lim_{\theta\to 0} \left(\frac{\text{sen}\,\theta}{\theta}\right)^{-1}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\text{arcsen}x}{x} = \left(\lim_{\theta\to 0} \frac{\text{sen}\,\theta}{\theta}\right)^{-1}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\text{arcsen}x}{x} = (1)^{-1}$$

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\text{arcsen}x}{x} = 1$ (Esto es lo que se buscaba demostrar)

Nota

En las demostraciones anteriores, se ha utilizado algunas propiedades de límites. Para su revisión y demostración se sugiere al lector revisar un texto más abocado al tema de límites en general.

A continuación, se plantea algunas de éstas propiedades o teoremas de límites.

I. $\lim\limits_{x\to a} [f(x) + g(x)] = \lim\limits_{x\to a} f(x) + \lim\limits_{x\to a} g(x)$

II. $\lim\limits_{x\to a} [f(x)\, g(x)] = \lim\limits_{x\to a} f(x)\, \lim\limits_{x\to a} g(x)$

III. $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}$; $g(x) \neq 0$

IV. $\lim\limits_{x\to a} c = c$; donde c es constante

V. $\lim\limits_{x\to a} [f(x)]^n = \left[\lim\limits_{x\to a} f(x)\right]^n$; para todo $n \in \mathbf{Z}^+$

VI. $\lim\limits_{x\to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim\limits_{x\to a} f(x)}$; para todo $n \in \mathbf{Z}^+$, con la restricción de que si n es par, $\lim\limits_{x\to a} f(x) > 0$

Ejemplo
Halle el siguiente límite

$$L = \lim_{x\to 0} \left(\frac{\text{sen}\,4x}{\text{sen}\,2x} + \frac{\text{arcsen}\,x}{2x}\right)$$

$$L = \lim_{x\to 0} \frac{\text{sen}\,4x}{\text{sen}\,2x} + \lim_{x\to 0} \frac{\text{arcsen}x}{2x}$$

$$L = \frac{4}{2} + \frac{1}{2}$$

$$\therefore\ L = \frac{5}{2}$$

Otro número irracional de bastante uso dentro del cálculo es la base de los logaritmos naturales (e); el cual tiene varias utilidades como, por ejemplo, para expresar la forma exponencial de los números complejos. Antes de ver su cálculo mediante límite, le sugerimos que analice la siguiente lectura.

LECTURA

LA POLÉMICA ENTRE LEIBNIZ Y NEWTON

La mayor de todas las disputas que ha conocido la ciencia fue la prioridad de la invención del cálculo. Las suspicacias entre Newton y Leibniz y sus respectivos seguidores, primero sobre quién habría descubierto antes el cálculo y, después, sobre si uno lo había copiado del otro, acabaron estallando en un conflicto de prioridad que amargó los últimos años de ambos genios. Para comenzar diremos que la disputa fue evitable pues los métodos de ambos genios tienen importantes diferencias conceptuales que indican claramente la génesis independiente de los mismos. Newton consideraba las curvas generadas por el movimiento continuo de un punto basándose su cálculo diferencial en la medida de la variación de la misma -de su fluir-, mientras que Leibniz consideraba una curva como formada por segmentos de longitud infinitesimal cuya prolongación generaba la tangente en cada punto y de cuya geometría se obtiene la correspondiente relación entre las diferenciales. Incluso la fundamentación de ambos métodos es totalmente distinta.



Gottfried Wilhelm Von Leibniz
(Alemania 1646-1716)

Si el de Newton fue resuelto totalmente mediante el concepto de límite, el de Leibniz tuvo que esperar hasta la década 1960-70, hasta la aparición del Análisis no estándar de Abrahan Robinson. La polémica en cuestión se fraguó a finales del siglo XVII: por un lado Leibniz no había hecho ninguna alusión al cálculo infinitesimal de Newton -que el mismo Newton le había indicado que existían en sus *Epistolae*- además que en Holanda -como le aseguró Wallis- se atribuía el cálculo a Leibniz, eso sin contar que los discípulos de Leibniz habían publicado el primer libro sobre el cálculo: el *Analyse des infiniment petits* que redactó el Marquéz de L'Hospital a partir de las clases particulares que le dio Juan Bemoulli y de cuya primera edición podemos admirar una foto -nótese que no aparece el nombre de su autor por ningún sitio- uno de los problemas que se resolvió gracias a la nueva herramienta descubierta por Newton y Leibniz: el problema de la braquistocrona.

El problema consistía en determinar la curva por la que un cuerpo desciende en el menor tiempo posible entre dos puntos que no estén en posición vertical u horizontal. Este problema ya interesó en su día a Galileo aunque éste fue incapaz de resolverlo -lo cual no es raro pues para resolverlo se precisaba del cálculo-. La historia es como sigue.

En junio de 1696 de las Actas *Eroditorum*, Juan Bemoulli lanzó un reto a los mejores matemáticos del mundo. En realidad era un reto encubierto a Newton. Al cabo del año - el plazo original fue de seis meses pero a petición de Liebniz se amplió para que tuvieran tiempo los matemáticos franceses e italianos que se habían enterado tarde- aparecieron cinco soluciones: una de Leibniz, una del mismo Juan Bernoulli, otra de su hermano Jacobo, una del conde Walter de Tschirnhaus, del Marquéz de L'Hospital y una anónima. Todas, excepto la de L'Hospital daban con la solución: la cicloide. ¿Quién era ese autor anónimo que escogió las *Philosophical Transactions* para publicar su genial solución que sólo contenía 67 palabras? Un vistazo a la solución fue suficiente para que Juan Bernulli exclamara «*tanquam ex ungue leonen*», algo así como «¡reconozco al león por sus garras!» pues claro está que era Newton. Años más tarde se aclaró toda la historia. Como ya dijimos el reto estaba dirigido a los matemáticos ingleses y a Newton en particular justo en el momento en que comenzaba la polémica sobre la prioridad para ver si el cálculo de Newton era tan bueno y poderoso para resolverlo. Además, en una carta de Leibniz a Juan Bernulli éste conjetura que sólo quien conozca el cálculo podrá resolverlo -Newton entre ellos claro está-. Incluso años después, ya en plena polémica, Leibniz en una reseña a la solución del problema afirmaba que el problema no podía ser resuelto sin la ayuda de su recién inventado método que sólo aquellos que habían profundizado lo suficiente en su estudio podían resolverlo: estos eran los Bernoulli, L'Hospital y Newton.



Isaac Newton
(Inglaterra 1642 - 1727)

Como no podía ser de otra forma el reto llegó a Newton aunque por aquel entonces ya no «*hacia ciencia*» sino que trabajaba en la Casa de la Moneda inglesa. Según cuenta la sobrina de Newton, este recibió el problema a las 4 de la tarde cuando regresó cansado de la Casa de la Moneda y tenía lista su solución 12 horas después -aunque lo que probablemente no sabía la sobrina era que Newton ya había pensado en ese problema unos años antes, y que casi seguro lo había resuelto por lo que sólo tuvo que refrescar la memoria ese día-. Nuevamente aparece la misma pregunta: Si Newton ya había resuelto el problema ¿por qué no lo publicó? Como respuesta foral a esta pregunta tomaremos la que dio Augusto de Morgan «*Cada descubrimiento de Newton tenía dos aspectos. Newton tuvo que hacerlo y, luego, los demás teníamos que descubrir que él lo había hecho*».

El número e

- Sean las funciones f y g cuyas reglas de correspondencias se dan a continuación

$$f(x)=(1+x)^{\frac{1}{x}}\ ;\quad g(x)=\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}$$

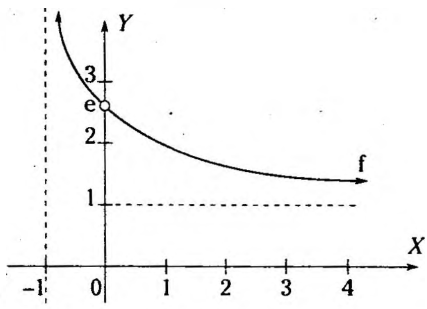
Para que f y g estén definidas en el campo real, sus respectivas bases deben ser positivas y diferentes de la unidad, es decir:

$$1+x>0\ \wedge\ x\neq 0\ ;\quad 1+\frac{1}{x}>0\ ;\quad x\neq 0$$

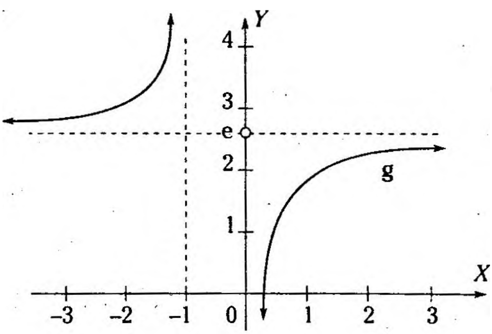
Por lo tanto, los dominios de f y g se dan a continuación

$\text{Domf}=\langle -1;0\rangle\cup\langle 0;+\infty\rangle;\text{Domg}=\langle -\infty;-1\rangle\cup\langle 0;+\infty\rangle$

Los gráficos de f y g se dan en la figura 10.15 (a) y figura 10.15 (b) respectivamente:



(a)



(b)

Figura 10.15

- El número e por definición es un límite de f cuando x tiende hacia cero (por la derecha o izquierda); o también puede ser igual al límite de g cuando x tiende hacia $+\infty$ ó $-\infty$, es decir

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e \qquad \lim_{\substack{x\to+\infty\\ \text{ó }-\infty}}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e$$

Además, el número e **es un número irracional**, cuya aproximación decimal es: $e\approx 2{,}7182$

Ejemplo 1

Halle el valor del siguiente límite $\lim_{x\to 0}(1+\operatorname{sen}x)^{\frac{1}{x}}$

Resolución

$$\lim_{x\to 0}(1+\operatorname{sen}x)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}(1+\operatorname{sen}x)^{\frac{1}{\operatorname{sen}x}\times\frac{\operatorname{sen}x}{x}}$$

Como x tiende a cero, $\operatorname{sen}x$ también tiende a cero, entonces

$$\lim_{x\to 0}(1+\operatorname{sen}x)^{\frac{1}{x}}=\lim_{\operatorname{sen}x\to 0}(1+\operatorname{sen}x)^{\frac{1}{\operatorname{sen}x}\cdot\frac{\operatorname{sen}x}{x}}$$

$$\lim_{x\to 0}(1+\operatorname{sen}x)^{\frac{1}{x}}=\left[\lim_{\operatorname{sen}x\to 0}(1+\operatorname{sen}x)^{\frac{1}{\operatorname{sen}x}}\right]^{\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}x}{x}}$$

$$\lim_{x\to 0}(1+\operatorname{sen}x)^{\frac{1}{x}}=[e]^{1}=e$$

Ejemplo 2

Calcule $L=\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{x}$

Resolución

$$L=\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{\frac{x}{2}\times 2}$$

$$L=\left[\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{\frac{x}{2}}\right]^{2}$$

$$L=[e]^{2}$$

$$\therefore\ L=e^{2}$$

Problemas Resueltos

Problema 1

Demuestre que la longitud de una circunferencia de radio R es igual a $2\pi R$ y el área del círculo es πR^2.

Resolución

Se demostrará

A. Longitud de la circunferencia

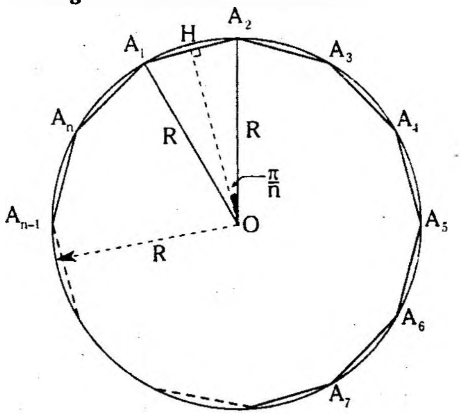


Figura 10.16

En una circunferencia de radio R inscribimos un polígono regular de n lados, se puede calcular el perímetro de dicho polígono, considerando el gráfico mostrado

Sea P el perímetro del polígono regular de n lados.

$$P = n(\overline{A_1A_2})\ldots (1)$$

En el triángulo A_1OA_2 (isósceles) trazamos la altura OH.

luego $\measuredangle A_1OH = \measuredangle HOA_2 = \dfrac{\pi}{n}$

Se tiene $\overline{A_1A_2} = 2R\,\text{sen}\dfrac{\pi}{n}$

Luego reemplazando en (1)

$$P = 2Rn\,\text{sen}\frac{\pi}{n}$$

Se observa que si n se incrementa, el perímetro del polígono se acerca a la longitud de la circunferencia; por tanto

$$\underline{\text{Longitud de Circunferencia}} = \lim_{n\to\infty} 2Rn\,\text{sen}\frac{\pi}{n}$$

$$L = \lim_{n\to\infty}\frac{2R\,n\left(\frac{\pi}{n}\right)\text{sen}\frac{\pi}{n}}{\left(\frac{\pi}{n}\right)}$$

$$L = \lim_{n\to\infty} 2R\pi\frac{\text{sen}\frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}} = 2R\pi\lim_{n\to\infty}\frac{\text{sen}\frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}}$$

Si $n\to\infty \Rightarrow \dfrac{\pi}{n}\to 0$

luego, $\displaystyle\lim_{\frac{\pi}{n}\to 0}\frac{\text{sen}\frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}} = 1$

$\therefore\quad L = 2R\pi$

B. Área del Círculo

Sea A el área de la región poligonal regular de n lados y S el área de la región triangular A_1OA_2

$\Rightarrow A = nS.\quad ..(I),$

donde $S = \dfrac{R\times R}{2}\text{sen}\dfrac{2\pi}{n}$

Reemplazando en (I)

$$A = \frac{nR^2}{2}\text{sen}\frac{2\pi}{n}$$

Se observa que si n se incrementa, el área del polígono se acerca al área del círculo de radio R.

$$\underbrace{\text{área del círculo}}_{S} = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{nR^2}{2}\text{sen}\frac{2\pi}{n}\right]$$

Ordenando para aplicar el límite

$$S = \lim_{n\to\infty}\left[\pi R^2\frac{\text{sen}\frac{2\pi}{n}}{\frac{2\pi}{n}}\right]$$

luego

$$S=\pi R^2 \lim_{n\to\infty} \frac{\operatorname{sen}\frac{2\pi}{n}}{\frac{2\pi}{n}} \quad ...(1)$$

Si $n \Rightarrow \infty \Rightarrow \frac{2\pi}{n} \Rightarrow 0$

luego, $\lim\limits_{\frac{2\pi}{n}\to 0} \frac{\operatorname{sen}\frac{2\pi}{n}}{\frac{2\pi}{n}}=1$

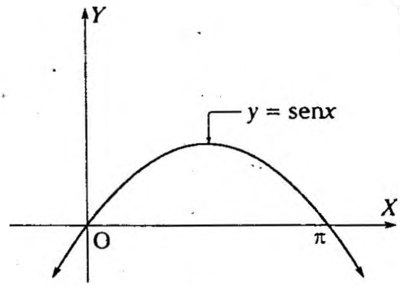
en (1) $S=\pi R^2\times(1)$

$\therefore \quad S=\pi R^2$

Problema 2

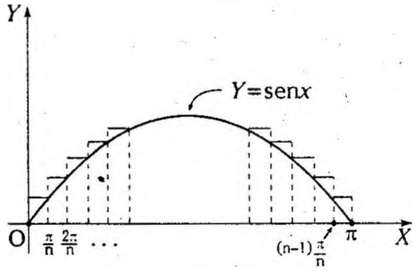
¿Cuál es el área de la región limitada por la gráfica de la función $y=\operatorname{sen}x$ y el eje X situado entre 0 y π?

Resolución



(a)

- Representamos por S el valor del área de la región indicada.
- Ahora, imaginamos que el intervalo $[0; \pi]$ es dividido en n partes iguales, de tal manera que se van a formar rectángulos verticales externamente (de base $\frac{\pi}{n}$ y altura igual a la ordenada según $y=\operatorname{sen}x$) a la región cuya área buscamos hallar; de la siguiente manera:



(b)

De la figura, el área de la región buscada S es menor que la suma de las áreas de los rectángulos (S_1), esto implica que el cálculo será por aproximación, así

$$S_1=\frac{\pi}{n}\operatorname{sen}\frac{\pi}{n}+\frac{\pi}{n}\operatorname{sen}\frac{2\pi}{n}+\frac{\pi}{n}\operatorname{sen}\frac{3\pi}{n}+...+\frac{\pi}{n}\operatorname{sen}\frac{n\pi}{n}$$

$$S_1=\frac{\pi}{n}\left[\operatorname{sen}\frac{\pi}{n}+\operatorname{sen}\frac{2\pi}{n}+\operatorname{sen}\frac{3\pi}{n}+...\operatorname{sen}(n-1)\frac{\pi}{n}\right]$$

Para simplificar la sumatoria de senos aplicamos la fórmula de serie trigonométricas dado en el tema de identidades de transformación

$$S_1=\frac{\pi}{n}\left[\frac{\operatorname{sen}(n-1)\frac{\pi}{2n}}{\operatorname{sen}\frac{\pi}{2n}}\times\operatorname{sen}\left(\frac{\frac{\pi}{n}+(n-1)\frac{\pi}{n}}{2}\right)\right]$$

$$S_1=\frac{\pi}{n}\left[\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2n}\right)}{\operatorname{sen}\frac{\pi}{2n}}\times\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\right]$$

$$S_1=\frac{\pi}{n}\cot\frac{\pi}{2n} \quad ...(1)$$

Si consideramos que la longitud de la base $\frac{\pi}{n}$ de cada rectángulo sea muy pequeña y de esa manera el área en exceso también sea ínfima, asumimos que n sea muy grande, es decir

$$S=\lim_{n\to+\infty} S_1 \quad ...(2)$$

sustituyendo (1) en (2)

$$S=\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{n}\cot\frac{\pi}{2n} \qquad S=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{\pi}{n}}{\tan\frac{\pi}{2n}}$$

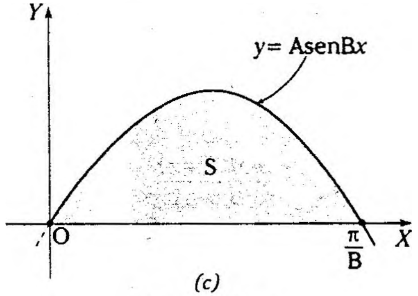
Para aplicar el límite notable, efectuamos

$$S = 2.\lim_{\frac{\pi}{2n}\to 0} \frac{\frac{\pi}{2n}}{\tan\frac{\pi}{2n}}$$

$$S=2(1) \Rightarrow S=2\mu^2$$

En general el área entre la gráfica de la función y=AsenBx y el eje X situado entre 0 y $\frac{\pi}{B}$.

(Ver figura)



(c)

Figura 10.17

Es hallado por

$$S = \frac{2A}{B}$$

Ejemplo

El área debajo de la curva $y=3\text{sen}\frac{x}{2}$, con el eje X, entre 0 y 2π es $S=2\left(\frac{3}{1/2}\right)=12\,u^2$

Problema 3

Calcule el valor de los siguientes límites

a. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \text{sen}\, x$

b. $\lim\limits_{x\to 2}\left[\sec\frac{\pi x}{2} - 2x\right]$

c. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\text{arcsen}\left(x-\frac{1}{2}\right)}{\text{arctan}\, x}$

Resolución

Evaluando en el valor de x dado

a. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \text{sen}\, x = \text{sen}\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

b. $\lim\limits_{x\to 2}\left[\sec\frac{\pi x}{2} - 2x\right] = \sec\left(\frac{\pi}{2}\times 2\right) - 2(2) = -5$

c. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\text{arcsen}\left(x-\frac{1}{2}\right)}{\text{arctan}\, x} = \frac{\text{arcsen}\left(1-\frac{1}{2}\right)}{\text{arctan}\,1}$

$$= \frac{\text{arcsen}\left(\frac{1}{2}\right)}{\text{arctan}\,1} = \frac{\frac{\pi}{6}}{\frac{\pi}{4}} = \frac{2}{3}$$

Nota

En cada uno de estos casos, al calcular el límite respectivo hemos evaluado directamente, pues las funciones están definidas y son continuas en dichos puntos. En lo que sigue, daremos problemas donde la evaluación no es directa.

Problema 4

Calcule

$$\lim_{x\to 0}\frac{\text{sen}\,7x - \text{sen}\,3x}{x\cos 3x}$$

Resolución

Evaluando $x=0$ se obtiene $\frac{0}{0}$ (indeterminado) por tanto

$$\lim_{x\to 0}\frac{\text{sen}\,7x - \text{sen}\,3x}{x\cos 3x} = \lim_{x\to 0}\frac{2\cos 5x\,\text{sen}\,2x}{x\cos 3x}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\text{sen}\,7x - \text{sen}\,3x}{x\cos 3x} = 2\lim_{x\to 0}\frac{\text{sen}\,2x}{x}\lim_{x\to 0}\frac{\cos 5x}{\cos 3x}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\text{sen}\,7x - \text{sen}\,3x}{x\cos 3x} = 2\times(2)\times\left(\frac{1}{1}\right)$$

$$\therefore \lim_{x\to 0}\frac{\text{sen}\,7x - \text{sen}\,3x}{x\cos 3x} = 4$$

Problema 5

Evalúe el siguiente límite

$$E=\lim_{x\to 0}\left(\frac{3\operatorname{sen}\pi x-\operatorname{sen}3\pi x}{x^4}\right)\tan x$$

Resolución

De las fórmulas del arco triple

$$3\operatorname{sen}\theta-\operatorname{sen}3\theta=4\operatorname{sen}^3\theta$$

entonces

$$3\operatorname{sen}\pi x-\operatorname{sen}3\pi x=4\operatorname{sen}^3\pi x$$

Reemplazando con E

$$E=\lim_{x\to 0}\left(\frac{4\operatorname{sen}^3\pi x}{x^4}\right)\tan x$$

$$E=\lim_{x\to 0}4\left(\frac{\operatorname{sen}\pi x}{x}\right)^3\frac{\tan x}{x}$$

$$E=4\left(\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}\pi x}{x}\right)^3\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}$$

$$E=4(\pi)^3\times 1$$

$$E=4\pi^3$$

Problema 6

Calcule $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\operatorname{sen}x}{\operatorname{sen}^3x}$

Resolución

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\operatorname{sen}x}{\operatorname{sen}^3x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\operatorname{sen}x}{\cos x}-\operatorname{sen}x}{\operatorname{sen}^3x}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\operatorname{sen}x}{\operatorname{sen}^3x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cancel{\operatorname{sen}x}\left(\frac{1}{\cos x}-1\right)}{\cancel{\operatorname{sen}x}\operatorname{sen}^2x}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\operatorname{sen}x}{\operatorname{sen}^3x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1-\cos x}{\cos x}}{\operatorname{sen}^2x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{2\operatorname{sen}^2\frac{x}{2}}{\cos x}}{\operatorname{sen}^2x}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\operatorname{sen}x}{\operatorname{sen}^3x}=\lim_{x\to 0}2\times\left(\frac{\operatorname{sen}\frac{x}{2}}{\operatorname{sen}x}\right)^2\times\frac{1}{\cos x}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\operatorname{sen}x}{\operatorname{sen}^3x}=2\left(\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}\frac{x}{2}}{\operatorname{sen}x}\right)^2\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\operatorname{sen}x}{\operatorname{sen}^3x}=2\left(\frac{1}{2}\right)^2\times\frac{1}{1}$$

$$\therefore\ \lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\operatorname{sen}x}{\operatorname{sen}^3x}=\frac{1}{2}$$

Problema 7

Calcule $R=\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{\cot x+\cot 2x}{\operatorname{sen}2x-\operatorname{sen}x}$

Resolución

Como

$$\frac{\cot x+\cot 2x}{\operatorname{sen}2x-\operatorname{sen}x}=\frac{\frac{\operatorname{sen}(2x+x)}{\operatorname{sen}x\operatorname{sen}2x}}{2\operatorname{sen}\frac{x}{2}\cos\frac{3x}{2}}$$

$$\frac{\cot x+\cot 2x}{\operatorname{sen}2x-\operatorname{sen}x}=\frac{\operatorname{sen}3x}{2\operatorname{sen}x\operatorname{sen}2x\operatorname{sen}\frac{x}{2}\cos\frac{3x}{2}}$$

$$\frac{\cot x+\cot 2x}{\operatorname{sen}2x-\operatorname{sen}x}=\frac{\cancel{2}\operatorname{sen}\frac{3x}{2}\cancel{\cos\frac{3x}{2}}}{\cancel{2}\operatorname{sen}x\operatorname{sen}2x\operatorname{sen}\frac{x}{2}\cancel{\cos\frac{3x}{2}}}$$

$$\frac{\cot x+\cot 2x}{\operatorname{sen}2x-\operatorname{sen}x}=\frac{\operatorname{sen}\frac{3x}{2}}{\operatorname{sen}x\operatorname{sen}2x\operatorname{sen}\frac{x}{2}}$$

Entonces, reemplazando en R, tenemos

$$R=\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{\operatorname{sen}\frac{3x}{2}}{\operatorname{sen}x\operatorname{sen}2x\operatorname{sen}\frac{x}{2}}$$

$$R=\frac{\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}}{\operatorname{sen}\frac{\pi}{3}\operatorname{sen}\frac{2\pi}{3}\operatorname{sen}\frac{\pi}{6}}$$

$$R=\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{1}{2}}\qquad\therefore\ R=\frac{8}{3}$$

Problema 8

Halle $L = \lim_{x \to n} \frac{\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} n}{x - n}$

Resolución

$$\lim_{x \to n} \frac{2\operatorname{sen}\left(\frac{x-n}{2}\right)\cos\left(\frac{x+n}{2}\right)}{x-n}$$

Como x tiende a n, tanto la diferencia $x - n$ tiende a cero, con lo cual escribimos

$$L = \lim_{x-n \to 0} \frac{\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} n}{x-n}$$

$$L = \lim_{x-n \to 0} \frac{2\operatorname{sen}\left(\frac{x-n}{2}\right)\cos\left(\frac{x+n}{2}\right)}{x-n}$$

$$L = \underbrace{\lim_{x-n \to 0} \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{x-n}{2}\right)}{\frac{x-n}{2}}}_{1} \lim_{x-n \to 0} \cos\left(\frac{x+n}{2}\right)$$

$$L = \lim_{x-n \to 0} \cos\frac{x+n}{2} = \cos(n)$$

Problema 9

Calcule el valor del siguiente límite

$$\lim_{x \to 2} \frac{\operatorname{arcsen}(x-2)}{x^2 - 2x}$$

Resolución

El límite a calcular se puede escribir como sigue

$$L = \lim_{(x-2) \to 0} \frac{\operatorname{arcsen}(x-2)}{x^2-2x} = \lim_{(x-2) \to 0} \frac{\operatorname{arc\,sen}(x-2)}{x(x-2)}$$

$$L = \underbrace{\left[\lim_{(x-2) \to 0} \frac{\operatorname{arcsen}(x-2)}{x-2}\right]}_{1} \times \underbrace{\left[\lim_{(x-2) \to 0} \frac{1}{x}\right]}_{\frac{1}{2}}$$

$$\therefore L = \frac{1}{2}$$

Problema 10

Calcule $P \lim_{x \to 0} \frac{18x^2}{1 - \sqrt{\cos \pi x}}$

Resolución

$$P = \lim_{x \to 0} \frac{18x^2}{1 - \sqrt{\cos \pi x}} \times \frac{(1 + \sqrt{\cos \pi x})}{(1 + \sqrt{\cos \pi x})}$$

$$P = \lim_{x \to 0} \frac{18x^2(1 + \sqrt{\cos \pi x})}{1 - \cos \pi x}$$

$$P = \lim_{x \to 0} \frac{18x^2(1 + \sqrt{\cos \pi x})}{2\operatorname{sen}^2 \frac{\pi x}{2}}$$

$$P = \lim_{x \to 0} \frac{9(1 + \sqrt{\cos \pi x})}{\left(\frac{\operatorname{sen}\frac{\pi x}{2}}{x}\right)^2}$$

$$P = \frac{9\lim_{x \to 0}(1 + \sqrt{\cos \pi x})}{\left(\lim_{x \to 0}\frac{\operatorname{sen}\frac{\pi x}{2}}{x}\right)^2}$$

$$P = 9 \times \frac{(1 + \sqrt{\cos 0})}{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2} = \frac{9(2)}{\frac{\pi^2}{4}} = \frac{72}{\pi^2}$$

Problema 11

Si f(x) es una función tal que

$$1 + x^2 \leq f(x) \leq \tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$

Calcule $\lim_{x \to 0} f(x)$

Resolución

Utilizamos el teorema de estricción, pues

$$\lim_{x \to 0} (1 + x^2) = 1$$

$$\lim_{x \to 0} \tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1$$

entonces $\lim_{x \to 0} f(x) = 1$

Problema 12

Halle $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sqrt{m+\cos^2 x}-\sqrt{m+\cos^2 a}}{\operatorname{sen}a-\operatorname{sen}x}$, en términos de las constantes m y a.

Resolución

$$\lim_{x\to a}\frac{\sqrt{m+\cos^2 x}-\sqrt{m+\cos^2 a}}{\operatorname{sen}a-\operatorname{sen}x}=\lim_{x\to a}\frac{\left(\sqrt{m+\cos^2 x}-\sqrt{m+\cos^2 a}\right)}{(\operatorname{sen}a-\operatorname{sen}x)}\times\frac{\left(\sqrt{m+\cos^2 x}+\sqrt{m+\cos^2 a}\right)}{\left(\sqrt{m+\cos^2 x}+\sqrt{m+\cos^2 a}\right)}$$

$$A=\lim_{x\to a}\frac{(m+\cos^2 x)-(m+\cos^2 a)}{(\operatorname{sen}a-\operatorname{sen}x)\left(\sqrt{m+\cos^2 x}+\sqrt{m+\cos^2 a}\right)}$$

$$A=\lim_{x\to a}\frac{\cos^2 x-\cos^2 a}{(\operatorname{sen}a-\operatorname{sen}x)\left(\sqrt{m+\cos^2 x}+\sqrt{m+\cos^2 a}\right)}$$

Pero $\cos^2 x-\cos^2 a=(1-\operatorname{sen}^2 x)-(1-\operatorname{sen}^2 a)=\operatorname{sen}^2 a-\operatorname{sen}^2 x=(\operatorname{sen}a+\operatorname{sen}x)(\operatorname{sen}a-\operatorname{sen}x)$

$$A=\lim_{x\to a}\frac{(\operatorname{sen}a+\operatorname{sen}x)\cancel{(\operatorname{sen}a-\operatorname{sen}x)}}{\cancel{(\operatorname{sen}a-\operatorname{sen}x)}\left(\sqrt{m+\cos^2 x}+\sqrt{m+\cos^2 a}\right)}$$

Evaluando

$$A=\frac{\operatorname{sen}a+\operatorname{sen}a}{\sqrt{m+\cos^2 a}+\sqrt{m+\cos^2 a}}$$

$$A=\frac{\operatorname{sen}a}{\sqrt{m+\cos^2 a}}$$

Problema 13

Calcule $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{(\operatorname{arc\,sen}3x)\times\sqrt{\tan x}}{x\sqrt{\csc x-\cot x}}$

Resolución

Nótese que, en el límite a calcular, no tiene sentido si $x\to 0^-$, ya que $\tan x$ sería negativo y $\sqrt{\tan x}$ no estaría definido en los reales.

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{(\operatorname{arcsen}3x)\sqrt{\tan x}}{x\sqrt{\csc x-\cot x}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{(\operatorname{arcsen}3x)\sqrt{\tan x}}{x\sqrt{\csc x-\cot x}}\times\frac{\left(\sqrt{\csc x+\cot x}\right)}{\left(\sqrt{\csc x+\cot x}\right)}=\lim_{x\to 0^+}\frac{(\operatorname{arcsen}3x)\sqrt{\tan x}\sqrt{\csc x+\cot x}}{x\sqrt{\csc^2 x-\cot^2 x}}$$

Pero $\csc^2 x-\cot^2 x=1$ (por identidades fundamentales)

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{(\operatorname{arcsen}3x)\sqrt{\tan x}}{x\sqrt{\csc x-\cot x}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{(\operatorname{arcsen}3x)\sqrt{\tan x\csc x+\tan x\cot x}}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{(\operatorname{arcsen}3x)\sqrt{\sec x+1}}{x}$$

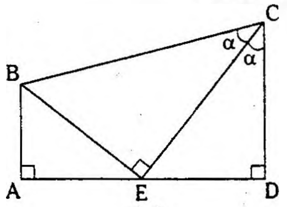
$$\lim_{x\to 0^+}\frac{(\operatorname{arcsen}3x)\sqrt{\tan x}}{x\sqrt{\csc x-\cot x}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\operatorname{arc\,sen}3x}{x}\lim_{x\to 0^+}\sqrt{\sec x+1}$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{(\operatorname{arcsen}3x)\sqrt{\tan x}}{x\sqrt{\csc x-\cot x}}=\quad 3\quad\times\quad\sqrt{\sec 0+1}$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{(\operatorname{arcsen}3x)\sqrt{\tan x}}{x\sqrt{\csc x-\cot x}}=3\sqrt{2}$$

Problema 14

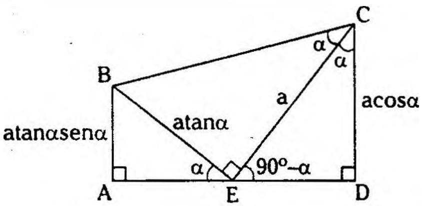
De la figura adjunta, calcule $\lim_{\alpha \to 0} \frac{CD - AB}{CE - BE}$



(a)

Resolución

En la figura, hacemos que CE=a, entonces por resolución de triángulos rectángulos, tenemos



(b)

Figura 10.18

- En el $\triangle BEC$: BE= a tan α
- En el $\triangle BAE$: AB= a tan α sen α
- En el $\triangle CDE$: CD= a cos α

Entonces

$$\lim_{\alpha \to 0} \frac{CD - AB}{CE - BE} = \lim_{\alpha \to 0} \frac{a\cos\alpha - a\tan\alpha\,\text{sen}\,\alpha}{a - a\tan\alpha}$$

$$\lim_{\alpha \to 0} \frac{CD - AB}{CE - BE} = \lim_{\alpha \to 0} \frac{\cos\alpha - \dfrac{\text{sen}^2\alpha}{\cos\alpha}}{1 - \dfrac{\text{sen}\alpha}{\cos\alpha}}$$

$$\lim_{\alpha \to 0} \frac{CD - AB}{CE - BE} = \lim_{\alpha \to 0} \frac{\dfrac{(\cos\alpha + \text{sen}\alpha)(\cos\alpha - \text{sen}\alpha)}{\cos\alpha}}{\dfrac{\cos\alpha - \text{sen}\alpha}{\cos\alpha}}$$

$$\lim_{\alpha \to 0} \frac{CD - AB}{CE - BE} = \lim_{\alpha \to 0} (\cos\alpha + \text{sen}\alpha)$$

$$\lim_{\alpha \to 0} \frac{CD - AB}{CE - BE} = \cos 0 + \text{sen}\, 0$$

$$\lim_{\alpha \to 0} \frac{CD - AB}{CE - BE} = 1$$

Problema 15

Calcule $\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos(\text{sen}\,4x)}{\text{sen}^2(\text{sen}\,3x)}$

Resolución

Sea

$$L = \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos(\text{sen}\,4x)}{\text{sen}^2(\text{sen}\,3x)} = \lim_{x \to 0} \frac{2\,\text{sen}^2\left(\dfrac{\text{sen}\,4x}{2}\right)}{\text{sen}^2(\text{sen}\,3x)}$$

$$L = \lim_{x \to 0} 2\left[\frac{\text{sen}\left(\dfrac{\text{sen}\,4x}{2}\right)}{\text{sen}(\text{sen}\,3x)}\right]^2$$

$$L = 2\lim_{x \to 0}\left[\frac{\dfrac{\text{sen}\left(\dfrac{\text{sen}\,4x}{2}\right)}{\left(\dfrac{\text{sen}\,4x}{2}\right)}}{\dfrac{\text{sen}(\text{sen}\,3x)}{(\text{sen}\,3x)}} \times \frac{\left(\dfrac{\text{sen}\,4x}{2}\right)}{(\text{sen}\,3x)}\right]^2$$

Como x tiende a cero, entonces $\frac{\text{sen}\,4x}{2}$ y sen3x también tienden a cero, por lo tanto escribimos

$$L = 2\left[\frac{\lim\limits_{\frac{\text{sen}\,4x}{2} \to 0} \dfrac{\text{sen}\left(\dfrac{\text{sen}\,4x}{2}\right)}{\dfrac{\text{sen}\,4x}{2}}}{\lim\limits_{\text{sen}\,3x \to 0} \dfrac{\text{sen}(\text{sen}\,3x)}{(\text{sen}\,3x)}} \times \frac{1}{2}\lim_{x \to 0} \frac{\text{sen}\,4x}{\text{sen}\,3x}\right]^2$$

$$L = 2\left[\frac{1}{1} \times \frac{1}{2} \times \frac{4}{3}\right]^2 = \frac{8}{9} \qquad \therefore\ L = \frac{8}{9}$$

Problema 16

Calcule $\lim_{x \to 0} \frac{|x + \text{sen}^2 x| + |\tan x - x|}{|\tan x|}$

Resolución

Primero calcularemos el límite cuando x se aproxima a cero, a través de valores positivos, es decir $\lim_{x \to 0^-} \frac{|x + \text{sen}^2 x| + |\tan x - x|}{|\tan x|}$

Como para todo $x > 0$, próximo a cero se verifica que $|x+\text{sen}^2 x| = x+\text{sen}^2 x$; $|\tan x - x| = \tan x - x$ (ver figura 10.19) y $|\tan x| = \tan x$

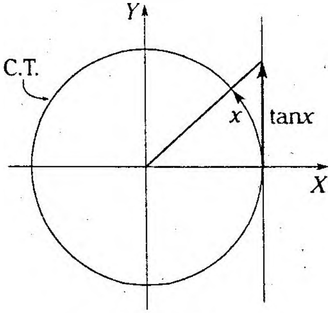


Figura 10.19

$\forall x \in \left\langle 0;\frac{\pi}{2}\right\rangle$ se cumple $\tan x > x$

Entonces

$$A = \lim_{x\to 0^+} \frac{|x+\text{sen}^2 x| + |\tan x - x|}{|\tan x|}$$

$$A = \lim_{x\to 0^+} \frac{x+\text{sen}^2 x + \tan x - x}{\tan x}$$

$$A = \lim_{x\to 0^+} \frac{\text{sen}^2 x + \tan x}{\tan x}$$

$$A = \lim_{x\to 0^+} (\text{sen}\, x \cos x + 1)$$

$$A = \text{sen}\, 0 \cos 0 + 1 = 1$$

Ahora, para x negativo próximo a cero, tenemos

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{|x+\text{sen}^2 x| + |\tan x - x|}{|\tan x|}$$

como para todo $x<0$, próximo a cero se verifica que

$$|x+\text{sen}^2 x| = -x - \text{sen}^2 x$$

$|\tan x - x| = -\tan x + x$ ... (ver figura 10.20)

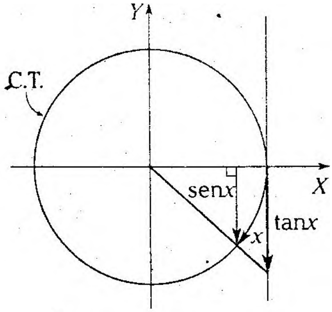


Figura 10.20

$\forall x \in \left\langle -\frac{\pi}{2};0\right\rangle$ se cumple $|x| > \text{sen}^2 x \Rightarrow -x > \text{sen}^2 x$

$\therefore\ 0 > x+\text{sen}^2 x$ y $\tan x < x \Rightarrow \tan x - x < 0$

Entonces

$$B = \lim_{x\to 0^-} \frac{|x+\text{sen}^2 x| + |\tan x - x|}{|\tan x|}$$

$$B = \lim_{x\to 0^-} \frac{-x-\text{sen}^2 x + (-\tan x + x)}{-\tan x}$$

$$B = \lim_{x\to 0^-} \frac{\text{sen}^2 x + \tan x}{\tan x}$$

$$B = \lim_{x\to 0^-} (\text{sen}\, x \cos x + 1)$$

$$B = 1$$

Como los límites laterales A y B son iguales entonces

$$\lim_{x\to 0} \frac{|x+\text{sen}^2 x| + |\tan x - x|}{|\tan x|}$$

existe y es igual a 1

Problema 17

Calcule $\lim_{x\to+\infty} x\,\text{sen}\left(\frac{2}{x}\right)$

Resolución

$$\lim_{x\to+\infty} x\,\text{sen}\left(\frac{2}{x}\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\text{sen}\left(\frac{2}{x}\right)}{\frac{2}{x}} \times 2$$

Cuando $x \to +\infty$, se tiene $\frac{2}{x} \Rightarrow 0$, entonces escribimos

$$\lim_{x\to+\infty} x\,\text{sen}\left(\frac{2}{x}\right) = \lim_{\frac{2}{x}\to 0} \frac{\text{sen}\left(\frac{2}{x}\right)}{\frac{2}{x}} \times 2$$

$$\lim_{x\to+\infty} x\,\text{sen}\left(\frac{2}{x}\right) = 2\underbrace{\lim_{\frac{2}{x}\to 0} \frac{\text{sen}\left(\frac{2}{x}\right)}{\frac{2}{x}}}$$

$$\lim_{x\to+\infty} x\,\text{sen}\left(\frac{2}{x}\right) = 2 \times 1$$

$$\therefore \lim_{x\to+\infty} x\,\text{sen}\left(\frac{2}{x}\right) = 2$$

roblema 18

Calcule $\lim_{x\to+\infty} \frac{x\arctan x - \text{sen}\,x}{x}$

Resolución

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x\arctan x - \text{sen}\,x}{x} = \lim_{x\to+\infty}\left(\arctan x - \frac{\text{sen}\,x}{x}\right)$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x\arctan x - \text{sen}\,x}{x} = \underbrace{\lim_{x\to+\infty} \arctan x}_{} - \underbrace{\lim_{x\to+\infty} \frac{\text{sen}\,x}{x}}_{}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x\arctan x - \text{sen}\,x}{x} = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}$$

La gráficos de $y=\arctan x \wedge y=\frac{\text{sen}\,x}{x}$ se observan en las figuras 10.21(a) y 10.21(b)

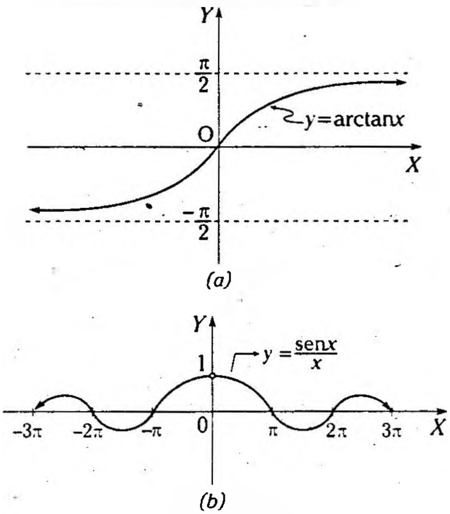


Figura 10.21

Problema 19

Calcule $\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x}}$

Resolución

Sea

$$L = \lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0}(1+\cos x - 1)^{\frac{1}{x}}$$

Como $x \to 0$, entonces $(\cos x - 1) \to 0$, entonces

$$L = \lim_{\cos x - 1\to 0}(1+\cos x - 1)^{\frac{1}{\cos x - 1}\times\frac{\cos x - 1}{x}}$$

$$L = \left(\lim_{\cos x - 1\to 0}(1+\cos x - 1)^{\frac{1}{\cos x - 1}}\right)^{\lim_{x\to 0}\frac{\cos x - 1}{x}}$$

$$L = e^{\lim_{x\to 0}\frac{-2\text{sen}^2\frac{x}{2}}{x}} = e^{-2\lim_{x\to 0}\frac{\text{sen}\frac{x}{2}}{x}\lim_{x\to 0}\text{sen}\frac{x}{2}} = e^{-2\times\frac{1}{2}\times 0}$$

$$L = e^0 = 1 \qquad \therefore\ L = 1$$

Problema 20

Calcule $\lim_{x\to 0}\left[\frac{1+2\text{sen}\,2x}{1-2\text{sen}\,2x}\right]^{\frac{1}{\text{sen}\,3x}}$

Resolución

Sea

$$L = \lim_{x\to 0}\left[\frac{1+2\text{sen}\,2x}{1-2\text{sen}\,2x}\right]^{\frac{1}{\text{sen}\,3x}}$$

$$L = \lim_{x\to 0}\left[\frac{1+2\text{sen}\,2x}{1-2\text{sen}\,2x} - 1 + 1\right]^{\frac{1}{\text{sen}\,3x}}$$

$$L = \lim_{x\to 0}\left[\frac{4\text{sen}\,2x}{1-2\text{sen}\,2x} + 1\right]^{\frac{1}{\text{sen}\,3x}}$$

Como $x \to 0$, entonces $\frac{4\text{sen}\,2x}{1-2\text{sen}\,2x} \to 0$, por lo tanto escribimos

$$L = \left[\lim_{\frac{4\text{sen}\,2x}{1-2\text{sen}\,2x}\to 0}\left(1+\frac{4\text{sen}\,2x}{1-2\text{sen}\,2x}\right)^{\frac{1-2\text{sen}\,2x}{4\text{sen}\,2x}}\right]^{\lim_{x\to 0}\frac{4\text{sen}\,2x}{(1-2\text{sen}\,2x)\text{sen}\,3x}}$$

$$L = e^{4\lim_{x\to 0}\frac{\text{sen}\,2x}{\text{sen}\,3x}\lim_{x\to 0}\frac{1}{1-2\text{sen}\,2x}} = e^{4\times\frac{2}{3}\times 1} \qquad \therefore L = e^{\frac{8}{3}}$$

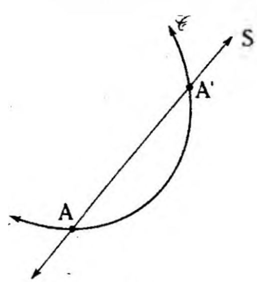
NOCIÓN INTUITIVA DE LA DERIVADA DE UNA FUNCIÓN

La Derivada se define como un límite, y se usa al principio para calcular las tasas de variación y las pendientes de las tangentes a curvas. El estudio de las derivadas se llama cálculo diferencial y una aplicación matemática de las derivadas es obtener la gráfica de funciones, obtener los valores extremos (máximos y mínimos) de las mismas y extenderlo en el análisis de diversos fenómenos físicos, químicos, etc. Por ello tiene muchas aplicaciones en los diversos campos de la ciencia, por ejemplo, en Física, para hallar la velocidad, aceleración y analizar el comportamiento de una partícula; en Economía, para estudiar el ingreso, costo y utilidad marginal, que son conceptos importantes en el análisis económico, y así podemos citar diversas aplicaciones.

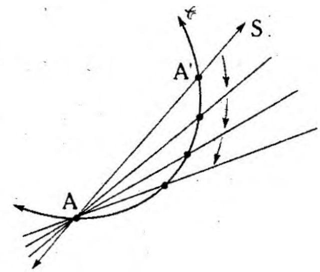
Muchos problemas de cálculo dependen de la determinación de la recta tangente a una curva dada en un punto específico de la misma, por ello iniciamos el estudio de la derivada analizando dicho problema.

La Recta Tangente y la Derivada

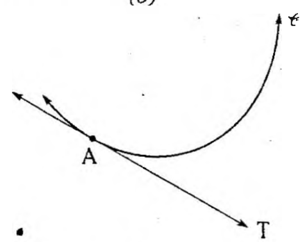
Examinemos una curva continua $\mathscr{C}$ en el plano (figura 10.22 (a)). Supongamos que A es un punto fijo de dicha curva y A' es otro punto también en $\mathscr{C}$. La recta S es denominada secante de la curva $\mathscr{C}$. Ahora, comencemos a desplazar el punto A' por $\mathscr{C}$ aproximándolo a A, en este caso la secante S girará respecto a A (figura 10.22(b)). Transformándose en la recta T(figura 10.22(c)) a la cual se le denomina recta tangente a la curva $\mathscr{C}$ en el punto A.



(a)



(b)



(c)

Figura 10.22

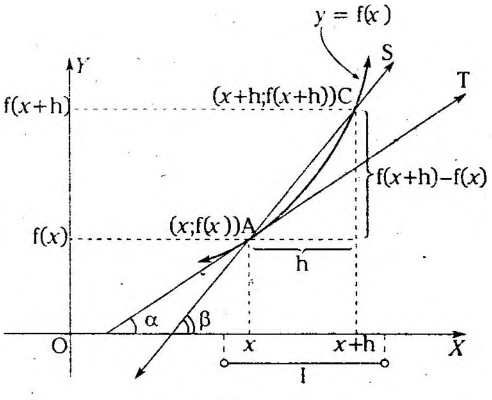
Ahora, supongamos que la curva $\mathscr{C}$ es la gráfica de una función continua $y=f(x)$ (figura 10.23(a)) y $A(x;f(x))$ un punto fijo de dicha curva, donde x pertenece al intervalo abierto I. Ahora, elijamos un número pequeño $h \neq 0$ tal que $(x+h) \in I$, entonces el punto $C(x+h;f(x+h))$ pertenece a la gráfica de f. La secante S que pasa por A y C, forma con la dirección positiva del eje de las abscisas un ángulo β cuya tangente es igual a:

$$\tan\beta = \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

Si hacemos que h tienda a cero, entonces debido a la continuidad de f en el intervalo abierto I, el punto C se desplazará por $\mathscr{C}$ y tenderá hacia la posición de A, luego se puede apreciar que

$$\tan\alpha = \lim_{h\to 0}\tan\beta$$

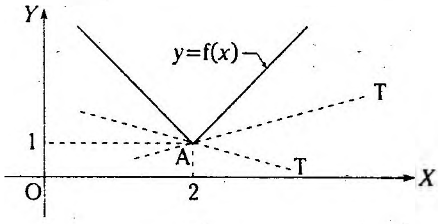
$$\tan\alpha = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$



(a)

es la pendiente de la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(x;\ f(x))$. A menudo hablaremos de la pendiente de la recta tangente a la gráfica de f es $(x;\ f(x))$ o simplemente como la pendiente de la gráfica de f en un determinado valor de x.

Ahora bien, no siempre tal límite existe, como por ejemplo en la función $f(x)=|x-2|+1$ en el punto A(2;1).



(b)

Figura 10.23

Pues geométricamente, en A existe una esquina o vértice y no es posible tener una recta tangente (T) bien definida en ese punto. (Ver figura 10.23(b))

Definición

La derivada de una función f es aquella función, denotada por f ', cuyo valor en un número cualquiera x del dominio de f está dado por $f'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ si este límite existe.

Si c es un número particular en el dominio de f, entonces $f'(c)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(c+h)-f(c)}{h}$

Si este límite existe, notamos que la pendiente de la recta tangente a la gráfica de $y=f(x)$ en el punto (c;f(c)) es precisamente la derivada de f evaluada en c.

(Véase la figura 10.24), es decir : $\underbrace{m_t}_{\text{pendiente de la recta}} = f'(c)$

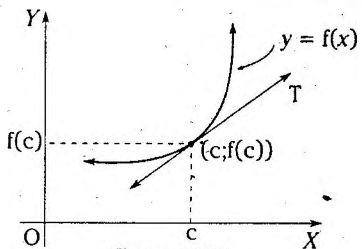


Figura 10.24

Ejemplo

Dado $f(x) = 2x^2+1$, obtenga $f'(x)$, y la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f que pasa por el punto (1;3).

Resolución

Hallando $f'(x)$

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{\left[2(x+h)^2+1\right]-\left[2x^2+1\right]}{h}$$

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\left[\frac{\cancel{2x^2}+4xh+2h^2+\cancel{1}-\cancel{2x^2}-\cancel{1}}{h}\right]$$

$$f'(x)=\left[\lim_{h\to 0}\frac{4xh+2h^2}{h}\right]$$

$f'(x) = \lim_{h\to 0}(4x+2h)$

$f'(x) = 4x+2\times 0$

$f'(x) = 4x$

Hallando la pendiente de la recta tangente

$m_T = f'(1) = 4\times 1 = 4$

Por la ecuación de una recta, tenemos

$$y - y_o = m_T\,(x - x_o)$$

donde podemos considerar que

$(x_o\,;y_o) = (1\,;3)$, entonces $y-3 = 4(x-1)$,

$\therefore y = 4x-1$

(La ilustración de este ejemplo la tenemos en la figura 10.25)

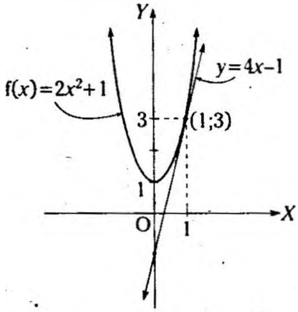


Figura 10.25

Queda para usted resolver el siguiente ejemplo en forma idéntica.

Halle la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función f definida por $f(x)=x^2+2$, en el punto P (1;b)

A lo que debe encontrar $\therefore\ y-2x-1=0$

Nota

Al proceso de determinar la derivada se le llama diferenciación (o derivación). Por tanto, esta operación consiste en deducir una función f' a partir de una función f. Si una función tiene derivada en c, se dice que dicha función es diferenciable (o derivable) en c. Es decir, la función f es diferenciable en c si f'(c) existe.

Para evitar confusiones posteriores, aclaramos que

Diferenciar es lo mismo que derivar.

Diferenciación es lo mismo que derivación.

Diferenciable es lo mismo que derivable.

Teorema

Si una función **f** es diferenciable en **c**, entonces **f** es continua en **c**

Así por ejemplo $f(x)=\text{sen}x$ es continua en $\pi/2$, puesto que

$$f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \lim_{h\to 0}\frac{f\left(\frac{\pi}{2}+h\right)-f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{h}$$

$$f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \lim_{h\to 0}\frac{\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}+h\right)-\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)}{h}$$

$$f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \lim_{h\to 0}\frac{\cosh-1}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{-2\text{sen}^2\frac{h}{2}}{h}$$

$$f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \lim_{h\to 0}\frac{-2\text{sen}\frac{h}{2}\times\text{sen}\frac{h}{2}}{h}$$

$$f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \lim_{h\to 0}\frac{\text{sen}\frac{h}{2}}{-\frac{h}{2}}\times\lim_{h\to 0}\text{sen}\frac{h}{2} = -(1)\times(0)=0$$

Como $f'(\pi/2)$ existe,

entonces $f(x)=\text{sen}x$

es diferenciable o derivable en $\pi/2$

por lo tanto, f es continua en $\pi/2$.

Nota

La función $f(x) = \text{sen}x$, es continua $\forall x\in\mathbb{R}$

Teorema

I. $f(x) = c$, entonces $f'(x) = 0$; (para todo c constante)

II. $f(x) = x^n$, entonces $f'(x) = nx^{n-1}$; $\forall n$ racional

III. $f(x) = cg(x)$, entonces $f'(x) = cg'(x)$ (para todo c constante)

IV. $h(x) = f(x)+g(x)$, entonces $h'(x) = f'(x)+g'(x)$

V. $h(x) = f(x)\,g(x)$, entonces $h'(x) = f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$

VI. $h(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$, entonces $h'(x) = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$; si $g(x) \neq 0$

Aplicaciones del teorema anterior

Para I

- Si $f(x) = 2$, entonces $f'(x)=0$
- Si $f(x) = -\pi$, entonces $f'(x)=0$

Para II

- Si $f(x) = x^2$, entonces $f'(x)=2x$
- Si $f(x) = x^{-3}$, entonces $f'(x)=-3x^{-4}$
- Si $f(x) = \dfrac{1}{x} = x^{-1}$,

  entonces $f'(x) = -x^{-2}$ ó $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$
- Si $f(x) = \sqrt{x} = x^{1/2}$,

  entonces $f'(x) = \dfrac{1}{2}x^{-1/2}$ ó $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

Para III

- Si $f(x) = 2x^4$, entonces $f'(x) = 2(x^4)' = 2\times 4x^3 = 8x^3$
- Si $f(x) = -\sqrt{2}\dfrac{1}{x^2} = -\sqrt{2}x^{-2}$

  entonces

$$f'(x) = -\sqrt{2}\left(x^{-2}\right)' = -\sqrt{2}\left(-2x^{-3}\right) = 2\sqrt{2}x^{-3} = \frac{2\sqrt{2}}{x^3}$$

Para IV

- Si $f(x) = x^4+x^3$

  entonces $f'(x) = (x^4)'+(x^3)' = 4x^3+3x^2$
- Si $f(x) = 2x^5 + 3\sqrt{x} - \dfrac{7}{x} = 2x^5 + 3x^{1/2} - 7x^{-1}$

  entonces

$$f'(x) = \left(2x^5\right)' + \left(3x^{1/2}\right)' - \left(7x^{-1}\right)' = 10x^4 + \frac{3}{2\sqrt{x}} + \frac{7}{x^2}$$

Para V

- Si $h(x) = (x^2-2x+3)(x-1)$, entonces

$$h'(x) = (x^2-2x+3)'(x-1)+(x^2-2x+3)(x-1)'$$
$$h'(x) = (2x-2+0)(x-1)+(x^2-2x+3)(1-0)$$
$$h'(x) = 2(x-1)(x-1)+(x^2-2x+3)(1)$$
$$h'(x) = 2(x-1)^2+x^2-2x+3$$
$$\therefore\ h'(x) = 3x^2 - 6x + 5$$

Para VI

- Si $h(x) = \dfrac{x^2+1}{x^3-1}$, entonces

$$h'(x) = \frac{(x^2+1)'(x^3-1)-(x^2+1)(x^3-1)'}{(x^3-1)^2}$$
$$h'(x) = \frac{(2x+0)(x^3-1)-(x^2+1)(3x^2-0)}{x^6-2x^3+1}$$
$$h'(x) = \frac{2x^4-2x-3x^4-3x^2}{x^6-2x^3+1}$$
$$\therefore\ h'(x) = \frac{-x^4-3x^2-2x}{x^6-2x^3+1}$$

Observación

La derivada de $y=f(x)$ la hemos denotado como $f'(x)$ que viene a ser la derivada de f con respecto a x. Sin embargo, existen otras notaciones para $f'(x)$.

Las siguientes notaciones: $\dfrac{dy}{dx}$; $D_x f(x)$ significan lo mismo que $f'(x)$.

Así por ejemplo si $f(x)=2x^3+3$, entonces $f'(x)=6x^2$ ó $\dfrac{dy}{dx} = 6x^2$ ó $D_x f(x) = 6x^2$

DERIVADAS DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

En los siguientes teoremas, se han considerado que los ángulos están medidos en radianes.

Teorema

La derivada de la función seno es el coseno.
Es decir $(\operatorname{sen} x)' = \cos x$

Demostración

Sea $f(x) = \operatorname{sen} x$, entonces se buscará demostrar que $f'(x) = \cos x$, por definición tenemos que:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\operatorname{sen}(x+h) - \operatorname{sen} x}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{2\operatorname{sen}\left(\frac{h}{2}\right)\cos\left(x + \frac{h}{2}\right)}{h};$$

(Por transformaciones trigonométricas)

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{h}{2}\right)}{\frac{h}{2}} \lim_{h \to 0} \cos\left(x + \frac{h}{2}\right)$$

Dado que x se mantiene constante cuando h se aproxima a cero, tenemos

$f'(x) = 1 \times \cos(x + 0) = \cos x$

$\therefore f'(x) = \cos x$ (esto es lo que se buscaba demostrar)

Teorema

La derivada de la función coseno es el opuesto de la función seno, es decir: $(\cos x)' = -\operatorname{sen} x$

Demostración

Sea $f(x) = \cos x$, entonces se buscará demostrar que $f'(x) = -\operatorname{sen} x$, por definición tenemos que:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{-2\operatorname{sen}\left(x + \frac{h}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{h}{2}\right)}{h}$$

$$\Rightarrow f'(x) = -\lim_{h \to 0} \operatorname{sen}\left(x + \frac{h}{2}\right) \lim_{h \to 0} \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{h}{2}\right)}{\frac{h}{2}}$$

$$\Rightarrow f'(x) = -\operatorname{sen}(x+0) \times 1$$

$\therefore f'(x) = -\operatorname{sen} x$ (Esto es lo que se buscaba demostrar)

Nota

En lo que sigue de este capítulo, para un mejor entendimiento de la regla de la cadena y derivadas de orden superior, utilizaremos la notación introducida por Leibniz para la derivada de f que es $\frac{dy}{dx}$.

Teorema

La derivada de la función tangente es la función secante elevada al cuadrado, es decir:

$$\frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x$$

Demostración

Sea $f(x) = \tan x$, entonces se buscará demostrar que $f'(x) = \sec^2 x$; por definición tenemos que:

$$f'(x) = \frac{d}{dx}(\tan x)$$

$$f'(x) \Rightarrow \frac{d}{dx}(\tan x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\right)$$

Del teorema V, tenemos

$$\frac{d}{dx}(\tan x) = \frac{\frac{d}{dx}(\operatorname{sen} x)\cos x - \operatorname{sen} x \frac{d}{dx}(\cos x)}{\cos^2 x}$$

$$\frac{d}{dx}(\tan x) = \frac{\cos x \cos x - \operatorname{sen} x(-\operatorname{sen} x)}{\cos^2 x}$$

$$\frac{d}{dx}(\tan x) = \frac{\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\therefore \frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x$$

En forma análoga, se demuestra el siguiente teorema

Teorema

La derivada de la función cotangente es el opuesto de la función cosecante elevado al cuadrado, es decir

$$\frac{d}{dx}(\cot x) = -\csc^2 x$$

Teorema

La derivada de la función secante es el producto de las funciones secante y tangente.

$$\frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \tan x$$

Demostración

$$\frac{d}{dx}(\sec x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\cos x}\right) = \frac{\frac{d(1)}{dx}\cos x - 1\frac{d}{dx}(\cos x)}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{0\times\cos x - 1\times(-\operatorname{sen} x)}{\cos^2 x} = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x\cos x}$$

$$= \frac{1}{\cos x}\times\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = \sec x \tan x$$

En forma análoga, se demuestra el siguiente teorema

Teorema

La derivada de la función cosecante es el opuesto del producto de las funciones cosecante y cotangente, es decir:

$$\frac{d}{dx}(\csc x) = -\csc x \cot x$$

A continuación se plantean y resuelven algunos ejemplo ilustrativos.

Ejemplo 1

Halle $f'\left(\frac{\pi}{6}\right)$, para $f(x)=x\operatorname{sen}x$

Resolución

Primero hallaremos $f'(x)$, aplicando teoremas de diferenciación

$$f'(x) = (x)'\operatorname{sen} x + x(\operatorname{sen} x)' = \operatorname{sen} x + x\cos x$$

Veamos ahora qué valor toma f' en $\frac{\pi}{6}$ es

$$f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = \operatorname{sen}\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} + \frac{\pi\sqrt{3}}{12}$$

$$\therefore f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{6+\pi\sqrt{3}}{12}$$

Ejemplo 2

Halle $\frac{d}{dx}\left(\frac{\sec x}{\cot x}\right)$

Resolución

Por el teorema VI, dado en los teoremas de diferenciación tenemos

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\sec x}{\cot x}\right) = \frac{\frac{d}{dx}(\sec x)\cot x - \sec x\frac{d}{dx}(\cot x)}{\cot^2 x}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\sec x}{\cot x}\right) = \frac{\sec x\tan x\cot x - \sec x(-\csc^2 x)}{\cot^2 x}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\sec x}{\cot x}\right) = \frac{\sec x + \sec x\csc^2 x}{\cot^2 x}$$

$$\therefore \frac{d}{dx}\left(\frac{\sec x}{\cot x}\right) = \frac{\sec x}{\cot^2 x}(1+\csc^2 x)$$

Ejemplo 3

Halle una ecuación para la recta tangente a la curva $y=\cos x$ en el punto $x = \frac{2\pi}{3}$

Resolución

Dado que $\cos\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}$, el punto de tangencia es $\left(\frac{2\pi}{3}; -\frac{1}{2}\right)$.

Para hallar la pendiente de la recta tangente, hallamos la derivada $\frac{dy}{dx}=-\operatorname{sen}x$

Y la evaluamos en $x=\frac{2\pi}{3}$, obteniendo

$$m=-\operatorname{sen}\frac{2\pi}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

que es la pendiente de la recta tangente, cuya ecuación puede escribirse como

$$y-\left(-\frac{1}{2}\right)=m\left(x-\frac{2\pi}{3}\right)\Rightarrow y-\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}\left(x-\frac{2\pi}{3}\right)$$

$$\therefore 6y+3\sqrt{3}x-2\sqrt{3}\pi+3=0 \left(\begin{array}{l}\text{esta es la ecuación}\\ \text{de la recta tangente}\end{array}\right)$$

A manera de resumen, las derivadas de las funciones trigonométricas elementales se presentan en el siguiente cuadro

$f(x)$	$f'(x)$
$\operatorname{sen}x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\operatorname{sen}x$
$\tan x$	$\sec^2 x$
$\cot x$	$-\csc^2 x$
$\sec x$	$\sec x\tan x$
$\csc x$	$-\csc x\cot x$

Observación

Si g es diferenciable en x y f es diferenciable en $g(x)$, la composición $(f\circ g)$ es diferenciable en x, y se verifica:

$$(f\circ g)'(x)=f'(g(x))\,g'(x)$$

Notación de Leibniz para la Regla de la Cadena

Cuando $y=f(t)$, donde $t=g(x)$, entonces

$$y=f(g(x))$$
$$y=(f\circ g)(x)$$

cuya derivada con respecto de x es

$$\frac{dy}{dx}=(f\circ g)'(x)=f'(g(x))\,g'(x)=f'(t)\,g'(x)$$

$$\boxed{\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}}$$

Se lee: "La derivada de y respecto de x es igual a la derivada de y respecto a t multiplicado por la derivada de t respecto a x".

La fórmula anterior puede extenderse fácilmente a más variables. Por ejemplo, si x es también una función que depende de s, tendremos que

$$\boxed{\frac{dy}{ds}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}\cdot\frac{dx}{ds}}$$

Y si además, s depende de u, entonces

$$\boxed{\frac{dy}{du}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}\cdot\frac{dx}{ds}\cdot\frac{ds}{du}}$$

Y así sucesivamente. Cada nueva dependencia añade un nuevo eslabón a la cadena.

Ejemplo

Halle $\frac{dy}{dx}$; para $y=3\operatorname{sen}t$; $t=x^2+x+2$

Resolución

$$\frac{dy}{dt}=3\cos t \quad ; \quad \frac{dt}{dx}=2x+1$$

Luego

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\,\frac{dt}{dx}=(3\cos t)(2x+1)$$

Como $t=x^2+x+2$ tenemos

$$\frac{dy}{dx}=3(\cos(x^2+x+2))(2x+1)$$

$$\frac{dy}{dx}=(6x+3)\cos(x^2+x+2)$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=(6x+3)\cos(x^2+x+2)$$

Los teoremas que a continuación plantearemos, son deducidos a partir de la regla de la cadena.

Teorema

Si f es una función diferenciable de u y u es una función diferenciable de x, tenemos que

$$\frac{d}{dx}[f(u)]=\frac{d}{du}[f(u)]\frac{du}{dx}$$

Del ejemplo anterior, tenemos $y=3\text{sen}(x^2+x+2)$, entonces

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}\left[3\text{sen}(x^2+x+2)\right]$$

$$\frac{dy}{dx}=3\frac{d}{dx}\left[\text{sen}(x^2+x+2)\right]$$

$$\Rightarrow\frac{dy}{dx}=3\cos(x^2+x+2)\times\frac{d}{dx}(x^2+x+2)$$

$$\Rightarrow\frac{dy}{dx}=3\cos(x^2+x+2)\times(2x+1)$$

$$\therefore\frac{dy}{dx}=(6x+3)\cos(x^2+x+2)$$

Regla de la Cadena y Funciones Trigonométricas

Si f es una función diferenciable de u y u es una función diferenciable de x, hemos visto en el teorema que $\frac{d}{dx}[f(u)]=\frac{d}{du}[f(u)]\frac{du}{dx}$

Utilizando este teorema, las derivadas de las seis funciones trigonométricas se expresan de la siguiente manera

$$\frac{d}{dx}(\text{sen}\,u)=\cos u\frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}(\cos u)=-\text{sen}\,u\frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}(\tan u)=\sec^2 u\frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}(\cot u)=-\csc^2 u\frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}(\sec u)=\sec u\tan u\frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}(\csc u)=-\csc u\cot u\frac{du}{dx}$$

Ejemplos

- $\frac{d}{dx}(\text{sen}\,2x)=\cos 2x\frac{d(2x)}{dx}$

  $\Rightarrow\frac{d}{dx}(\text{sen}\,2x)=\cos 2x(2)=2\cos 2x$

- $\frac{d}{dx}(\cos 7x)=-\text{sen}\,7x\frac{d}{dx}(7x)$

  $\Rightarrow\frac{d}{dx}(\cos 7x)=-\text{sen}\,7x(7)=-7\text{sen}\,7x$

- $\frac{d}{dx}(\cot\pi x)=-\csc^2\pi x\frac{d}{dx}(\pi x)$

  $\Rightarrow\frac{d}{dx}(\cot\pi x)=-\csc^2\pi x(\pi)=-\pi\csc^2\pi x$

- $\frac{d}{dx}\left[\sec(x^3+2)\right]=\sec(x^3+2)\tan(x^3+2)\frac{d}{dx}(x^3+2)$

  $\frac{d}{dx}\left[\sec(x^3+2)\right]=\sec(x^3+2)\tan(x^3+2)(3x^2)$

  $\Rightarrow\frac{d}{dx}\left[\sec(x^3+2)\right]=3x^2\sec(x^3+2)\tan(x^3+2)$

Ejemplo

Si $y=\text{sen}^2\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)$

halle $\frac{dy}{dx}$ en $x=\frac{\pi}{12}$

Resolución

Sea $u=2x-\frac{\pi}{4}$; $s=\text{sen}\,u$, entonces $y=s^2$,

para aplicar la regla de la cadena, hallamos

$$\frac{du}{dx}=2\ ;\ \frac{ds}{du}=\cos u\ ;\ \frac{dy}{ds}=2s$$

En $x=\frac{\pi}{12}$ tenemos $u=-\frac{\pi}{12}$ y

$$s=\text{sen}\left(-\frac{\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4},$$

es decir

$$\frac{du}{dx}=2\ ;\ \frac{ds}{du}=\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$$

$$\frac{dy}{ds}=2\frac{(\sqrt{2}-\sqrt{6})}{4}=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2}$$

Por lo tanto

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{ds}\cdot\frac{ds}{du}\cdot\frac{du}{dx}=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2}\times\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}\times 2=-1$$

$$\therefore\ \frac{dy}{dx}=-1$$

Otra forma

De las identidades del arco doble, tenemos

$$\operatorname{sen}^2\theta=\frac{1-\cos 2\theta}{2}$$

entonces $y=\operatorname{sen}^2\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)=\dfrac{1-\cos\left(4x-\frac{\pi}{2}\right)}{2}$

$y=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\operatorname{sen}4x$, derivando

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\operatorname{sen}4x\right)$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}\frac{d}{dx}(\operatorname{sen}4x)$$

$$\frac{dy}{dx}=0-\frac{1}{2}\cos 4x\frac{d}{dx}(4x)$$

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{2}\cos 4x(4)=-2\cos 4x$$

En $x=\frac{\pi}{12}$ tenemos

$$\frac{dy}{dx}=-2\cos\frac{\pi}{3}=-2\left(\frac{1}{2}\right)=-1\quad\therefore\ \frac{dy}{dx}=-1$$

Teorema

Si u es una función diferenciable en x, y n es un entero positivo o negativo

Entonces $\frac{d}{dx}(u^n)=nu^{n-1}\left(\frac{du}{dx}\right)$

Este teorema lo podemos aplicar con el ejemplo anterior

$$\frac{d}{dx}\left[\operatorname{sen}^2\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)\right]=2\operatorname{sen}\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)\times\frac{d}{dx}\left[\operatorname{sen}\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)\right]$$

$$\frac{d}{dx}\left[\operatorname{sen}^2\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)\right]=\underbrace{2\operatorname{sen}\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)\times\cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)}\times\underbrace{\frac{d}{dx}\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)}$$

$$\frac{d}{dx}\left[\operatorname{sen}^2\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)\right]=\qquad\operatorname{sen}\left(4x-\frac{\pi}{2}\right)\qquad\times\qquad 2$$

$\frac{d}{dx}\left[\operatorname{sen}^2\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)\right]=-2\cos 4x$; recordar que $\operatorname{sen}\left(4x-\frac{\pi}{2}\right)=-\cos 4x$ (Reducción al primer cuadrante)

Entonces, en $x=\frac{\pi}{12}$

tenemos $\therefore\ \frac{d}{dx}\left[\operatorname{sen}^2\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)\right]=-2\cos\frac{\pi}{3}=-1$

Diferenciación Implícita

A continuación, desarrollaremos ejemplos para hallar la derivada $\frac{dy}{dx}$, a partir de una ecuación de la forma: $E(x;y) = \theta$

En esta ecuación está definida implícitamente la función diferenciable $y=f(x)$. Usted debe notar que lo particular de estos ejercicios es que no es fácil despejar la variable y en función de x.

Ejemplo 1

Dada $x\cos y + y\cos x = 1$. obtenga $\frac{dy}{dx}$

Resolución

De la ecuación dada obtenemos

$x\cos y + y\cos x - 1 = 0$

Derivando implícitamente con respecto a x.

$$\frac{d}{dx}(x\cos y) + \frac{d}{dx}(y\cos x) - \frac{d(1)}{dx} = 0$$

$$\frac{d(x)}{dx}\cos y + x\frac{d}{dx}(\cos y) + \frac{dy}{dx}\cos x + y\frac{d}{dx}(\cos x) - 0 = 0$$

$$\cos y + x\left(-\operatorname{sen} y\frac{dy}{dx}\right) + \frac{dy}{dx}\cos x + y(-\operatorname{sen} x) = 0$$

$$\frac{dy}{dx}(\cos x - x\operatorname{sen} y) = y\operatorname{sen} x - \cos y$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y\operatorname{sen} x - \cos y}{\cos x - x\operatorname{sen} y}$$

Ejemplo 2

Obtenga una ecuación de la recta tangente a la curva $x^3+y^3 = 9$ en el punto (1;2)

Resolución

De la ecuación derivando implícitamente con respecto a x.

$$\frac{d}{dx}(x^3) + \frac{d}{dx}(y^3) = \frac{d(9)}{dx}$$

$$3x^2 + 3y^2\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = -\frac{x^2}{y^2}$$

En el punto (1;2), $\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{4}$ que resulta ser el valor de la pendiente de la recta tangente cuya ecuación piden obtener y escribimos a continuación $y - 2 = -\frac{1}{4}(x-1)$

$$\therefore 4y + x - 9 = 0 \left(\begin{array}{c}\text{esta es la ecuación}\\ \text{de la recta tangente}\end{array}\right)$$

Derivadas Sucesivas o de Orden Superior

Si la función f es diferenciable, podemos formar una nueva función f', que es la primera derivada de f. Si f' es a su vez diferenciable, podemos formar su derivada, llamada derivada segunda de f y designada por f''. En la medida en que sigamos teniendo la diferenciabilidad, podemos continuar de esta manera formando f'''.

Es frecuente no utilizar mediante primas más allá del orden tres. Así, para la derivada cuarta de f escribiremos $f^{(4)}$ y más generalmente para la derivada n–ésima $f^{(n)}$.

Por ejemplo, si $f(x) = 2x^5$ tenemos

$$f'(x) = 10x^4 \;;\; f''(x) = 40x^3$$

$$f'''(x) = 120x^2$$

$$f^{(4)}(x) = 240x \;;\; f^{(5)}(x) = 240$$

En la notación de Leibniz tenemos

$$\frac{dy}{dx} = 10x^4 \;;\; \frac{d^2y}{dx^2} = 40x^3$$

$$\frac{dy}{dx} = 10x^4 \;;\; \frac{d^2y}{dx^2} = 40x^3$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = 120x^2 \;;\; \frac{d^4y}{dx^4} = 240x$$

$$\frac{d^5y}{dx^5} = 240$$

Nótese que todas las derivadas de orden superior a cinco para el ejemplo anterior, son idénticamente nulas. Entonces podemos indicar que sólo en el caso de un polinomio de grado n, las derivadas de orden mayor que n son idénticamente nulas.

Ejemplo 1

Si $y=2\operatorname{sen}x-3\cos x-x^3$, halle $\frac{d^3y}{dx^3}$

Resolución

$$\frac{dy}{dx}=2\cos x+3\operatorname{sen}x-3x^2$$

$$\frac{d^2}{dx^2}=-2\operatorname{sen}x+3\cos x-6x$$

$$\therefore\ \frac{d^3}{dx^3}=-2\cos x-3\operatorname{sen}x-6$$

Ejemplo 2

Si $f(x)=\operatorname{sen}x$ halle la enésima derivada de f.

Resolución

$$f'(x)=\cos x=\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}+x\right)$$

$$f''(x)=-\operatorname{sen}x=\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{2}+x\right)$$

$$f'''(x)=-\cos x=\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)$$

$$f^{(4)}(x)=\operatorname{sen}x=\operatorname{sen}\left(\frac{4\pi}{2}+x\right)$$

$$f^{(5)}(x)=\cos x=\operatorname{sen}\left(\frac{5\pi}{2}+x\right)$$

$$\vdots$$

$$\therefore f^{(n)}(x)=\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}+x\right)\ ;\ \forall n\in\mathbb{Z}^-$$

Ejemplo 3

Si $f(x)=\cos x$, halle la enésima derivada de f

Resolución

$$f'(x)=-\operatorname{sen}x=\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)$$

$$f''(x)=-\cos x=\cos\left(2\frac{\pi}{2}+x\right)$$

$$f'''(x)=-\cos x=\cos\left(3\frac{\pi}{2}+x\right)$$

$$f^{1}(x)=\cos x=\cos\left(4\frac{\pi}{2}+x\right)$$

$$f^{5}(x)=-\operatorname{sen}x=\cos\left(5\frac{\pi}{2}+x\right)$$

$$f^{n}(x)=\cos\left(n\frac{\pi}{2}+x\right)\ ;\ \forall n\in\mathbb{Z}^+$$

Diferenciación de Funciones Trigonométricas Inversas

Comencemos hallando $\frac{dy}{dx}$ a partir de la función $y=\operatorname{arcsen}x$

Por definición $\operatorname{sen}y=x$

Diferenciando implícitamente con respecto de x.

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{sen}y)=\frac{d(x)}{dx}$$

$$\cos y\frac{dy}{dx}=1$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\cos y}\ ...(1)$$

Pero $\cos y=\pm\sqrt{1-\operatorname{sen}^2y}=\pm\sqrt{1-x^2}$,

como $-\frac{\pi}{2}\le y\le\frac{\pi}{2}$, se verifica $0\le\cos y\le 1$

Entonces $\cos y=\sqrt{1-x^2}\ ...(2)$

Reemplazando (2) en (1) obtenemos

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Utilizando $y=\operatorname{arcsen}x$ tenemos

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{arcsen}x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Para ilustrar el teorema, se tiene la figura 10.26 que muestra las gráficas de una función inyectiva f y su respectiva función inversa f^{-1} que, como ya se sabe, las gráficas de f y f^{-1} son simétricas respecto de la recta $y=x$. Las rectas tangentes L_1 y L_2 también son simétricas respecto de la misma recta. En la figura se ve que

$$(f^{-1})'(x) = \text{pendiente de } L_1 = \frac{f^{-1}(x)-a}{x-a}$$

$$f'(f^{-1}(x)) = \text{pendiente de } L_2 = \frac{x-a}{f^{-1}(x)-a}$$

Entonces

$$(f^{-1})'(x)\times f'(f^{-1}(x)) = \frac{f^{-1}(x)-a}{x-a}\times\frac{x-a}{f^{-1}(x)-a}$$

$$\therefore\ (f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

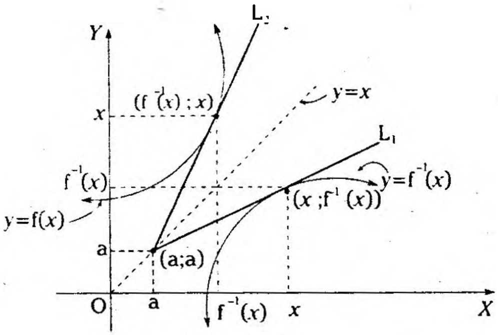


Figura 10.26

Teorema

Si f es una función inyectiva y diferenciable, donde f^{-1} es su respectiva función inversa. Entonces f^{-1} será diferenciable, siempre que f' no toma el valor de cero, verificándose $(f^{-1})'(x) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(x))}$

En la notación de Leibniz, se escribe

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$$

Por ejemplo en

$y = \text{arc sen}x$

tenemos

$x = \text{sen}y$

Diferenciando implícitamente con respecto de y

$$\frac{dx}{dy} = \frac{d(\text{sen}\,y)}{dy} = \cos y = \sqrt{1-x^2}$$

Del teorema

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Como $y = \text{arc sen}x$, tenemos

$$\frac{d(\text{arcsen}x)}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Aquí tenemos ilustrado otra forma y uso del teorema para hallar dy/dx a partir de $y=\text{arc sen}x$ Las derivadas de las seis funciones trigonométricas inversas son las siguientes (para la función arco seno ha sido demostrada de dos maneras, se sugiere al lector demostrar de manera análoga los restantes)

$\frac{d}{dx}(\text{arcsen}x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\frac{d}{dx}(\text{arccos}x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\frac{d}{dx}(\text{arctan}x) = \frac{1}{1+x^2}$
$\frac{d}{dx}(\text{arccot}x) = -\frac{1}{1+x^2}$
$\frac{d}{dx}(\text{arcsec}x) = \frac{1}{\lvert x\rvert\sqrt{x^2-1}}$
$\frac{d}{dx}(\text{arccsc}x) = -\frac{1}{\lvert x\rvert\sqrt{x^2-1}}$

Ahora utilizando el teorema, donde μ es una función diferenciable de x, las derivadas de las funciones trigonométricas inversas se expresan de la siguiente manera

$\frac{d}{dx}(\operatorname{arcsen}\mu)=\frac{1}{\sqrt{1-\mu^2}}\frac{d\mu}{dx}$
$\frac{d}{dx}(\arccos\mu)=-\frac{1}{\sqrt{1-\mu^2}}\frac{d\mu}{dx}$
$\frac{d}{dx}(\arctan\mu)=\frac{1}{1+\mu^2}\frac{d\mu}{dx}$
$\frac{d}{dx}(\operatorname{arccot}\mu)=-\frac{1}{1+\mu^2}\frac{d\mu}{dx}$
$\frac{d}{dx}(\operatorname{arcsec}\mu)=\frac{1}{\lvert\mu\rvert\sqrt{\mu^2-1}}\frac{d\mu}{dx}$
$\frac{d}{dx}(\operatorname{arccsc}\mu)=-\frac{1}{\lvert\mu\rvert\sqrt{\mu^2-1}}\frac{d\mu}{dx}$

Ejemplo 1

Halle

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{arc\,sen}x^2)$$

Resolución

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{arcsen}x^2)=\frac{1}{\sqrt{1-(x^2)^2}}\frac{d(x^2)}{dx}$$

$$\therefore\ \frac{d}{dx}(\operatorname{arcsen}x^2)=\frac{2x}{\sqrt{1-x^4}}$$

Ejemplo 2

Si

$$y=\arccos\left(\frac{x+1}{x+2}\right)$$

Calcule dy/dx para $x=1/2$

Resolución

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x+1}{x+2}\right)^2}}\frac{d}{dx}\left(\frac{x+1}{x+2}\right)=-\frac{\lvert x+2\rvert}{\sqrt{2x+3}}\frac{1}{(x+2)^2}$$

$$\Rightarrow\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{\lvert x+2\rvert\sqrt{2x+3}}$$

Entonces en $x=1/2$

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{\left\lvert\frac{5}{2}\right\rvert\sqrt{4}}=-\frac{1}{5}$$

$$\therefore\ \text{Para } x=\frac{1}{2}\ ;\ \frac{dy}{dx}=-\frac{1}{5}$$

Ejemplo 3

Halle $\frac{d^2y}{dx^2}$, si $y=\operatorname{arccot}(\operatorname{sen}x)$

Resolución

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{1+\operatorname{sen}^2x}\frac{d}{dx}(\operatorname{sen}x)=\frac{-\cos x}{1+\operatorname{sen}^2x};$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\frac{d}{dx}(-\cos x)(1+\operatorname{sen}^2x)-(-\cos x)\frac{d}{dx}(1+\operatorname{sen}^2x)}{(1+\operatorname{sen}^2x)^2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\operatorname{sen}x(1+\operatorname{sen}^2x)+\cos x(0+2\operatorname{sen}x\cos x)}{(1+\operatorname{sen}^2x)^2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\operatorname{sen}x+\operatorname{sen}^3x+2\operatorname{sen}x\ \cos^2x}{(1+\operatorname{sen}^2x)^2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\operatorname{sen}x+\operatorname{sen}^3x+2\operatorname{sen}x(1-\operatorname{sen}^2x)}{(1+\operatorname{sen}^2x)^2}$$

$$\therefore\ \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{3\operatorname{sen}x-\operatorname{sen}^3x}{(1+\operatorname{sen}^2x)^2}$$

La Diferencial

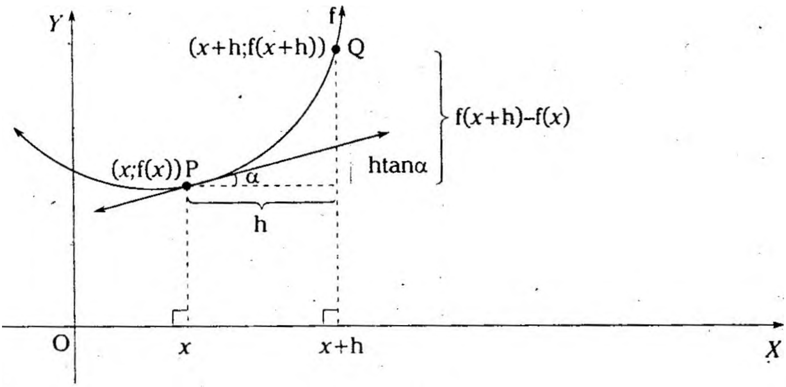


Figura 10.27

En la figura 10.27 está representada la gráfica de una función f y, debajo de ella, la gráfica de la recta tangente en el punto $(x;\ f(x))$. Como se observa en la figura, para h pequeño, se puede aproximar $f(x+h)-f(x) \approx h\tan\alpha$, pero $\tan\alpha = f'(x)$, entonces $f(x+h)-f(x) \approx hf'(x)$

Definición

La diferencia $f(x+h)-f(x)$ recibe el nombre de incremento de f desde x a $x+h$, y se denota Δf

$$\Delta f = f(x+h)-f(x)$$

El producto $f'(x)h$ se denomina diferencial en x con incremento h, y se denota df.

$$df = f'(x)h$$

Usualmente, a h se le denota por Δx, entonces $\Delta f = f(x+\Delta x)-f(x)$; $df = f'(x)\Delta x$

La figura nos dice que para h pequeño, Δf y df son aproximadamente iguales $\Delta f \approx df$

Del gráfico anterior, cuanto más cercano esté el punto Q del punto P, la diferencia entre Δy y dy será menor o tiende a cero, es decir $\Delta y - dy = 0$

Entonces $f(x+\Delta x)-f(x)-f'(x)\Delta x = 0$

Por lo tanto $\boxed{f(x+\Delta x) = f(x)+f'(x)\Delta x}$

Esta relación es la llamada propiedad de aproximación del valor de una función por diferenciales.

Ejemplo 1

Calcule el valor aproximado de $\sqrt{146}$, mediante diferenciales

Resolución

Sea $f(x)=\sqrt{x}$ entonces $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

Como $f(x+\Delta x)=f(x)+f'(x)\Delta x$

Entonces $\sqrt{x+\Delta x}=\sqrt{x}+\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\Delta x$

Haciendo $x=144$ y $\Delta x=2$ tenemos

$$\sqrt{144+2}=\sqrt{144}+\frac{1}{2\sqrt{144}}\times 2$$

$$\sqrt{146}=12+\frac{1}{12}=12+0{,}083=12{,}083$$

$\therefore$ El valor aproximado de $\sqrt{146}$ es 12,083

Ejemplo 2

Calcule el valor aproximado de sen 46°.

Resolución

Si $f(x)=\operatorname{sen}x$, entonces $f'(x)=\cos x$

Ya conocemos

$$f(x+\Delta x)=f(x)+f'(x)\Delta x$$

$$\operatorname{sen}(x+\Delta x)=\operatorname{sen}x+\cos x\,\Delta x$$

Resolviendo $x=45°=\dfrac{\pi}{4}$ $\wedge$ $\Delta x=1°=\dfrac{\pi}{180}$

Entonces

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{180}\right)=\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}+\cos\frac{\pi}{4}\times\frac{\pi}{180}$$

$$\operatorname{sen}(45°+1°)=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\pi}{180}$$

$$\operatorname{sen}(46°)=0{,}7071+0{,}7071\times 0{,}0174$$

$$\operatorname{sen}46°=0{,}7194$$

$\therefore$ El valor aproximado de sen46° es 0,7194

Teoremas sobre las Funciones Derivables

Teorema de Rolle

Sea f una función tal que

I. Sea continua en el intervalo cerrado [a;b]

II. Sea diferenciable en el intervalo abierto $\langle a;b\rangle$

III. f(a)=f(b)

Entonces, existe al menos un número c, en el intervalo abierto $\langle a;b\rangle$ tal que $f'(c)=0$

La interpretación geométrica de este teorema lo tenemos en el siguiente gráfico.

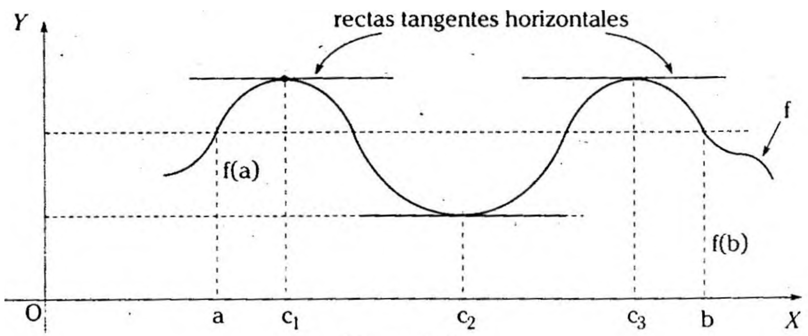


Figura 10.28

Se observa que la derivada en c_1, c_2, c_3 es cero.

Definición

Si **c** es un número del dominio de la función f y si $f'(c)=0$ o $f'(c)$ no existe, entonces c es un punto crítico de f.

Ejemplo
Halle los puntos críticos de la siguiente función
$g(x) = \operatorname{sen}^2 x$

Resolución
Como $g'(x) = 2\operatorname{sen}x(\operatorname{sen}x)' = 2\operatorname{sen}x\cos x = \operatorname{sen}2x$
Para hallar los puntos críticos de g hacemos

$g'(x) = 0$
$\operatorname{sen}2x = 0$

$$2x = k\pi \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} \;;\; k \in \mathbb{Z}$$

Por lo tanto, los puntos críticos de g son todos los $x = \frac{k\pi}{2}$ donde k es cualquier número entero.

Teorema

Teorema del valor medio (Teorema de Lagrange)
Sea f una función tal que
I. Sea continua en el intervalo cerrado $[a;b]$
II. Sea diferenciable en el intervalo abierto $\langle a;b\rangle$
Entonces, existe por lo menos un número **c** en el intervalo abierto $\langle a;b\rangle$ tal que $f'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

En la figura 10.29, tenemos la interpretación geométrica de este teorema.

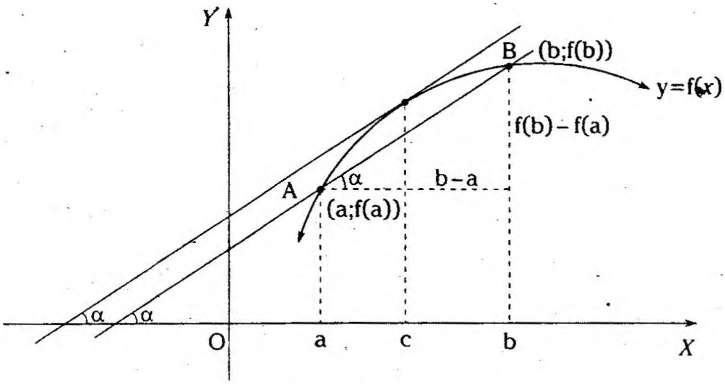


Figura 10.29

De la figura anterior $\tan\alpha = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$

De aquí se afirma que existe algún punto en la curva entre A y B donde la recta tangente es paralela a la recta secante que pasa por A y B.

Ejemplo 1
Calcule el valor **c** que satisfaga el teorema del valor medio para los valores de a y b indicados.

$$f(x)=\operatorname{sen}x \quad ; \quad a=0 \quad ; \quad b=\frac{\pi}{2}$$

Resolución
El **c** buscado debe satisfacer

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Pero

$$f'(x)=\cos x\,,\ f(b)=f\left(\frac{\pi}{2}\right)=1 \quad \text{y}$$

$$f(a)=f(0)=0$$

entonces $\cos c=\dfrac{1-0}{\dfrac{\pi}{2}-0} \Rightarrow \cos c=\dfrac{2}{\pi}$

$\therefore\ c=\arccos\left(\dfrac{2}{\pi}\right)$

ya que $c\in\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$

Usando calculadora, se tiene c=0,88

Ejemplo 2
Halle el valor de c que satisfaga el teorema de valor medio para los siguientes valores de a y b indicados a continuación

$$g(x)=\cos x;\ a=0;\ b=\frac{\pi}{2}$$

Resolución
El valor de c que se busca debe satisfacer la siguiente condición.

$$g'(x)=\frac{g(b)-g(a)}{b-a} \quad ...(1)$$

Pero como

$g(x)=\cos x$

$\Rightarrow g'(x)=-\operatorname{sen}x$

Además

$a=0\Rightarrow\ g(a)=g(0)$

$g(a)=\cos 0$

$\therefore\ g(a)=1 \quad ...(2)$

$b=\dfrac{\pi}{2}\Rightarrow g(b)=g\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$

$\Rightarrow g(b)=\cos\dfrac{\pi}{2}$

$\therefore\ g(b)=0 \quad ...(3)$

Reemplazando (2) y (3).
Así como los valores de a y b en (1), obtenemos

$$g'(c)=\frac{0-1}{\dfrac{\pi}{2}-0}$$

$$\Rightarrow -\operatorname{sen}c=\frac{-1}{\dfrac{\pi}{2}}$$

$$\Rightarrow \operatorname{sen}c=\frac{2}{\pi}$$

De donde

$$c=\arcsen\left(\frac{2}{\pi}\right)$$

porque $c\in\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$

Si pudiésemos hacer uso de una calculadora, veríamos que

$$\arcsen\left(\frac{2}{\pi}\right)=0,69$$

$\therefore$ el valor de c sería 0,69

Intente Ud, el cálculo del valor de c que satisfaga el teorema del valor medio para los siguientes casos

I. $f(x)=\operatorname{sen}x+\cos x\ ;\ a=-\dfrac{\pi}{4};\ b=0$

II. $g(x)=\cos 2x\ ;\ a=0;\ b=\dfrac{\pi}{4}$

III. $h(x)=\tan x\ ;\ a=0\ ;\ b=\dfrac{\pi}{3}$

Regla de L'Hospital

Se aplica para calcular los límites de la forma

$\frac{0}{0}$; $\frac{\infty}{\infty}$; estas se llaman indeterminadas.

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f''(x)}{g''(x)}=\ldots$$

Derivando separadamente las funciones f(x) y g(x) hasta que el límite de la fracción sea determinada.

Ejemplo 1

Calcule el siguiente límite

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\tan x}$$

Resolución

Evaluando para $x=0$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\tan x}=\frac{0}{0};\ \text{(forma indeterminada)}$$

Aplicando la regla de L'Hospital

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\tan x}=\lim_{x\to 0}\frac{(x)'}{(\tan x)'}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sec^2 x}$$

evaluando

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\tan x}=\frac{1}{\sec 0}=\frac{1}{1}$$

$$\therefore \lim_{x\to 0}\frac{x}{\tan x}=1$$

Observación

Además las formas

$0.\infty$; $\infty-\infty$: 0^0 ; ∞^0 ó 1^∞

pueden ser transformadas a las formas $\frac{0}{0}$; $\frac{\infty}{\infty}$

Ejemplo 2

Calcule $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}5x}{2x}$

Resolución

Aquí tenemos la indeterminación $\frac{0}{0}$

Aplicando la regla de L'Hospital

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}5x}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{(\operatorname{sen}5x)'}{(2x)'}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{5\cos 5x}{2}=\frac{5\cos 0}{2}=\frac{5}{2}$$

$$\therefore \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}5x}{2x}=\frac{5}{2}$$

Ejemplo 3

Calcule $\lim_{x\to 0}\frac{x-\arctan x}{x^3}$

Resolución

Forma de indeterminación $\frac{0}{0}$, por L' Hospital

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\arctan x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\frac{1}{1+x^2}}{3x^2}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\arctan x}{x^3}=\frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2(1+x^2)}=\frac{1}{3}$$

Ejemplo 4

Halle $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\operatorname{sen}x}$

Resolución

Forma de indeterminación $\frac{0}{0}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\operatorname{sen}x}=\lim_{x\to 0}\frac{(e^x-e^{-x}-2x)'}{(x-\operatorname{sen}x)'}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\operatorname{sen}x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}-2}{1-\cos x}$$

sigue presentándose la indeterminación $\frac{0}{0}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\operatorname{sen}x}=\lim_{x\to 0}\frac{(e^x+e^{-x}-2)'}{(1-\cos x)'}\quad \text{Por L'Hospital}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\operatorname{sen}x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{\operatorname{sen}x}$$

evaluando se tiene $\frac{0}{0}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\operatorname{sen}x}=\lim_{x\to 0}\frac{(e^x-e^{-x})'}{(\operatorname{sen}x)'}\quad \text{Por L'Hospital}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\operatorname{sen}x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}}{\cos x}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^0+e^{-0}}{\cos 0}=\frac{1+1}{1}=2$$

$$\therefore\ \lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\operatorname{sen}x}=2$$

Aplicaciones de la Primera y Segunda Derivada

Pendiente de la recta tangente a la gráfica de una función. Con la derivada de una función, podemos calcular la pendiente de la recta tangente a la gráfica de una función en un determinado punto.

La pendiente m de una recta $\mathscr{L}$ tangente a la gráfica de la función f en el punto $(x_0;f(x_0))$ es

$$m=f'(x_0)$$

En consecuencia, la ecuación de la recta $\mathscr{L}$ será

$$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$$

y la ecuación de la recta normal a $\mathscr{L}$ en el punto $(x_0;f(x_0))$ será $y-f(x_0)=-\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0)$

Ejemplo

Halle la ecuación de la recta tangente y normal a la gráfica de la función f cuya regla de correspondencia es $f(x)=\operatorname{sen}x$ en el punto $\left(\frac{\pi}{6};\frac{1}{2}\right)$.

Resolución

Como $f(x)=\operatorname{sen}x \Rightarrow f'(x)=\cos x$

Cálculo de la pendiente de la recta tangente

$$m=f'\left(\frac{\pi}{6}\right)=\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Para el ejercicio tenemos

$$(x_0;f(x_0))=\left(\frac{\pi}{6};\frac{1}{2}\right)$$

Como la ecuación de la recta tangente se halla por

$$y-f(x_0)=m(x-x_0)$$

$$\Rightarrow\ y-\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$$

Por lo tanto la ecuación de la recta tangente será

$$\mathscr{L}_T:\ 6\sqrt{3}x-12y+6-\sqrt{3}\pi=0$$

Hallando la ecuación de la recta normal $(\mathscr{L}_N)$ a $\mathscr{L}_T$ en el punto $\left(\frac{\pi}{6};\frac{1}{2}\right)$

$$y-f(x_0)=-\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0)$$

$$y-\frac{1}{2}=-\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\therefore\ \mathscr{L}_N:\ 12x+6\sqrt{3}y-3\sqrt{3}-2\pi=0$$

Para la ilustración de este ejemplo véase la figura 10.30.

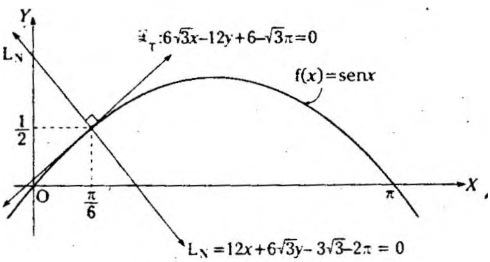
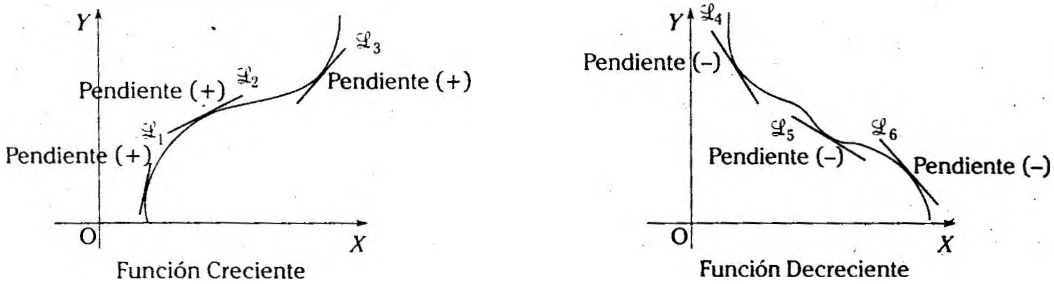


Figura 10.30

Funciones Crecientes y Decrecientes

En la figura 10.31(a) tenemos la gráfica de una función creciente y en la figura 10.31(b) tenemos la gráfica de una función decreciente.



(a) *(b)*

Figura 10.31

En la figura 10.31(a) las pendientes de las rectas $\mathcal{L}_1$; $\mathcal{L}_2$ y $\mathcal{L}_3$ son positivas, mientras que en la figura 10.31(b) las pendientes de las rectas $\mathcal{L}_4$; $\mathcal{L}_5$ y $\mathcal{L}_6$ son negativas.

Como las pendientes de la recta tangente en cada punto de una gráfica se mide por la derivada f', es razonable suponer que f sea creciente en el intervalo en que $f'>0$. De manera análoga, es razonable suponer que f sea decreciente en el intervalo donde $f'<0$.

Teorema

Así f es derivable en $\langle a;b\rangle$, entonces la función f es estrictamente creciente en $\langle a;b\rangle$, si

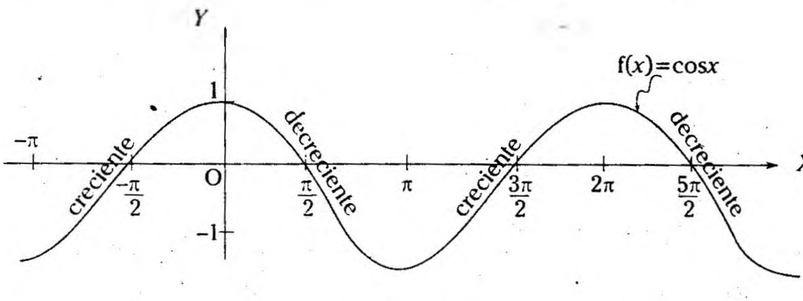
$$f'(x)>0 \quad \text{para} \quad a<x<b$$

y f es estrictamente decreciente en $\langle a;b\rangle$ si

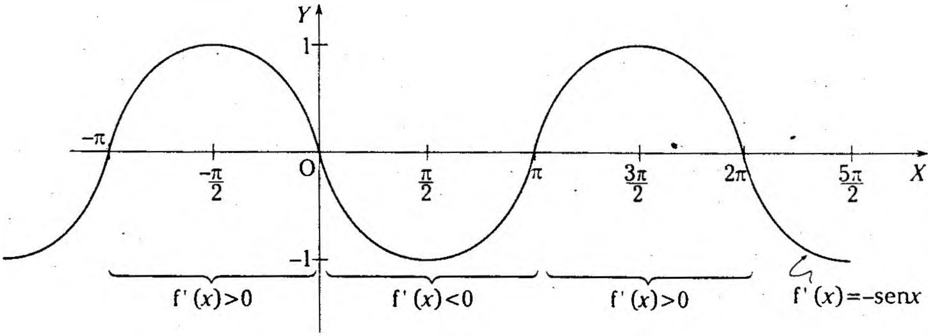
$$f'(x)<0 \quad \text{para} \quad a<x<b.$$

Ejemplo

A continuación se ha graficado $f(x) = \cos(x)$ y $f'(x) = -\text{sen}x$



(a)

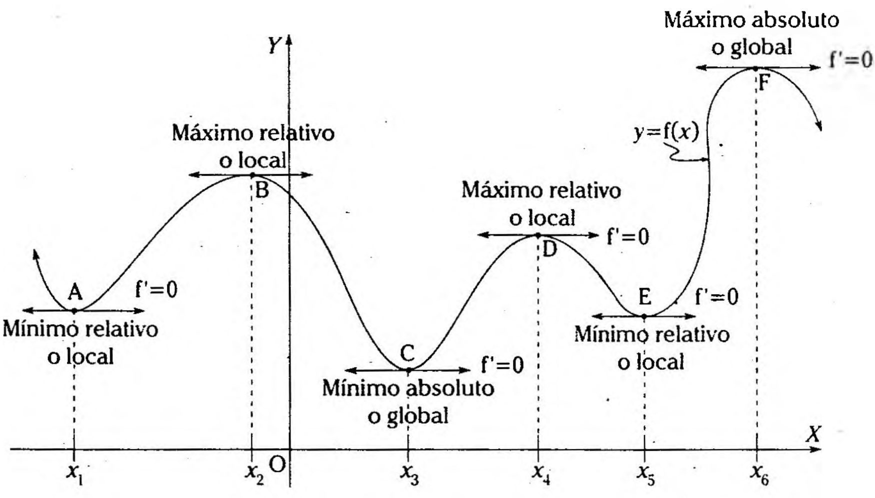


(b)

Figura 10.32

Se observa que f'(x)>0 en ⟨−π;0⟩ significa que f(x)=cosx es creciente en ⟨−π;0⟩ de la figura 10.32(a), análogamente se analiza para los otros intervalos.

Máximos y Mínimos de una Función

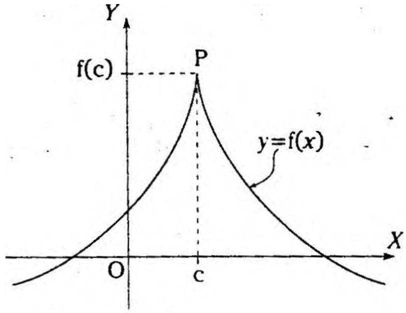


(a)

En la figura 10.33(a), las pendientes de las rectas tangentes a la gráfica de f en los puntos A, B, C, D, E y F es cero, es decir, las derivadas en dichos puntos es cero.

Obsérvese también que la función f puede tener varios máximos o mínimos relativos (o locales), pero un solo máximo o mínimo absoluto (o global). Pero, sea máximo relativo o absoluto o mínimo relativo o absoluto, las derivadas en dichos puntos son iguales a cero.

Sin embargo (aunque no es muy usual), si tenemos una función f cuya gráfica se presenta a continuación en la figura 10.33(b), se observa que, en el punto P, f' no está definida, pero en P se da un máximo global de la función f.



(b)
Figura 10.33

Con estas observaciones, se puede dar el teorema siguiente

Teorema

Si f tiene un máximo o mínimo en c, entonces o $f'(c) = 0$ o $f'(c)$ no existe.

Teorema

Teorema (criterio de la primera derivada para máximos y mínimos)
Sea c un valor crítico de la función f, continua en un intervalo abierto que contenga a c, entonces:
I. Si f' cambia de signo de (–) a (+) en c, entonces f(c) es un mínimo relativo de f.
II. Si f' cambia de (+) a (–) en c, entonces f(c) es un máximo relativo de f.
III. Si f' no cambia de signo en c, entonces f(c) no es mínimo ni máximo relativo.

Para un mejor entendimiento del teorema anterior, veamos los siguientes gráficos de funciones. Observe la figura 10.34.

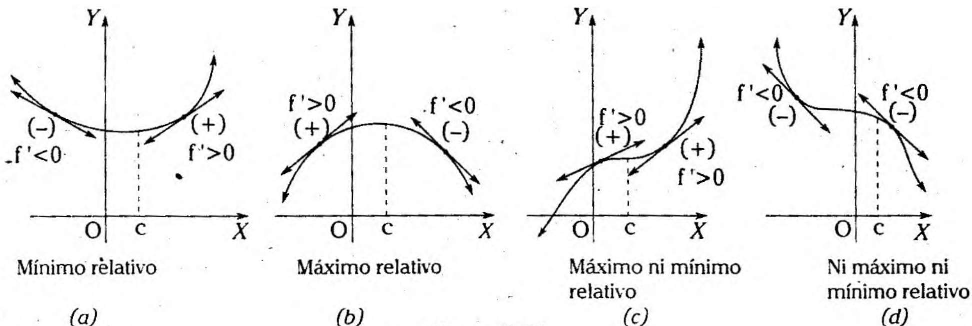
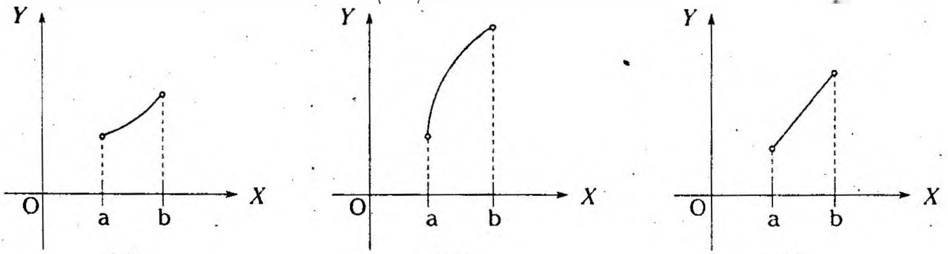


Figura 10.34

Concavidad y Puntos de Inflexión de una Función

El saber que una curva es creciente y decreciente, brinda sólo una visión parcial de ella. Por ejemplo, si la función es creciente en un intervalo $\langle a;b \rangle$, su gráfica podría ser:



(a) *(b)* *(c)*

Figura 10.35

Convexidad

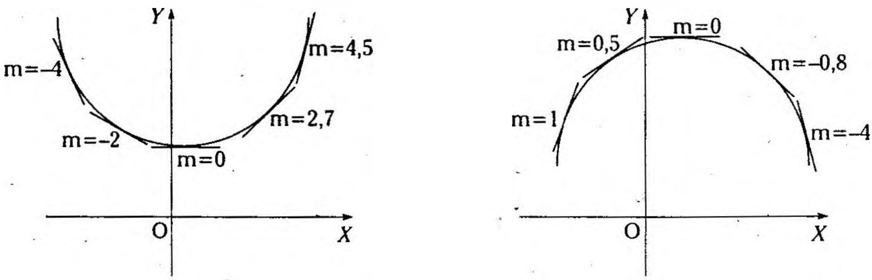
Un trozo de la gráfica en forma de taza se llama "cóncava hacia arriba", y uno en forma de taza invertida se llama "cóncava hacia abajo" (vea la gráfica 10.36)



Cóncava hacia arriba
(a)

Cóncava hacia abajo
(b)

La figura 10.36 (a) muestra una gráfica que es "cóncava hacia arriba", y la figura 10.36(b) muestra una gráfica que es "cóncava hacia abajo". Se indica por m la pendiente en varios de sus puntos. Se observa que la pendiente en la figura 10.36(c) crece (de izquierda a derecha), mientras que en la figura 10.36(d) la pendiente decrece. Entonces la pendiente de una curva crece donde la gráfica es "cóncava hacia arriba" y decrece donde la gráfica es "cóncava hacia abajo".



(c) *(d)*

Figura 10.36

Recíprocamente, una curva será "cóncava hacia arriba" en cualquier intervalo de crecimiento de la pendiente y "cóncava hacia abajo" en cualquier intervalo de decrecimiento. Como la pendiente se calcula hallando la derivada, hay que esperar que la gráfica de una función sea convexa cuando la derivada f' sea estrictamente creciente, por el teorema tenemos, entonces, que esto ocurre si $(f')' > 0$, lo que significa que la gráfica de f es convexa cuando la segunda derivada f" es positiva. De manera análoga, la gráfica es cóncava cuando la derivada segunda f" es negativa.

Teorema

La gráfica de una función f es "cóncava hacia arriba" en cualquier intervalo I donde $f''(x)>0$; y "cóncava hacia abajo" en cualquier intervalo I donde $f''(x)<0$.

Para un mayor entendimiento de este teorema, tenemos a continuación la gráfica de $f(x)=\text{sen}x$.

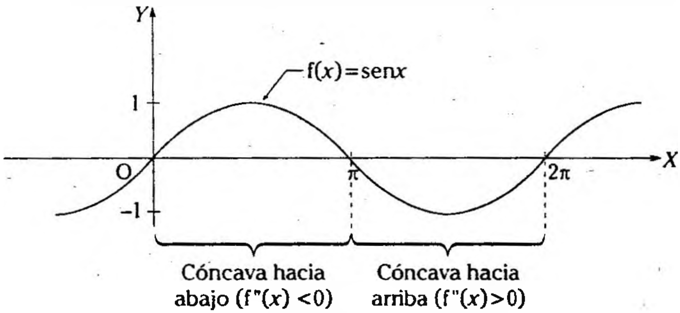


Figura 10.37

Puntos de Inflexión

En la figura 10.38 en el punto A y B la concavidad cambia de sentido.

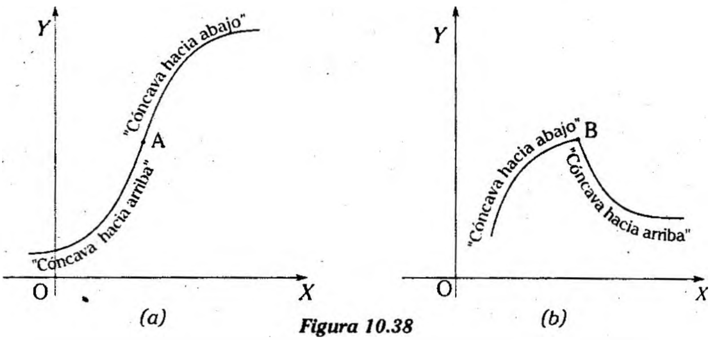


Figura 10.38

A estos tipos de puntos (A y B) se les denomina puntos de inflexión. Como los puntos de inflexión ocurren donde la concavidad cambia de sentido, debe suceder que en ellos f" cambia de signo. Así, para localizar posibles puntos de inflexión necesitamos sólo determinar los x en que $f''(x)=0$ o en lo que f" no está definida. Esto es análogo al procedimiento de localización de extremos relativos de f.

Teorema

Puntos de inflexión

Si (c;f(c)) es un punto de inflexión de la gráfica de f, entonces es

f "(c) = 0 o f "(x) no está definida para x=c.

Ejemplo

Grafique la función f cuya regla de correspondencia es $f(x)=\operatorname{sen}x-\frac{1}{2}\cos 2x$ para $x\in\langle 0;\pi\rangle$

Resolución

Para graficar esta función, se sugiere seguir los pasos siguientes:

1. Halle los puntos críticos, para ello se resuelve f '(x)=0
2. Halle los puntos de inflexión, para ello resuelva f "(x)=0
3. Halle el signo de f ' y f " en cada uno de los intervalos, así como si la función es creciente o decreciente.
4. Con toda la información represente la gráfica de f en el sistema XY.

1ro.

- Hallando los puntos críticos de f.

$$f'(x)=\cos x-\frac{1}{2}(-\operatorname{sen}2x)(2x)'=0$$

$$\cos x+\operatorname{sen}2x=0$$

$$\cos x+2\operatorname{sen}x\cos x=0$$

$$\cos x(2\operatorname{sen}x+1)=0$$

$$\Rightarrow \cos x=0 \quad \vee \quad 2\operatorname{sen}x+1=0$$

$$\Rightarrow \cos x=0 \quad \vee \quad \operatorname{sen}x=-\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow x=\frac{\pi}{2} \quad \vee \quad x=\frac{7\pi}{6}\ ;\ \frac{11\pi}{6}$$

(Por dato $x\in\langle 0;\pi\rangle$)

2do.

- Hallando los puntos de inflexión

como f '(x)=cos$x$+sen2x

derivando

$$f''(x)=-\operatorname{sen}x+2\cos 2x$$

hacemos f " (x)=0

es decir

$$-\operatorname{sen}x+2\cos 2x=0$$

$$-\operatorname{sen}x+2(1-2\operatorname{sen}^2x)=0$$

$$-\operatorname{sen}x+2-4\operatorname{sen}^2x=0$$

$$4\operatorname{sen}^2x+\operatorname{sen}x-2=0$$

$$\operatorname{sen}x=\frac{-1\pm\sqrt{1-4(4)(-2)}}{2(4)}$$

$$\operatorname{sen}x=\frac{-1\pm\sqrt{33}}{8}$$

$$\Rightarrow \operatorname{sen}x=\frac{\sqrt{33}-1}{8} \quad \vee \quad \operatorname{sen}x=\frac{-\sqrt{33}-1}{8}$$

sí cumple porque como $x\in\langle 0;\pi\rangle$ $\Rightarrow$ sen$x$>0 y $\frac{\sqrt{33}-1}{8}>0$

no se cumple porque si $x\in\langle 0;\pi\rangle\Rightarrow \operatorname{sen}x>0$ y $\frac{-\sqrt{33}-1}{8}<0$

luego de $\operatorname{sen}x=\frac{\sqrt{33}-1}{8}$

se obtiene

$$x=k\pi+(-1)^k\operatorname{arcsen}\left(\frac{\sqrt{33}-1}{8}\right)$$

Como $x\in\langle 0;\pi\rangle$,

entonces x tomará dos valores

$$x_1=\operatorname{arcsen}\left(\frac{\sqrt{33}-1}{8}\right)<>36°22'30{,}7''$$

$$x_2=\pi-\operatorname{arcsen}\left(\frac{\sqrt{33}-1}{8}\right)<>143°37'29{,}3''$$

3ro.

Intervalo	$\langle 0 ; x_1 \rangle$	$\left\langle x_1 ; \frac{\pi}{2} \right\rangle$	$\left\langle \frac{\pi}{2} ; x_2 \right\rangle$	$\langle x_2 ; \pi \rangle$
Valor de prueba	$x = \frac{\pi}{6}$	$x = \frac{\pi}{4}$	$x = \frac{2\pi}{3}$	$x = \frac{5\pi}{6}$
Signo de f'	$f'\left(\frac{\pi}{6}\right) > 0$	$f'\left(\frac{\pi}{4}\right) > 0$	$f'\left(\frac{2\pi}{3}\right) < 0$	$f'\left(\frac{5\pi}{6}\right) < 0$
Signo de f"	$f''\left(\frac{\pi}{6}\right) > 0$	$f''\left(\frac{\pi}{4}\right) < 0$	$f''\left(\frac{2\pi}{3}\right) < 0$	$f''\left(\frac{5\pi}{6}\right) > 0$
Conclusión				

Donde: ↗ : creciente ; ∪ : cóncava hacia arriba

↙ : decreciente ; ∩ : cóncava hacia abajo

Tabulaciones para la función f

x	0	x_1	$\frac{\pi}{2}$	x_2	π
$f(x)$	–0,5	0,445	1,5	0,445	–0,5

4to.

Con toda la información anterior, podemos generar la gráfica de f.

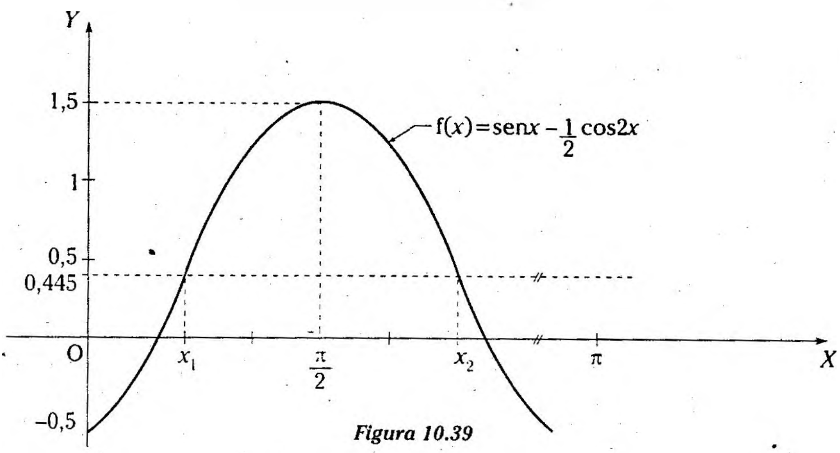


Figura 10.39

Criterio de la Segunda derivada para Máximos y Mínimos

A veces se puede utilizar la segunda derivada para lograr un criterio muy simple acerca de los máximos y mínimos relativos. El criterio se basa en que si una función f es tal que f'(c)=0 y existe un intervalo abierto que contiene a **c**, en el que la gráfica de f es cóncava hacia arriba $(f''(c)>0)$, entonces f(c) es un mínimo relativo de f (ver figura 10.40(a). Análogamente, si f es una función tal que f'(c)=0 y existe un intervalo que contiene a c, donde la gráfica de f es cóncava hacia abajo $(f''(c)>0)$, entonces f(c) es un máximo relativo de f véase figura 10.40(b)

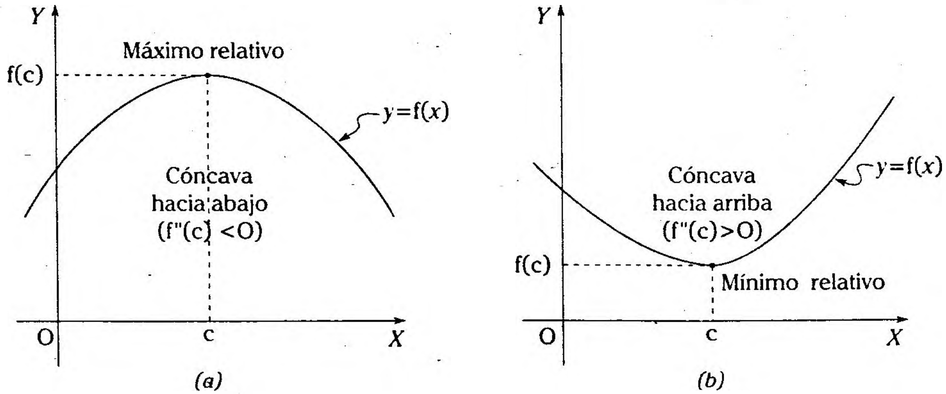


Figura 10.40

Teorema

Sea f una función tal que f '(c)=0 y tal que la segunda derivada de f existe en un intervalo abierto que contiene a c, entonces

I. Si f "(c)>0, entonces f(c) es un mínimo relativo.
II. Si f "(c)<0, entonces f(c) es un máximo relativo.

Ejemplo

Halle lós valores de x donde la función f es máximo y mínimo, usando el criterio de la segunda derivada si $f(x) = \operatorname{sen}x\cos x$

Resolución

Simplificando f, tenemos $f(x)=\frac{1}{2}(2\operatorname{sen}x\cos x)$

$$\Rightarrow f(x)=\frac{1}{2}\operatorname{sen}2x$$

Calculamos los valores críticos de f

Para ello tenemos que hallar la primera derivada f (f '(x)) y resolver la siguiente ecuación f '$(x)=0$

$f'(x)=\cos 2x=0 \quad \Rightarrow 2x=(2k+1)\frac{\pi}{2}; \quad k\in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow x=(2k+1)\frac{\pi}{4} \quad \Rightarrow x=\left\{\ldots;\frac{\pi}{4};\,3\frac{\pi}{4};\,5\frac{\pi}{4};\ldots\right\}$

Para obtener los máximos y mínimos relativos tenemos que hallar segunda derivada de f(f "(x)) y resolver la siguiente ecuación f "$(x)=0$

Entonces f" $(x)=-2\text{sen}2x$ aplicando el criterio de la segunda derivada como sigue

Valor de x	Signo de f	Conclusión
$x=\frac{\pi}{4}$	$f''\left(\frac{\pi}{4}\right)=-2\text{sen}\frac{\pi}{2}=-2<0$	$\Rightarrow f\left(\frac{\pi}{4}\right)$, es máximo
$x=\frac{3\pi}{4}$	$f''\left(\frac{3\pi}{4}\right)=-2\text{sen}\frac{3\pi}{2}=2>0$	$\Rightarrow f\left(\frac{3\pi}{4}\right)$, es mínimo
$x=\frac{5\pi}{4}$	$f''\left(\frac{5\pi}{4}\right)=-2\text{sen}\frac{5\pi}{2}=-2<0$	$\Rightarrow f\left(\frac{5\pi}{4}\right)$, es máximo
$\vdots$		

Entonces f es máximo si $x=\frac{\pi}{4};\frac{5\pi}{4};\frac{9\pi}{4};\ldots=(4k+1)\frac{\pi}{4}$; $\quad k\in \mathbb{R}$

y f será mínimo si $x=\frac{3\pi}{4};\frac{7\pi}{4};\frac{11\pi}{4};\ldots=(4k+3)\frac{\pi}{4}$; $\quad k\in \mathbb{R}$

Para una mejor comprensión de este ejercicio, la figura 10.41 muestra la gráfica de f.

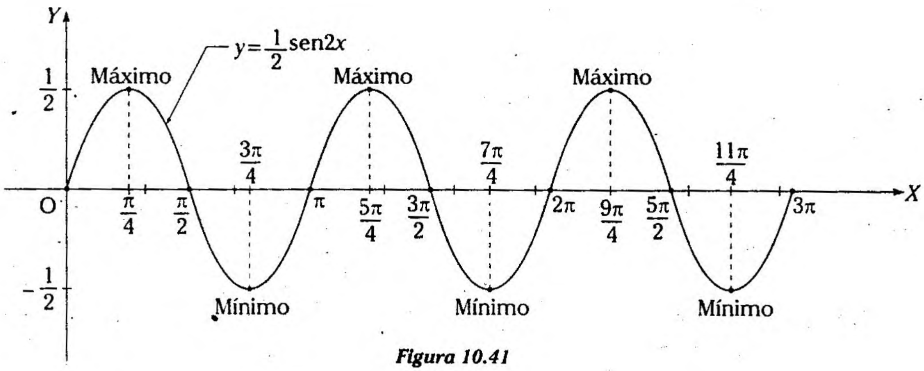


Figura 10.41

Nota

Los máximos y mínimos de f del ejercicio anterior son absolutos.

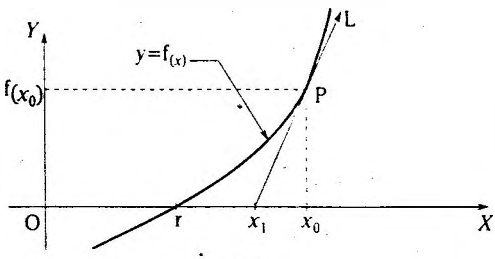
Método de Newton Rapshon

Cuando se quiere resolver la ecuación $x^3-x^2+3=0$ lo primero que se intenta es la factorización del primer miembro, pero comprobamos que dicho primer miembro no se puede factorizar fácilmente.

También la siguiente ecuación $\cos x - x = 0$ no puede resolverse por métodos de ecuaciones trigonométricas, ya que dicha ecuación no es considerada ecuación trigonométrica.

El método de Newton – Rapshon nos ayuda a resolver estos tipos de ecuaciones.

En la figura 10.42(a) se tiene la gráfica de una función f, cuya regla de correspondencia es $y=f(x)$, se desea hallar la raíz r de la ecuación $f(r)=0$



(a)

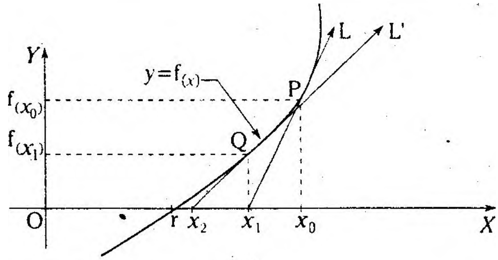
Además, en la figura de arriba se ha trazado una recta tangente L a la curva que pasa por el punto $P(x_0; f(x_0))$, nótese que x_1, se aproxima a r.

Entonces, la ecuación de la recta tangente L será $y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$

Como x se aproxima a la raíz r, entonces en la ecuación de la recta L para hallar x_1, hacemos $y=0$ $0-f(x_0)=f'(x_0)(x_1-x_0)$, despejando x_1

tendremos $x_1 = x_0 - \dfrac{f(x_0)}{f'(x_0)}$

Si trazamos una nueva recta tangente L' a la curva de tal manera que pase por el punto $Q(x_1;f(x_1))$, entonces tendremos el siguiente gráfico, (observe la figura 10.42(b)).



(b)

Figura 10.42

Debe usted notar en la figura 10.42(b) que x_2 está más cerca de r que x_1; entonces, si hacemos el mismo procedimiento anterior para hallar x_2,

obtendremos que $x_2 = x_1 - \dfrac{f(x_1)}{f'(x_1)}$

Este proceso lo podemos continuar para acercarnos más al r buscado.

Método de Newton-Raphson para aproximar los Ceros de una Función

Sea $f_{(r)}=0$, donde **f** es derivable en un intervalo abierto que contenga a **r**. Entonces al aproximar **r**, seguiremos los siguientes pasos:

- Hacer una estimación x_n próxima al **r**
- Determinar una nueva estimación con la fórmula

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Si la diferencia entre x_{n+1} y x_n es insignificante, entonces se tomará x_{n+1} como aproximación final.

Ejemplo 1

Resuelva

$$x^3-x^2+3=0$$

Resolución

Sea

$$f(x)=x^3-x^2+3 \Rightarrow f'(x)=3x^2-2x$$

La gráfica de **f** ayudará para aplicar el método de Newton-Raphson (Vea la figura 10.43).
En la figura 10.43, la curva representa la gráfica de **f**, la raíz buscada es **r**.

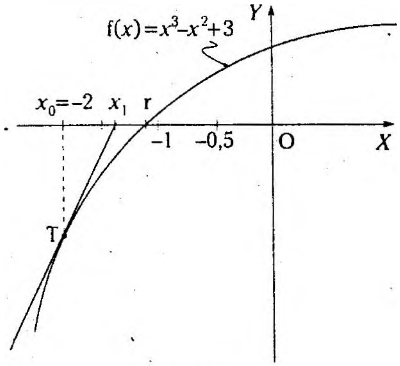


Figura 10.43

Haciendo $x_0=-2$ entonces x_1 lo hayamos por la fórmula ya deducida más atras

$$x_1=x_0-\frac{f_{(x_0)}}{f'_{(x_0)}}=-2-\frac{f_{(-2)}}{f'_{(-2)}}$$

$$x_1=-2-\frac{(-2)^3-(-2)^2+3}{3(-2)^2-2(-2)} \qquad \therefore x_1=-1{,}4375$$

El valor de x_1 lo tomaremos como una nueva aproximación, entonces hallaremos un x_2 más cercano a **r**

$$x_2=x_1-\frac{f_{(x_1)}}{f'_{(x_1)}}=-1{,}4375-\frac{(-1{,}4375)^3-(-1{,}4375)^2+3}{3(-1{,}4375)^2-2(-1{,}4375)}$$

$\therefore x_2=-1{,}213032716$

Y así análogamente calculamos x_3 , x_4 . . . y obtenemos

$x_3=-1{,}175553276$
$x_4=-1{,}174560165$
$x_5=-1{,}174559411$

Como la diferencia entre x_5 y x_4 es insignificante, entonces podemos concluir que el valor de **r** es

$$r=-1{,}174559411$$

Comprobemos en la ecuación

$$(-1{,}174559411)^3-(-1{,}174559411)^2+3=-0{,}000000004$$

Ejemplo 2
Resuelva $\cos x-x=0$

Resolución
Sea
$f(x)=\cos x-x \Rightarrow f'(x)=-\operatorname{sen}x-1$
En la figura 10.44 tenemos la gráfica de f; entonces, para hallar la raíz r de la ecuación $\cos x-x=0$

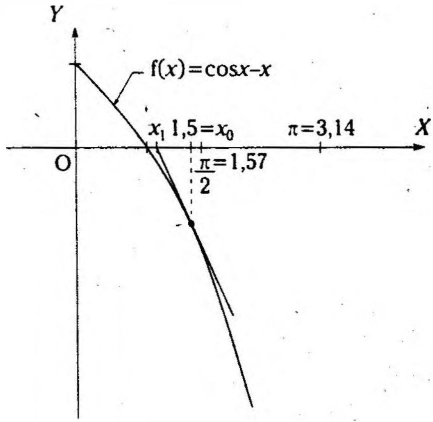


Figura 10.44

La primera aproximación es $x_0=1{,}5$
Hallamos x_1 (cercano a la raíz **r**)

$$\Rightarrow x_1=1{,}5-\frac{f(1{,}5)}{f'(1{,}5)}=1{,}5-\frac{\cos(1{,}5)-1{,}5}{-\operatorname{sen}(1{,}5)-1}$$

$\therefore x_1=0{,}784472397$

Tomando a x_1 como una nueva aproximación, hallaremos x_2 (más cercano a **r** que x_1)

$$\Rightarrow x_2=0{,}784472397-\frac{f(0{,}784472397)}{f'(0{,}784472397)}$$

$$\Rightarrow x_2=0{,}784472397-\frac{\cos(0{,}784472397)-0{,}784472397}{-\operatorname{sen}(0{,}784472397)-1}$$

$\therefore x_2=0{,}739518709$

Y así sucesivamente podemos calcular x_3, x_4 ...
$\therefore x_3=0{,}739085174 \qquad \therefore x_4=0{,}739085133$

Como la diferencia entre x_3 y x_4 es insignificante, entonces el valor de r será

$$r=0{,}739085133$$

verificamos r en $\cos x-x=0$

$$\Rightarrow \cos(0{,}739085133)-0{,}739085133=0{,}0000000036$$

Problemas Resueltos

Problema 1

Obtenga el valor de mn, a partir de las condiciones siguientes:

$f(t) = m\cos t + n \ldots (1)$

$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = 4 \ldots (2)$

$f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2 \ldots (3)$

Resolución

A partir de la función $f(t) = m\cos t + n$, observamos que la variable es t, además m y n son valores constantes.

$$\Rightarrow f\left(\frac{\pi}{3}\right) = m\underbrace{\cos\frac{\pi}{3}} + n$$

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = m\left(\frac{1}{2}\right) + n$$

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{m}{2} + n \quad \ldots (4)$$

De (2) y (4):

$$\frac{m}{2} + n = 4 \quad \ldots (5)$$

Seguidamente tendremos que calcular $f'_{(t)}$

$f(t) = m\cos t + n$

$f'_{(t)} = (m\cos t + n)'$

$$f'_{(t)} = \frac{d}{dt}(m\cos t) + \frac{d}{dt}\overbrace{(n)}^{\text{es un valor constante}} \quad \ldots (6)$$

Pero $\frac{d(n)}{dt} = 0 \quad \ldots (7)$

(derivada de una función constante)

Además

$$\frac{d}{dt}(m\cos t) = m\frac{d(\cos t)}{dt} = m(-\text{sen}\,t)$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}(m\cos t) = -m\,\text{sen}\,t \quad \ldots (8)$$

Seguidamente, reemplazamos (7) y (8) en (6) y obtenemos

$$f'_{(t)} = \frac{df(t)}{dt} = \underbrace{\frac{d}{dt}(m\cos t)}_{-m\,\text{sen}\,t} + \underbrace{\frac{d}{dt}(n)}_{0}$$

$$\Rightarrow f'_{(t)} = -m\,\text{sen}\,t \quad \ldots (9)$$

$$\Rightarrow f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = -m\underbrace{\text{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right)}$$

$$\Rightarrow f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = -m\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\Rightarrow f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{m}{2} \quad \ldots (10)$$

De (10) y (3) tenemos

$$-\frac{m}{2} = 2 \Rightarrow m = -4 \quad \ldots (11)$$

Reemplazamos (11) en (5)

$$-\frac{4}{2} + n = 4 \Rightarrow n = 6$$

$\Rightarrow$ El valor de mn será $mn = -24$

Problema 2

Una pared de **a** metros de altura dista **b** metros de un edificio. Determine el ángulo que debe formar con el suelo una escalera apoyada en la pared y el edificio para que su longitud sea mínima.

Resolución

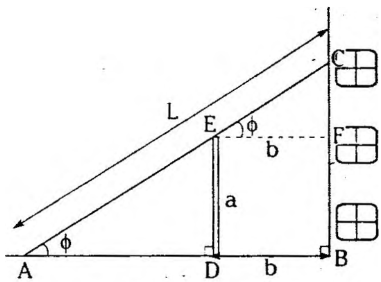


Figura 10.45

Del gráfico, aplicamos resolución de triángulos rectángulos

$AE = a\csc\phi \wedge EC = b\sec\phi$

Pero

$L = AE + EC$

$L = a\csc\phi + b\sec\phi \ ...(1)$

Observamos que la longitud de la escalera L depende del ángulo ϕ.

Según el problema, debemos determinar un valor de ϕ tal que la longitud de la escalera sea mínima; por lo tanto, debemos aplicar los criterios de máximos y mínimos de una función.

Según este criterio, debemos derivar L con respecto de ϕ; luego, igualarlo a cero.

$L = a\csc\phi + b\sec\phi$

$$\frac{dL}{d\phi} = \frac{d}{d\phi}(a\csc\phi + b\sec\phi)$$

Aplicando teoremas de diferenciación y los teoremas de derivadas de funciones trigonométricas, tendremos

$$\frac{dL}{d\phi} = -a\csc\phi.\cot\phi + b\sec\phi.\tan\phi$$

a continuación, igualamos a cero $\left(\frac{dL}{d\phi} = 0\right)$.

$-a\csc\phi\cot\phi + b\sec\phi\tan\phi = 0$

$$b.\frac{1}{\cos\phi}\tan\phi = a\frac{1}{\operatorname{sen}\phi}\cot\phi \Rightarrow \tan^3\phi = \frac{a}{b}$$

$$\Rightarrow \tan\phi = \sqrt[3]{\frac{a}{b}} \Rightarrow \phi = \arctan\sqrt[3]{\frac{a}{b}}$$

Problema 3

Dada la función f definida por

$f(x) = 2x\operatorname{arcsen}2x$, luego de evaluar $f'\left(\frac{1}{4}\right)$, el valor obtenido será:

Resolución

A la función f, definida anteriormente, la expresamos como un producto de funciones g y h.

Esto es $f(x) = \underbrace{2x}_{g(x)}.\underbrace{\operatorname{arcsen}2x}_{h(x)}$

$\Rightarrow f(x) = g(x).h(x)$

$\Rightarrow f'(x) = g'(x).h(x) + h'(x)g(x) \ ...(1)$

pero

i) $g(x) = 2x \Rightarrow g'(x) = 2 \ ...(2)$

ii) $h(x) = \operatorname{arcsen}2x$

$$\Rightarrow h'_{(x)} = \frac{d}{dx}(\operatorname{arcsen}2x).\frac{d(2x)}{dx}$$

(Regla de la cadena)

$$\Rightarrow h'_{(x)}=\frac{1}{\sqrt{1-(2x)^2}}(2)$$

$$\Rightarrow h'_{(x)}=\frac{1}{\sqrt{1-4x^2}}(2)$$

$$\Rightarrow h'_{(x)}=\frac{2}{\sqrt{1-4x^2}} \quad ...(3)$$

Luego, si reemplazamos (2) y (3) en (1); obtendremos

$$f'_{(x)}=\underbrace{g'_{(x)}}_{2}\ \underbrace{h(x)}_{\operatorname{arcsen}2x}+\underbrace{h'_{(x)}}_{\frac{2}{\sqrt{1-4x^2}}}\ \underbrace{g(x)}_{2x}$$

Reduciendo

$$\Rightarrow f'_{(x)}=2\operatorname{arcsen}2x+\frac{4x}{\sqrt{1-4x^2}}$$

Evaluando para $x=\frac{1}{4}$, se obtiene

$$f'\left(\frac{1}{4}\right)=2\underbrace{\operatorname{arcsen}\left(2\times\frac{1}{4}\right)}_{\underbrace{\operatorname{arcsen}\left(\frac{1}{2}\right)}_{\frac{\pi}{6}}}+\frac{4\left(\frac{1}{4}\right)}{\sqrt{1-4\left(\frac{1}{4}\right)^2}}$$

Reduciendo, finalmente obtenemos

$$f'\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{\pi+2\sqrt{3}}{3}$$

Problema 4

Obtenga la ecuación de la recta tangente y la recta normal a la curva cuya ecuación esta dada por $f(x)=\cos^4x-\operatorname{sen}^4x$, en el punto P de abscisa igual a $\frac{\pi}{3}$.

Resolución

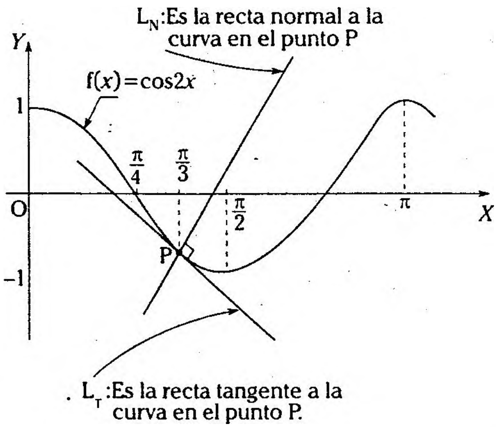
Dada la ecuación

$f(x)=\cos^4x-\operatorname{sen}^4x\ldots(1)$

$$f(x)=\underbrace{(\cos^2x-\operatorname{sen}^2x)}_{\cos 2x}\underbrace{(\cos^2x+\operatorname{sen}^2x)}_{(1)}$$

luego $f(x)=\cos 2x\ldots(2)$

si se realiza la gráfica de f en el intervalo $[0;\pi]$, se obtendría



(a)

Para el punto P, se tiene que su abscisa es $\frac{\pi}{3}$

$$\Rightarrow P\left(\frac{\pi}{3};f\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)\ldots(3)$$

Dato: $f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\cos 2\left(\frac{\pi}{3}\right)=\cos\frac{2\pi}{3}=\frac{-1}{2}$

$$\Rightarrow f\left(\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{1}{2}\ldots(4)$$

Reemplazando (4) en (3), se obtiene

$$P\left(\frac{\pi}{3};-\frac{1}{2}\right)\ldots(5)$$

$f'_{(x)}$ es la pendiente de la recta tangente a la curva y la denotamos por m_T.

En nuestro caso, L_T es la recta tangente en P a la curva, a partir de (2) obtenemos.

$$f'_{(x)}=\frac{d(\cos 2x)}{dx}=-\operatorname{sen}2x\frac{d(2x)}{dx}=-\operatorname{sen}2x(2)$$

$$\Rightarrow f_{(x)}=-2\operatorname{sen}2x \quad \ldots (6)$$

luego $f'\left(\frac{\pi}{3}\right)=-2\operatorname{sen}\frac{2\pi}{3}$; pero $\operatorname{sen}\frac{2\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\Rightarrow f'\left(\frac{\pi}{3}\right)=-2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$\Rightarrow f'\left(\frac{\pi}{3}\right)=-\sqrt{3}$, lo que indica que $m_T=-\sqrt{3}$ ... (7)

Hasta el momento, se ha calculado la pendiente de la recta tangente L_T y el punto de paso P, esto es, de 5 y 7.

$$m_T=-\sqrt{3} \ ; \ P\left(\frac{\pi}{3};-\frac{1}{2}\right)$$

Como usted recordará, la ecuación de una recta L_T que pasa por el punto P y tiene pendiente m_T se halla de la forma siguiente

$$L_T: m_T=\frac{y-\text{ordenada(p)}}{x-\text{abscisa(p)}}$$

Reemplazando los valores correspondientes, se tendría

$$L_T:-\sqrt{3}=\frac{y-\left(-\frac{1}{2}\right)}{x-\left(\frac{\pi}{3}\right)}$$

$$L_T:-\sqrt{3}=\frac{3(2y+1)}{(3x-\pi)2}$$

$$\Rightarrow L_T:\ -2\sqrt{3}(3x-\pi)=3(2y+1)$$

$$\Rightarrow L_T:-6\sqrt{3}x+2\sqrt{3}\pi=6y+3$$

Finalmente, pasando todo el segundo miembro, obtenemos la ecuación para L_T, esto es:

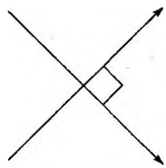
$L_T: 6y+6\sqrt{3}x+3-2\sqrt{3}\pi=0$

(esta es la ecuación de la recta tangente a la curva en el punto P).

Seguidamente, hallaremos la ecuación de la recta normal (L_N), pero, para ello, le sugerimos que observe nuevamente el gráfico, y verificará que el punto de paso para esta recta es $P\left(\frac{\pi}{3};-\frac{1}{2}\right)$, por lo que solo faltaría la pendiente de dicha recta normal, la cual se ha denotado por m_N.

Cálculo de m_N

Recordemos el siguiente esquema



(b)

Figura 10.46

L_N : con pendiente m_N

L_T : con pendiente m_T

se verifica $m_N.m_T=-1$ . . . (8)

De (8)

$\underbrace{m_N}\cdot\underbrace{m_T}=-1$

$m_N\ (-\sqrt{3})=-1$

$$\Rightarrow m_N=\frac{1}{\sqrt{3}} \quad \ldots (9)$$

Luego, para la recta normal se tiene la pendiente m_N y el punto de paso P. Esto es

$$m_N=\frac{1}{\sqrt{3}} \ ; \ P\left(\frac{\pi}{3};-\frac{1}{2}\right)$$

Para hallar la ecuación, plantearemos

$$L_N: m_N = \frac{y-\text{ordenada}(p)}{x-\text{abscisa}(p)}$$

Reemplazando valores, se tiene

$$\Rightarrow L_N: \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{y-\left(-\frac{1}{2}\right)}{x-\left(\frac{\pi}{3}\right)}$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{3(2y+1)}{2(3x-\pi)}$$

$$\Rightarrow L_N:\ 2(3x-\pi) = 3\sqrt{3}(2y+1)$$

$$\Rightarrow L_N: 6x-2\pi = 6\sqrt{3}y+3\sqrt{3}$$

Finalmente, para obtener la ecuación de la recta normal L_N, pasamos todos los términos al segundo miembro, esto es

$$L_N: 6\sqrt{3}y-6x+3\sqrt{3}+2\pi=0$$

(ecuación de la recta normal L_N)

Problema 5

Analice el crecimiento o decrecimiento de la siguiente función definida por

$$f(x) = \text{sen}x + \frac{1}{2}\cos 2x,$$

para $x \in \left\langle \frac{3\pi}{4}; \pi \right\rangle$

Resolución

Debemos recordar que, para saber si una función es creciente o decreciente, una de las formas es mediante el análisis de su primera derivada, esto es, el signo que toma dicha expresión para cada x que pertenece al intervalo $\left\langle \frac{3\pi}{4}; \pi \right\rangle$

Dada $f(x) = \text{sen}\,x + \frac{1}{2}\cos 2x$

Hacemos corresponder a f como una suma de dos funciones g y h, esto es

$$f(x) = \underbrace{\text{sen}\,x}_{} + \underbrace{\frac{1}{2}\cos 2x}_{}$$

$$f(x) = g(x) + h(x) \quad \ldots(1)$$

Donde

$$\left.\begin{array}{l} g(x)=\text{sen}x \\ h(x)=\frac{1}{2}\cos 2x \end{array}\right\} \ldots(2)$$

De (1) $(f(x))' = (g(x)+h(x))'$

$$f'_{(x)} = g'_{(x)} + h'_{(x)} \quad \ldots (3)$$

De (2)

$g(x)=\text{sen}x$

$g'_{(x)} = \cos x \quad \ldots (4)$

De (2) $h(x) = \frac{1}{2}\cos 2x$

$$\Rightarrow h'_{(x)} = \left(\frac{1}{2}\cos 2x\right)' = \frac{1}{2}(\cos 2x)'$$

$$\Rightarrow h'(x) = \frac{1}{2}(-2\text{sen}\,2x)$$

Reduciendo $h'(x) = -\text{sen}2x \ldots (5)$

seguidamente reemplazaremos (4) y (5) en (3)

$$\Rightarrow f'_{(x)} = \cos x - \text{sen}\,2x$$

$$\Rightarrow f'_{(x)} = \cos x - 2\,\text{sen}\,x\cos x$$

$$f'_{(x)} = \cos x(1-2\,\text{sen}\,x) \quad \ldots (6)$$

pero en el intervalo $\left\langle \frac{3\pi}{4};\pi \right\rangle$

$$\frac{3\pi}{4} < x < \pi \Rightarrow -1 < \cos x < -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \ldots (7)$$

también

$$0 < \operatorname{sen} x < \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow 0 > -2\operatorname{sen} x > -\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow 1 > 1 - 2\operatorname{sen} x > 1 - \sqrt{2}$$

$$\Rightarrow 1 - \sqrt{2} < 1 - 2\operatorname{sen} x < 1 \quad \ldots (8)$$

De (6) (7) y (8)

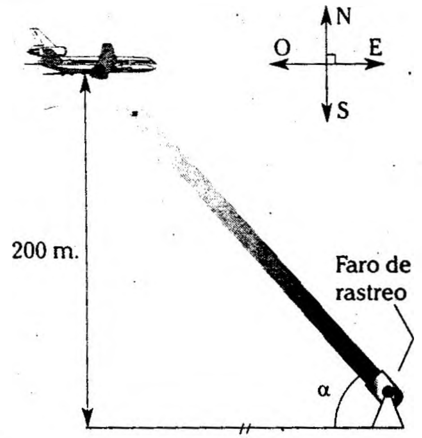
$$f'_{(x)} = \underbrace{\cos x}_{\substack{\text{siempre} \\ \text{es negativo}}} \quad \underbrace{(1 - 2\operatorname{sen} x)}_{\substack{\text{puede ser positivo} \\ \text{negativo o cero}}}$$

En consecuencia, $f'_{(x)}$ puede ser positivo (f es creciente), negativo (f es decreciente), cero (presenta un máximo o un mínimo).

$\therefore$ Concluimos que f es creciente y decreciente en el intervalo $\left\langle \frac{3\pi}{4};\pi \right\rangle$

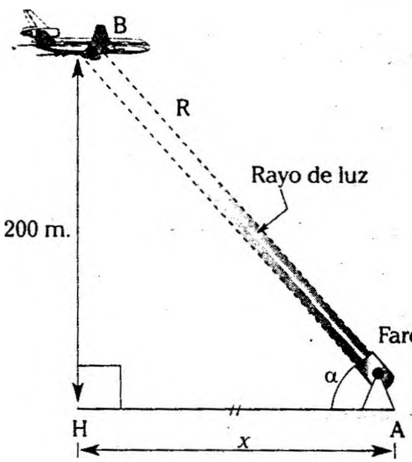
Problema 6

En la figura, se muestra un avión que vuela de oeste hacia el este con una rapidez de 250 m/s y a una altura constante de 200 m; un rayo de luz emitido por un faro de rastreo, ubicado en tierra, incide en la parte inferior del avión; si la luz se mantiene sobre el avión, ¿qué tan rápido gira el rayo de luz cuando el avión se encuentra a una distancia horizontal de 1000 m al oeste del faro?



(a)

Resolución



(b)
Figura 10.47

En primer lugar asignaremos un punto de ubicación a cada referencia a utilizar: sea A la ubicación del faro de rastreo, B la ubicación del avión (en el mismo instante) y sea t segundos el tiempo que transcurre desde que la luz del faro incide en el avión; además

x : es la distancia horizontal hacia el Oeste desde el faro hacia el avión.

α : el número de radianes del ángulo de elevación del avión a los t segundos.

Del dato

El avión vuela hacia el este con una rapidez de 250 m/s

$$\Rightarrow \frac{dx}{dt} = -250 \quad \ldots(1)$$

puesto que se pide que, tan rápido gira el rayo de luz, podemos expresar que esto es $\frac{d\alpha}{dt}$ ...(2) cuando, $x = 1000$ m

Del gráfico, podemos considerar en forma bastante aproximada

$$\triangle_{ABH} : \tan\alpha = \frac{200}{x} \quad ...(3)$$

En (3), derivamos respecto al tiempo t

$$\Rightarrow \frac{d(\tan\alpha)}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{200}{x}\right)$$

$$\Rightarrow \sec^2\alpha\frac{d\alpha}{dt} = -\frac{200}{x^2}\frac{dx}{dt} \quad \ldots(4)$$

Pero del dato

$$\frac{dx}{dt} = -250$$

Reemplazando en (4).

$$\Rightarrow \sec^2\alpha\frac{d\alpha}{dt} = -\frac{200}{x^2}(-250)$$

Despejando $\frac{d\alpha}{dt}$

$$\Rightarrow \frac{d\alpha}{dt} = +\frac{50000}{x^2\sec^2\alpha} \quad \ldots(5)$$

Puesto que se pide

$\frac{d\alpha}{dt}$ para $x = 1000$

Reemplazando en (3) tenemos

$$\Rightarrow \tan\alpha = \frac{200 \text{ m}}{1000 \text{ m}} \Rightarrow \tan\alpha = \frac{1}{5}$$

Recordando

$$\sec^2\alpha = 1 + \tan^2\alpha$$

$$\Rightarrow \sec^2\alpha = \frac{26}{25}$$

Reemplazando en (5), tenemos finalmente

$$\therefore \frac{d\alpha}{dt} = \frac{5}{104}$$

Lo cual se interpreta como: en el instante dado, la medida del ángulo esta creciendo a una tasa o razón de $\frac{5}{104}\frac{\text{rad}}{\text{s}}$

Problema 7

Calcule el máximo y mínimo valor de la función f si $f(x) = \text{sen}^m x \cos^n x$; si $n \in \mathbb{Z}^+$, $m \in \mathbb{Z}^+$

Resolución

Tomamos el logaritmo natural a ambos miembros

$$\text{Ln}f(x) = \text{Ln}(\text{sen}^m x \cos^n x)$$

$$\text{Ln}f(x) = \text{Ln}(\text{sen}^m x) + \text{Ln}(\cos^n x)$$

$$\text{Ln}f(x) = m\text{Ln}(\text{sen}x) + n\text{Ln}(\cos x)$$

Derivamos con respecto a x

$$\frac{1}{f(x)}f'_{(x)} = m\frac{(\text{sen}\,x)'}{\text{sen}\,x} + n\frac{(\cos x)'}{\cos x}$$

$$\frac{1}{f(x)}f'_{(x)} = m\frac{\cos x}{\text{sen}\,x} + n\frac{(-\text{sen}\,x)}{\cos x}$$

$$f'_{(x)} = f(x)\left[\frac{m}{\tan x} - n\tan x\right]$$

$$f'_{(x)} = \text{sen}^m x\cos^n x\left[\frac{m}{\tan x} - n\tan x\right]$$

Para calcular el máximo y mínimo de f hacemos $f'_{(x)} = 0$

$$\Rightarrow \operatorname{sen}^m x\cos^n x\left[\frac{m}{\tan x} - n\tan x\right] = 0$$

$$\Rightarrow \operatorname{sen}^m x = 0 \ \vee \cos^n x = 0 \ \vee \frac{m}{\tan x} - n\tan x = 0$$

$$\operatorname{sen} x = 0 \ \vee \ \cos x = 0 \ \vee \ \tan^2 x = \frac{m}{n}$$

Si $\operatorname{sen}x=0 \Rightarrow f(x)=0$

Si $\cos x=0 \Rightarrow f(x)=0$

Si $\tan^2 x = \dfrac{m}{n}$

$$\Rightarrow \quad \tan x = \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{n}} \quad \vee \quad \tan x = \frac{-\sqrt{m}}{\sqrt{n}}$$

$x \in IC$: $\operatorname{sen}x = \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{m+n}}$, $\cos x = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{m+n}}$ $\quad \vee \quad$ $x \in IIIC$: $\operatorname{sen}x = \frac{-\sqrt{m}}{\sqrt{m+n}}$, $\cos x = \frac{-\sqrt{n}}{\sqrt{m+n}}$

$x \in IIC$: $\operatorname{sen}x = \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{m+n}}$, $\cos x = \frac{-\sqrt{n}}{\sqrt{m+n}}$ $\quad \vee \quad$ $x \in IVC$: $\operatorname{sen}x = \frac{-\sqrt{m}}{\sqrt{m+n}}$, $\cos x = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{m+n}}$

Así para $x \in I\,C$, reemplazando $\operatorname{sen}x$ y $\cos x$ en f; tenemos

$$f(x) = \left(\frac{\sqrt{m}}{\sqrt{m+n}}\right)^m\left(\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{m+n}}\right)^n$$

$$\Rightarrow f(x) = \sqrt{\frac{m^m n^n}{(m+n)^{m+n}}}$$

Así para $x \in IIC$, sustituimos el valor de $\operatorname{sen}x$ y $\cos x$ en f; tenemos

$$f(x) = \left(\frac{\sqrt{m}}{\sqrt{m+n}}\right)^m\left(\frac{-\sqrt{n}}{\sqrt{m+n}}\right)^n$$

asumiendo n impar

$$\Rightarrow f(x) = -\sqrt{\frac{m^m n^n}{(m+n)^{m+n}}}$$

De $f'(x)=0$ se obtiene que $f(x)$ toma un valor negativo $-\sqrt{\dfrac{m^m n^n}{(m+n)^{m+n}}}$, un valor nulo y un valor positivo

$$\sqrt{\frac{m^m \times n^n}{(m+n)^{m-n}}},$$

Por lo tanto

$$f_{min} = -\sqrt{\frac{m^m n^n}{(m+n)^{m+n}}} \ ; \ f_{max} = \sqrt{\frac{m^m n^n}{(m+n)^{m+n}}}$$

De aquí, se plantean los siguientes teoremas.

Teorema

Si m y n son enteros positivos, tal que al menos uno de ellos es impar, entonces

$$-\sqrt{\frac{m^m n^n}{(m+n)^{m+n}}} \leq \operatorname{sen}^m x\cos^n x \leq \sqrt{\frac{m^m n^n}{(m+n)^{m+n}}}$$

Ejemplo

Calcule los valores de $y=\operatorname{sen}^3 x\cos^2 x$

Resolución

$$-\sqrt{\frac{3^3 \times 2^2}{(3+2)^{3+2}}} \leq \operatorname{sen}^3 x\cos^2 x \leq \sqrt{\frac{3^3 \times 2^2}{(3+2)^{3+2}}}$$

Simplificando

$$-\frac{6\sqrt{15}}{125} \leq \operatorname{sen}^3 x\cos^2 x \leq \frac{6\sqrt{15}}{125}$$

Teorema

Si m y n son números pares positivos, entonces se cumple

$$0 \leq \operatorname{sen}^m x\cos^n x \leq \sqrt{\frac{m^m n^n}{(m+n)^{m+n}}}$$

Ejemplo

Calcule los valores de $y=\operatorname{sen}^2 x\cos^8 x$

Resolución

$$0\le \operatorname{sen}^2 x\cos^8 x\le \sqrt{\frac{2^2\times 8^8}{(2+8)^{2+8}}}$$

Simplificando

$$0\le \operatorname{sen}^2 x\cos^8 x\le \frac{256}{3125}$$

Problema 8

Determine los valores de f, si se define por la regla de correspondencia

$$f(x)=\operatorname{sen}^{2n}x+\cos^{2n}x\ ;\ n\in \mathbb{Z}$$

Resolución

Para determinar los valores máximo y mínimos, aplicamos el criterio de la primera derivada para así obtener los puntos críticos; veamos

$$f'(x)=2n\ \operatorname{sen}^{2n-1}x\cdot(\operatorname{sen}x)'+2n\cos^{2n-1}x\cdot(\cos x)'$$

$$f'(x)=2n\ \operatorname{sen}^{2n-1}x\ (\cos x)+2n\cos^{2n-1}x(-\operatorname{sen}x)$$

$$f'(x)=2n\ \operatorname{sen}x\ \cos x\ \left(\operatorname{sen}^{2n-2}x-\cos^{2n-2}x\right)$$

$$f'(x)=n\ \operatorname{sen}2x\left(\operatorname{sen}^{2n-2}x-\cos^{2n-2}x\right)$$

Hacemos $f'(x)=0$

De donde

$$\operatorname{sen}2x=0\ \vee\ \operatorname{sen}^{2n-2}x-\cos^{2n-2}x=0$$

$$\tan^{2n-2}x=1$$

Resolviendo las ecuaciones

- $\operatorname{sen}2x=0\rightarrow x=\dfrac{k\pi}{2};k\in\mathbb{Z}$
- $\tan x^{2n-2}=1\rightarrow \tan x=\pm1$

$$x=k\pi\pm\frac{\pi}{4}$$

Y estos valores representan los puntos críticos, donde f es máximo o mínimo.

Evaluamos en los intervalos para determinar el signo de $f'(x)$

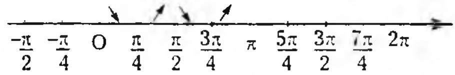


Figura 10.48

Sea $0<x<\dfrac{\pi}{4}\rightarrow f'(x)<0$

Sea $\dfrac{\pi}{4}<x<\dfrac{\pi}{2}\rightarrow f'(x)>0$

Sea $\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{3\pi}{4}\rightarrow f'(x)<0$

Sea $\dfrac{3\pi}{4}<x<\pi\rightarrow f'(x)>0$

Nótese que es suficiente analizar en una longitud igual al periodo de f.

Veamos

$$f(x+T)=\operatorname{sen}^{2n}(x+T)+\cos^{2n}(x+T)$$

esto sólo cumple para $T=\dfrac{\pi}{2}$

Si observamos la figura 10.48 , se tiene que para

$x=\ldots\ 0\ ,\ \dfrac{\pi}{2}\ ,\pi\ ,\ldots$ f es máximo y para

$x=\ldots\ \dfrac{\pi}{4}\ ,\ \dfrac{3\pi}{4}\ ,\ldots$ f es mínimo

Entonces

$$f\text{máx}=f(0)=\operatorname{sen}^{2n}0+\cos^{2n}0=1$$

y

$$f\text{mín}=f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\operatorname{sen}^{2n}\frac{\pi}{4}+\cos^{2n}\frac{\pi}{4}=\frac{1}{2^{n-1}}$$

Finalmente, tenemos

$$\frac{1}{2^{n-1}}\le \operatorname{sen}^{2n}x+\cos^{2n}x\le 1$$

Ejemplos

Si n=2

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\le \operatorname{sen}^4 x+\cos^4 x\le 1$$

Si n=3

$$\Rightarrow \frac{1}{4}\le \operatorname{sen}^6 x+\cos^6 x\le 1$$

Si n=4

$$\Rightarrow \frac{1}{8} \leq \operatorname{sen}^8 x + \cos^8 x \leq 1$$

Si n=5

$$\Rightarrow \frac{1}{16} \leq \operatorname{sen}^{10} x + \cos^{10} x \leq 1$$

Problema 9

Si se define

$f(x) = \operatorname{sen}^2 x$

Obtenga la suma de soluciones para la siguiente ecuación

$$4\frac{df}{dx} + \frac{df^2}{dx^2} + \frac{df^3}{dx^3} = 0 \ ; \ \text{si } x \in [0 \ ; 2\pi]$$

Resolución

A partir de $f(x) = \operatorname{sen}2x$

i) $$\frac{df}{dx} = \frac{d(\operatorname{sen}^2 x)}{dx} = 2\operatorname{sen} x \ \frac{d(\operatorname{sen} x)}{dx}$$
$$= 2\operatorname{sen} x(\cos x)$$

$$\Rightarrow \frac{df}{dx} = 2\operatorname{sen} x \cos x \ \ldots (1)$$

ii) $$\frac{df^2}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{df}{dx}\right) = \frac{d}{dx}(2\operatorname{sen} x \cos x)$$

$$= \frac{d}{dx}(\operatorname{sen} 2x) = \cos 2x \frac{d(2x)}{dx}$$

$$\Rightarrow \frac{df^2}{dx^2} = \cos 2x(2) \Rightarrow \frac{df^2}{dx^2} = 2\cos 2x \ \ldots (2)$$

iii) $$\frac{df^3}{dx^3} = \frac{d}{dx}\left(\frac{df^2}{dx^2}\right) = \frac{d}{dx}(2\cos 2x) = 2\frac{d(\cos 2x)}{dx}$$

$$= 2\frac{d(\cos 2x)}{d(2x)} \cdot \frac{d(2x)}{dx}$$

$$\Rightarrow \frac{df^3}{dx^3} = -4\operatorname{sen} 2x \ \ldots (3)$$

De la condición del problema

$$4\frac{df}{dx} + \frac{df^2}{dx^2} + \frac{df^3}{dx^3} = 0 \ \ldots (4)$$

Reemplazando (1), (2) y (3) en (4), se obtiene

$$4(2\operatorname{sen} x \cos x) + (2\cos 2x) + (-4\operatorname{sen} 2x) = 0$$

$$\Rightarrow 4\operatorname{sen} 2x + 2\cos 2x - 4\operatorname{sen} 2x = 0$$

Reduciendo

$$2\cos 2x = 0$$

$$\Rightarrow \cos 2x = 0$$

$$\Rightarrow 2x = (2k+1)\frac{\pi}{2}$$

(Revise el capítulo de ecuaciones trigonométricas)

$$\Rightarrow x = (2k+1)\frac{\pi}{4} \ ; k \in \mathbb{Z}$$

Se pide resolver en el intervalo $[0 \ ; 2\pi]$

Damos valores adecuados a k:

$k=0 \ \rightarrow x = \frac{\pi}{4}$

$k=1 \ \rightarrow x = \frac{3\pi}{4}$

$k=2 \ \rightarrow x = \frac{5\pi}{4}$

$k=3 \ \rightarrow x = \frac{7\pi}{4}$

$$\Rightarrow \text{C.S.} \left\{\frac{\pi}{4} \ ; \frac{3\pi}{4} \ ; \frac{5\pi}{4} \ ; \frac{7\pi}{4}\right\}$$

Pero en el enunciado se pide dar como respuesta al problema la suma de soluciones, así

$$\frac{\pi}{4} + \frac{3\pi}{4} + \frac{5\pi}{4} + \frac{7\pi}{4}$$

$\therefore$ La suma de soluciones es 4π

Problemas Propuestos

1. Calcule

$$\lim_{\alpha\to\frac{5\pi}{2}} \frac{\cos(\csc 2\alpha+\cot 2\alpha)-1}{\tan\left(\dfrac{\cos^2\alpha}{1+\operatorname{sen}\alpha}\right)}$$

A) –1 B) 0 C) –2
D) 2 E) 1

2. Sea la función definida con regla de correspondencia $f(x)=\dfrac{\sqrt{\cos ax}+x^2-1}{\sqrt{\cos bx}-x^2-1}$

Determine el valor al cual se aproxima la función cuando x se aproxima a cero.

A) $\dfrac{a-1}{b+1}$ B) $\dfrac{a^2-4}{b^2+4}$ C) $\dfrac{a^2+4}{b^2+4}$

D) $\dfrac{a^2+1}{b^2-1}$ E) $\dfrac{a}{b}$

3. Halle el valor del siguiente límite

$$\lim_{x\to 9}\frac{\operatorname{sen}(x+9-6\sqrt{x})}{(3\sqrt{x}-9)\tan(\sqrt{x}-3)}$$

A) 1 B) 3 C) $\dfrac{1}{3}$
D) – 6 E) –2

4. Sea

$$f(x)=\frac{1-\cos(\operatorname{sen}3x)}{\operatorname{sen}^2(\operatorname{sen}4x)}$$

determine $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$

A) $\dfrac{3}{16}$ B) $\dfrac{1}{8}$ C) $\dfrac{2}{9}$

D) $\dfrac{1}{4}$ E) $\dfrac{9}{32}$

5. Calcule

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{\csc 2x-2\cot 4x}{(1+\cos x)(2\cos x-1)}$$

A) –3 B) $8\sqrt{3}$ C) $-2\sqrt{3}$

D) $\dfrac{6\sqrt{3}}{3}$ E) $-\dfrac{8\sqrt{3}}{3}$

6. Sea una función f definida por

$$f(x)=\frac{\sqrt{k+\cos^2 x}-\sqrt{k+\cos^2 t}}{\operatorname{sen} t-\operatorname{sen} x}$$

Calcule el límite de la función, si x se aproxima a t.

A) $\dfrac{\operatorname{sen} t}{k}$ B) $\dfrac{\cos t}{\sqrt{k+\operatorname{sen}^2 t}}$

C) $\dfrac{\cos t}{\sqrt{k+\cos^2 t}}$

D) $\dfrac{\operatorname{sen} t}{\sqrt{k+\cos^2 t}}$ E) $\dfrac{\cos t}{t}$

7. Evalúe el siguiente límite

$$\lim_{x\to\arctan\frac{2}{3}}\frac{3-\operatorname{sen}2x-3\cos 2x}{16\operatorname{sen}2x-19-15\cos 2x}$$

A) $\dfrac{1}{10}$ B) –1 C) 2

D) $\dfrac{-1}{2}$ E) –2

8. Calcule

$$\lim_{x\to 0}(\sec x)^{\cos^4 x\csc^2 x}$$

A) $\sqrt{e}$ B) e^{-1} C) e^2
D) $\sqrt[3]{e}$ E) e

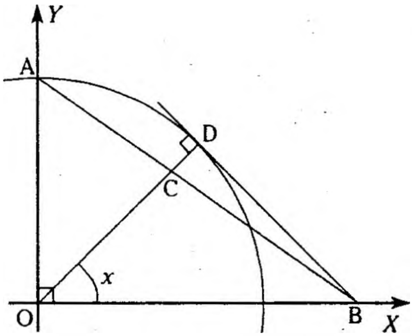
9. A partir del gráfico mostrado, halle el valor de

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{S_1}{S_2}$$

donde

S_1 : área de la región triangular AOC

S_2 : área de la región triangular CDB



A) 1 B) 3 C) 2
D) 1/2 E) 3/2

10. Definida la función con regla de correspondencia $f(x) = e^{-x}\cos \pi x$; luego, el valor de $\lim_{n\to\infty}[f(1)+f(2)+f(3)+f(4)+...+f(n)]$ es

A) $\frac{2e}{e+1}$ B) $\frac{e-1}{2e}$ C) $\frac{e+1}{e-1}$

D) $e(e-1)$ E) $-\frac{1}{e+1}$

11. Definida la función f con regla de correspondencia

$$f(x) = \frac{\sqrt[3]{\operatorname{sen}^3 x + 2\operatorname{sen}^4 x}}{\ln(1+2\operatorname{sen} x)}$$

determine el valor al cual se aproxima la función f, cuando x se aproxima a 0.

A) $\frac{1}{4}$ B) $\frac{1}{2}$ C) 1

D) $\frac{3}{2}$ E) 2

12. Halle el valor de $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} f(x)$ tal que

$$f(x)=[\operatorname{Ln}(\operatorname{sen}3x)-\operatorname{Ln}(\operatorname{sen}x)](\cot 4x-\csc 4x)$$

A) 1 B) 4 C) e^2
D) −2 E) e

13. Calcule el valor del siguiente límite:

$$\lim_{x\to\pi} \csc x\left[\operatorname{Ln}\sqrt{\frac{1+\operatorname{sen}x}{1-\operatorname{sen}x}}\right]$$

A) 2 B) 2e C) $\frac{1}{4}$

D) 1 E) $\frac{1}{2}$

14. Calcule

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt[3]{\sec^2 x-1}+\sqrt{\tan x-1}-1}{\sqrt{\sec^2 x-2}}$$

A) $\sqrt{2}$ B) −1 C) $2\sqrt{2}$

D) $\frac{\sqrt{2}}{4}$ E) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

15. Evalúe el siguiente límite

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt[5]{\tan^5 x+\tan^4 x}-\sqrt[4]{\tan^4 x+\tan^3 x}}{\dfrac{1}{5\tan^4\frac{x}{2}}+\dfrac{1}{4\tan^5\frac{x}{2}}}$$

A) −1/2 B) −1/4 C) −1/9
D) −1/8 E) −1/27

16. Si se verifica que

$$\lim_{x\to 0}\frac{n\operatorname{sen}x+(n-1)\operatorname{sen}2x+(n-2)\operatorname{sen}3x+...+\operatorname{sen}nx}{x(\cos x+\cos 2x+\cos 3x+...\cos nx)}$$

es igual a 57.
Halle el valor de n si es entero.

A) 12 B) 13 C) 14
D) 17 E) 19

17. Determine el equivalente de la siguiente serie:

$$M=1-\operatorname{sen}^2\frac{x}{2}-\cos^2\frac{x}{2}\operatorname{sen}^2\frac{x}{4}-\cos^2\frac{x}{2}x\cos^2\frac{x}{4}\operatorname{sen}^2\frac{x}{8}-....$$

A) $\left(\frac{\operatorname{sen}x}{x}\right)^2$ B) $\left(\frac{\cos x}{x}\right)^2$ C) $\left(\frac{\tan x}{x}\right)^2$
D) $(x\operatorname{sen}x)^2$ E) $(x\cos x)^2$

18. Definida la función f con regla de correspondencia

$$f(x)=\frac{n\operatorname{sen}x-x\operatorname{sen}n}{n\cos x-x\cos n}\Big/ n\in\mathbb{R}-\{0\}$$

Halle el valor al que se aproxima f cuando x se aproxima a n.

A) $\frac{n\cos n-\operatorname{sen}n}{\operatorname{sen}n+n\cos n}$ B) $\frac{n\operatorname{sen}n-\cos n}{n\cos n-\operatorname{sen}n}$

C) $\frac{\operatorname{sen}n-n\cos n}{\cos n+n\operatorname{sen}n}$

D) $\frac{\operatorname{sen}n+n\cos n}{\cos n-n\operatorname{sen}n}$ E) $\frac{\operatorname{sen}n-n\cos n}{n\operatorname{sen}n-\cos n}$

19. Si $a_1=a$ y $a_2=b$, $a_{n+2}=\frac{(a_{n+1}+a_n)}{2}$, $n\geq 0$.

Calcule $\lim_{n\to+\infty}(a_n)$.

A) $\frac{2a+b}{3}$ B) $\frac{a+b}{2}$ C) $\frac{2a+3b}{3}$

D) $\frac{a+3b}{3}$ E) $\frac{a+2b}{3}$

20. Calcule el valor de

$$\lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sqrt[3]{8+\cos^3\theta}-\sqrt{5-\operatorname{sen}^2\theta}}{1-\operatorname{sen}^2\theta}$$

A) $-\frac{1}{4}$ B) $\frac{1}{2}$ C) $-\frac{1}{8}$

D) $\frac{1}{4}$ E) $\frac{1}{16}$

21. Sea f una función definida con regla de correspondencia.

$f(x)=\sec[\![\sec x]\!]-2$

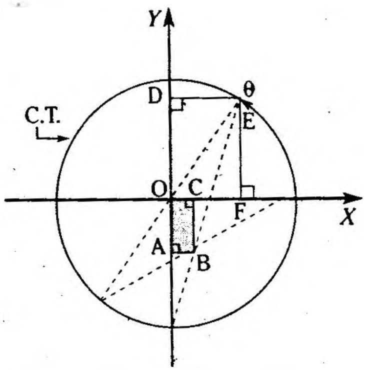
halle $\lim_{x\to\frac{\pi}{3}} f(x)$

A) 1 B) 0 C) −2
D) 2 E) −1

22. A partir del gráfico mostrado calcule

$\lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}}\frac{S_1}{S_2}$ siendo

S_1: área de la región cuadrangular OABC.
S_2: área de la región cuadrangular ODEF.



A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{1}{2}$ C) 1

D) $\frac{1}{4}$ E) 0

23. Halle el valor de

$$\lim_{x\to 1}\frac{1+\operatorname{sen}3\pi x+\cos\pi x}{x^4-1}$$

A) $\frac{3\pi}{2}$ B) $\frac{\pi}{4}$ C) $\frac{\pi}{2}$

D) $-\frac{3\pi}{4}$ E) $\frac{\pi}{4}$

24. Calcule

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{\tan^4 x-6-\sqrt{\sec^2 x+5}}{\sec x-2}$$

A) 4 B) $\frac{10}{3}$ C) $\frac{70}{3}$

D) $\frac{34}{3}$ E) $\frac{8}{3}$

25. Definida la función f con regla de correspondencia

$$f(x)=\frac{\sqrt[3]{8+\cos x}}{\cos x}-2\sec x$$

Si x se aproxima a $\frac{\pi}{2}$, luego f se aproxima a

A) $\frac{1}{12}$ B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{1}{4}$

D) 2 E) $\frac{1}{6}$

26. Siendo

$$L=\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{m\operatorname{sen}^3 x+n\operatorname{sen}^2 x+\operatorname{sen}x+3}{5-4(\operatorname{sen}x+\cos^2 x)}$$

además, $L\in\mathbb{R}$ calcule el valor de 2L–m–n.

A) 4 B) 7 C) –9
D) 5 E) –14

27. Evalúe el siguiente límite

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\operatorname{sen}^{2^n}x}{\cos^2 x}$$

A) 2^{n+1} B) 2^n C) 2^{2n}
D) 2^{n+2} E) 2^{n-1}

28. Siendo $n;p\in\mathbb{Z}^+$, halle el valor del siguiente límite

$$\lim_{x\to 0}\frac{n\cos^{n+1}x-(n+1)\cos^n x+1}{\cos^{p-1}x-\cos^p x+1-\cos x}$$

A) $\frac{n(n+1)}{p}$ B) $\frac{n(n-1)}{p}$ C) $\frac{n(n+1)}{2p}$

D) $\frac{n(2n-1)}{p}$ E) $\frac{n(2n+1)}{2p}$

29. Calcule el valor de

$$\lim_{x\to 0}\csc x\arctan\left(\frac{\tan x(\sec^2 x-2)+\cot x}{\tan^2 x\operatorname{sen}^2 x+\cot^2 x\cos^2 x}\right)$$

A) $\frac{1}{2}$ B) 2 C) 1

D) $-\frac{1}{2}$ E) –1

30. Definida la función con regla de correspondencia

$$f(x)=\frac{1}{x}\operatorname{sen}\left(\operatorname{arccsc}\sqrt{\cos x+1}-\operatorname{arcsec}\sqrt{\cos x+1}\right)$$

Halle el valor al cual se aproxima la función cuando x se aproxima a cero.

A) –1 B) 1 C) 0

D) –2 E) $\frac{1}{4}$

31. Halle el verdadero valor de

$$\lim_{x\to\pi}\frac{\operatorname{sen}\frac{x}{2}+\cos x}{\operatorname{sen}^2 x+\cos x+1}$$

A) 1/4 B) 1/2 C) 2
D) 0 E) 1

32. Halle $\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)^n$

siendo $\alpha=a+bi$

A) $e^a(\cos b+i\operatorname{sen} b)$
B) $\cos b+i\operatorname{sen} b$
C) $\cos b-i\operatorname{sen} b$
D) $\cos a+i\operatorname{sen} a$
E) $e^b(\cos a+i\operatorname{sen} a)$

33. Halle el equivalente de

$$E=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\times\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2}\times.....$$

A) 2π B) π C) $\pi/2$
D) $1/\pi$ E) $2/\pi$

34. Evalúe el siguiente límite

$$L=\lim_{\theta\to 0}\arctan\left(\frac{\operatorname{sen}\theta-\cos\theta+1}{\cos\theta+\operatorname{sen}\theta-1}\right)$$

A) $\frac{\pi}{4}$ B) $\frac{\pi}{2}$ C) $\frac{\pi}{3}$
D) π E) $\frac{\pi}{6}$

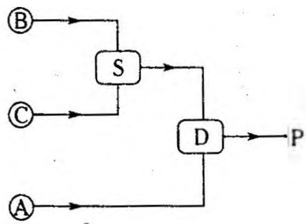
35. Evalúe

$$L=\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{f(x)-f\left(\frac{\pi}{3}\right)}{x-\frac{\pi}{3}}$$

siendo $f(x)=\operatorname{sen}2x\cos x$

A) $\frac{1}{2}$ B) $-\frac{3}{2}$ C) $-\frac{5}{4}$
D) $-\frac{3}{4}$ E) -1

36. En un laboratorio de análisis de señales, se disponen de los generadores A; B y C que respectivamente y de manera simultánea empiezan a emitir señales de la forma $\operatorname{sen}^2 3t$; $\cos^2 2t$; $\cos^2 t$; siendo t el parámetro tiempo. En el gráfico dado, se pide determinar el valor al que tiende la señal de salida en el punto P cuando t tiende a $n\pi$; $n\in\mathbb{Z}$.



siendo

S : operador que suma las señales

D : operador que divide las señales realizando $\frac{n}{m}$ (m arriba, n abajo)

A) 1 B) 2 C) 3
D) –3 E) –2

37. Obtenga el valor del siguiente límite

$$E=\lim_{n\to\infty}\frac{\cos 2A}{\cos^2 A}\times\frac{\cos A}{\cos^2\frac{A}{2}}\times\frac{\cos\frac{A}{2}}{\cos^2\frac{A}{4}}.....\frac{\cos\frac{A}{2^{n-1}}}{\cos^2\frac{A}{2^n}}$$

cuando

$$A=\frac{\pi}{8}$$

A) 1 B) 2 C) $\frac{\pi}{3}$
D) $\frac{\pi}{2}$ E) $\frac{\pi}{5}$

38. Halle el valor que toma M cuando x se aproxima a cero.

$$M=\left(\cot x+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2^{i}}\tan\left(\frac{x}{2i}\right)\right)x$$

A) $\frac{1}{2}$ B) 2 C) $\frac{1}{2^{n}}$

D) 2n E) 1

39. $\overrightarrow{OA_1}$ y $\overrightarrow{OB}$ son los vectores que representan a 1 e i, respectivamente. Desde O se ha levantado una perpendicular a OA_2 y A_1B; desde A_2 se ha trazado una perpendicular A_2A_3 a OA_1; desde A_3 se ha trazado una perpendicular A_3A_1 a A_1A_2, etc, según la regla: desde A_n se ha trazado una perpendicular A_nA_{n+1} a $A_{n-2}A_{n-1}$. Halle el límite de la suma

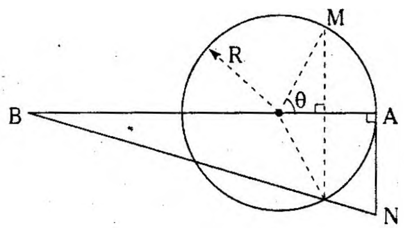
$\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{A_1A_2}+\overrightarrow{A_2A_3}+....$

A) 1+i B) 3+i C) 3–i

D) $\frac{3+i}{2}$ E) $\frac{3+i}{5}$

40. En el gráfico mostrado, $\ell_{\overset{\frown}{AM}}=AN$, calcule

$\lim\limits_{\theta\to 0}\overline{AB}$

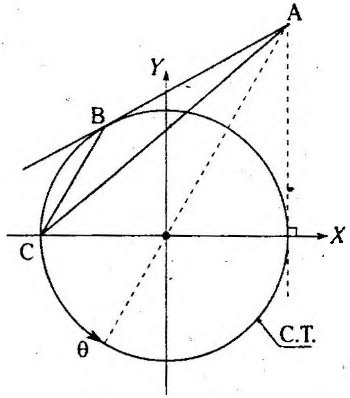


A) R B) $\frac{3R}{2}$ C) 3R

D) $\frac{5R}{2}$ E) 5R

41. Determine

$$\lim_{\theta\to\frac{3\pi}{2}}\left(\frac{2S}{\theta-\frac{3\pi}{2}}\right)$$, siendo S el área de la región triangular ABC, si además B es punto de tangencia



A) –2 B) 2 C) –3

D) 3 E) –6

42. Sea $y=x^2$

Halle el valor de $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{dy}{d(\cos x)}$

A) 2 B) 4 C) $-\frac{1}{2}$

D) $\frac{1}{4}$ E) –2

43. Un punto se mueve sobre la curva $3x^2-y^2=12$ de manera que su coordenada y crece a razón constante de 6 m/s. ¿A qué razón cambia la coordenada x cuando $x=4$ m? ¿Cuál es la pendiente de la curva cuando $x=4$ m?

A) ±3m s ;±2 B) ±2m/s ; ±3

C) ±4m/s ; 3

D) ±2m/s ; ±4 E) ±3m s ; ±3

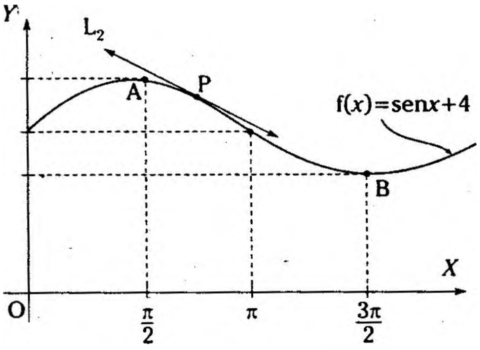
44. Dos barcos A y B se alejan en línea recta del punto 0 siguiendo rutas, tales que el ángulo AOB es 120°. ¿Con qué rapidez varía la distancia entre ellos? si, en cierto instante, OA=8 km, OB=6 km, el barco A avanza a razón de 20 km/h y el barco B a 30 km/h

A) $\frac{200}{\sqrt{37}}$ km/h B) $\frac{220}{\sqrt{37}}$ km/h

C) $\frac{250}{\sqrt{37}}$ km/h

D) $\frac{280}{\sqrt{37}}$ km/h E) $\frac{260}{\sqrt{37}}$ km/h

45. De la figura, calcule las coordenadas de P si $L_1//L_2$. (P punto de tangencia), además L_1 pasa por A y B.



A) $\left(\pi-\operatorname{arcsen}\pi^{-1}\,;\,\operatorname{sen}\left(\arccos\pi^{-1}\right)+4\right)$

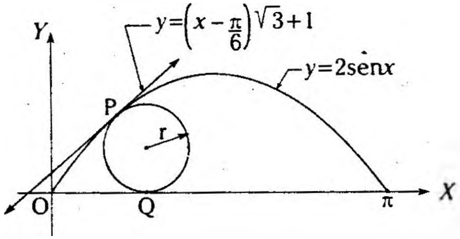
B) $\left(\pi-\arccos 2\pi^{-1}\,;\,\operatorname{sen}\left(\arccos 2\pi^{-1}\right)+4\right)$

C) $\left(\pi-\arccos\pi^{-1}\,;\,\operatorname{sen}\left(\arccos\pi^{-1}\right)+4\right)$

D) $\left(\frac{3\pi}{4}\,;\,\frac{\sqrt{2}}{2}+4\right)$

E) $\left(\frac{5\pi}{6}\,;\,\frac{9}{2}\right)$

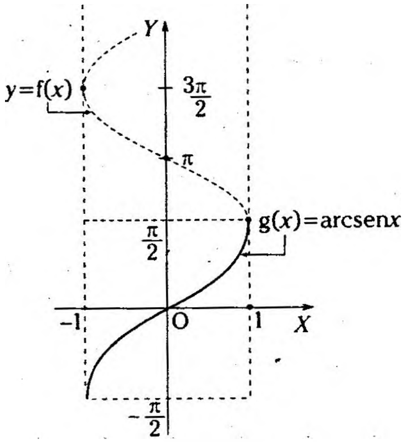
46. En la figura, la recta L es tangente a la curva $y=2\operatorname{sen}x$; y a la circunferencia de radio **r** en el punto P (Q también es punto de tangencia) Determine r.



A) 2/3 B) 2/5 C) 1/3

D) 1 E) $\pi/4$

47. En la figura, se tiene la gráfica de la función f, halle $\frac{df}{dx}$



A) $-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ B) $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

C) $-\cos x$

D) $\operatorname{sen} x$ E) $\sqrt{1-x^2}$

48. Halle los intervalos de decrecimiento de la función f si

$f(x) = \text{sen}^3 x + \cos^3 x$

Analizando en el intervalo $[0\ ;\ 3\pi/2]$

A) $\langle 0\ ;\ \pi/2\rangle \cup \langle \pi\ ;\ 3\pi/2\rangle$

B) $\langle 0\ ;\ \pi/4\rangle \cup \langle \pi/2\ ;\ \pi\rangle \cup \langle 5\pi/4\ ;\ 3\pi/2\rangle$

C) $\langle \pi/2 ; \pi\rangle \cup \langle 5\pi/4\ ;\ 3\pi/2\rangle$

D) $\langle 0;\pi\rangle$

E) $\langle \pi/4 ; \pi/2\rangle \cup \langle \pi\ ; 5\pi/4\rangle$

49. Halle la ecuación de la recta tangente a la curva definida por

$f(x) = \text{arc}\cos 2x$, en un punto $P\left(\frac{1}{4};\frac{\pi}{3}\right)$

A) $2\sqrt{3} + 3y + \sqrt{3} + \pi = 0$

B) $2\sqrt{3} - 3y + \sqrt{3}\pi + 1 = 0$

C) $2\sqrt{3} - 3y - \sqrt{3}\pi - 1 = 0$

D) $4\sqrt{3}x + 3y - \pi - \sqrt{3} = 0$

E) $4\sqrt{3}x - 3y + \pi + \sqrt{3} = 0$

50. A partir de la función f definida por

$f(x) = |x| + \text{sen}\,x$

En el intervalo para x, $\left\langle -\frac{\pi}{2}\ ;\ \frac{\pi}{2}\right\rangle$ el posible(s) puntos(s) de inflexión será(n)

A) $\{0\}$ B) $\left\{-\frac{\pi}{12};\frac{\pi}{12}\right\}$

C) $\left\{-\frac{\pi}{3};0;\frac{\pi}{3}\right\}$

D) $\left\{0;\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{3}\right\}$ E) $\left\{-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right\}$

51. Determine el área mínima de la región limitada por la semicircunferencia de diámetro $\overline{AB} = 2R$ y la poligonal ABCD si $\overline{AD} = \overline{BC}$ (C y D en la semicircunferencia)

A) $\frac{R^2}{4}\left(\sqrt{3}+\pi\right)$ B) $\frac{R^2}{4}\left(2\pi-\sqrt{3}\right)$

C) $\frac{R^2}{2}\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)$

D) $\frac{R^2}{8}\left(2\sqrt{3}-\pi\right)$ E) $\frac{R^2}{6}\left(2\sqrt{3}-\pi\right)$

52. Dada la función

$f(x) = \cos 2x - 2\cos x$

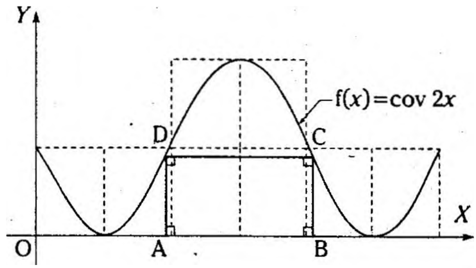
obtenga los valores de x que hacen máxima a la función $(k \in \mathbb{Z})$

A) $\frac{k\pi}{2}$ B) $(2k+1)\frac{\pi}{2}$

C) $2\pi k + \pi$

D) $(4k+3)\frac{\pi}{2}$ E) $4k\pi \pm \frac{\pi}{4}$

53. A partir del gráfico mostrado, obtenga el área del rectángulo ABCD, el cual tiene perímetro máximo.



A) πu^2 B) $\frac{4\pi}{3}u^2$

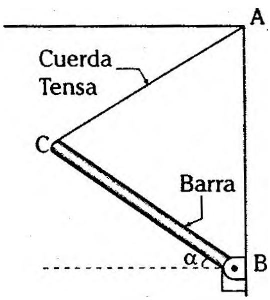
C) $\frac{\pi}{2}u^2$

D) $\frac{4\pi}{3}u^2$ E) $\frac{5\pi}{2}u^2$

54. En la figura mostrada, se verifica que

$\overline{BC}=\tan\frac{\pi}{6}\operatorname{sen}\alpha+\cos\alpha,\ \ \overline{AB}=\overline{BC}$.

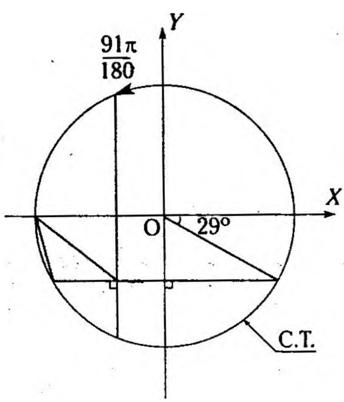
Halle la longitud del segmento AC cuando el segmento BC sea máximo.



A) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ B) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ C) $\frac{1}{2}$

D) 2 E) $\frac{2}{3}$

55. Halle aproximadamente el área de la región sombreada.



A) 0,15 B) 0,23 C) 0,31
D) 0,46 E) 0,51

56. Halle la segunda derivada de la función f, si

$$f(x)=x\operatorname{sen}\left(\operatorname{Ln}x-\frac{\pi}{4}\right)$$

A) $\frac{\sqrt{2}\operatorname{sen}(\operatorname{Ln}x)}{x}$ B) $\frac{\sqrt{2}\cos(\operatorname{Ln}x)}{x}$

C) $\sqrt{2}\operatorname{sen}(\operatorname{Ln}x)$

D) $\sqrt{2}\cos(\operatorname{Ln}x)$ E) $\frac{\sqrt{2}}{x}$

57. Halle

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\pi-2\arctan x}{e^{3x}-1}\right)$$

A) $\frac{3}{2}$ B) $\frac{2}{3}$ C) $\frac{4}{3}$

D) $\frac{3}{4}$ E) $\frac{5}{3}$

58. Al cortar un sector circular de radio R, este sector debe ser tal que, al enrollarlo, se obtenga un embudo de capacidad máxima. Halle el ángulo central del sector.

A) $\pi\sqrt{\frac{2}{3}}$ B) $2\pi\sqrt{\frac{2}{3}}$ C) $3\pi\sqrt{\frac{2}{3}}$

D) $4\pi\sqrt{\frac{2}{3}}$ E) $\frac{2\pi}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}$

59. Sea f la función real, definida por la regla de correspondencia

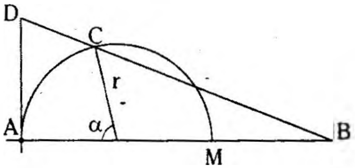
$$f(x)=\operatorname{sen}x\left(2-\operatorname{sen}^3x\right)+\tan\left(\frac{17\pi}{4}\right)\cos^4x,$$

determine el mínimo valor de la función

A) –4 B) –3 C) –2

D) $\frac{-3}{2}$ E) $\frac{3}{2}$

60. Sea AD una tangente a la semicircunferencia y $\overline{AD} = \widehat{AC}$. La prolongación de DC corta a la prolongación AM en B. ¿A qué límites se acerca la longitud AB para arcos pequeños, esto es, para $\alpha \to 0$?



A) $\frac{5}{2}r$ B) 3r C) $\frac{7}{2}r$

D) 4r E) $\frac{10}{3}r$

61. Sea

$$f(x) = \left(\frac{2+\cos^2 x}{1+x^4}\right)^{(1+\text{sen}^2 x)}$$

$$g(x) = (1+\text{sen}^2 x)\left(-\frac{2\text{sen}\,2x}{5+\cos 2x} - \frac{4x^3}{1+x^4}\right) + \text{sen}\,2x\,\text{Ln}\left(\frac{2+\cos^2 x}{1+x^4}\right)$$

Al reducir la expresión

$\frac{f'(x)}{g(x)}$, se obtendrá:

A) $f(x)$ B) $2f(x)$ C) $f(x)-2$
D) $f(x)+2$ E) $f(x)+3$

62. Considere la función $y=f(x)$, dada implícitamente por la expresión
$\arctan(x+y) + y = \pi/4$
Calcule $f'(x)$ en el punto (1; 0)

A) −1/3 B) 1/3 C) 2/3
D) −2/3 E) −1

63. Demuestre que existen dos valores de k tales que $y=e^{kx}$ satisface la ecuación diferencial $y''+5y'+6y=0$. Determine tales valores k_1 y k_2.

A) −2 y −3 B) 2 y 3 C) 2 y −2
D) 2 y 4 E) 2 y 6

64. Determine los valores de a y b tales que la función $y=ax\text{sen}x + bx\cos x$ satisfaga la ecuación diferencial
$y'' + y = 3\text{sen}x+\cos x$

A) $a=\frac{1}{2}$; $b=-\frac{3}{2}$ B) $a=-\frac{1}{2}$; $b=-\frac{3}{2}$

C) $a=\frac{1}{2}$; $b=\frac{3}{2}$

D) $a=\frac{1}{2}$; b=3 E) $a=\frac{1}{2}$; b=2

65. Dada la función $y=f(x)$, dada implícitamente por la expresión $xy\cos\frac{y}{x}=1$

Reduzca

$$E(x) = \left(x\cos\frac{y}{x} + y\,\text{sen}\frac{y}{x}\right)y + \left(x\cos\frac{y}{x} - y\,\text{sen}\frac{y}{x}\right)xy'$$

A) 1 B) x C) y
D) 0 E) xy

66. Para $n \in \mathbb{Z}$ calcule.

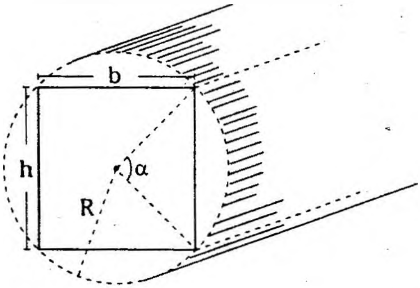
$$\frac{d^{(n)}}{dx}(\text{sen}x)$$

A) $\text{sen}\left(x+n\frac{\pi}{2}\right)$ B) $\text{sen}(x+n\pi)$

C) $\cos\left(x+n\frac{\pi}{2}\right)$

D) $\cos(x-n\pi)$ E) $\text{sen}\left(x-n\frac{\pi}{2}\right)$

67. A partir de un tronco de radio R, se puede hacer una viga, si la resistencia de la viga depende directamente del ancho (b) de la sección transversal y del cuadrado de la longitud de la altura (h), halle el ángulo de modo que la resistencia de la viga sea máxima.



A) arc sec (–3) B) arc sen $\left(\frac{1}{3}\right)$

C) arc tan $\left(\sqrt{2}\right)$

D) arc cos $\left(\frac{1}{3}\right)$ E) arc cot $\left(\sqrt{2}\right)$

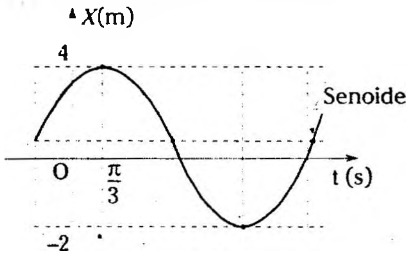
68. La sombra de un edificio de 50 metros sobre el suelo es de 100 m de longitud. Si el ángulo que forma la luz solar con el suelo disminuye a razón de 15° por hora, ¿a que razón aproximadamente aumenta la longitud de la sombra?

A) 62,5 m/min B) 69,5 m/min

C) 63,5 m/min

D) 64,5 m/min E) 71,5 m/min

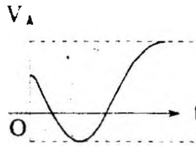
69. El desplazamiento de una partícula se puede describir mediante la gráfica x vs t



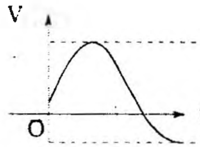
Si para t=0 la posición de la partícula es $x=\frac{5}{2}$m.

Indique la gráfica que describe la velocidad de la partícula.

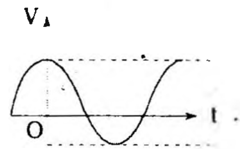
A)



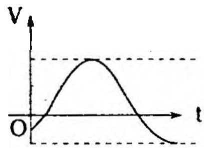
B)



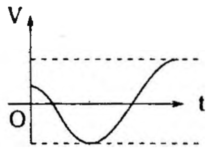
C)



D)



E)



70. Dos barcos A y B se alejan en línea recta partiendo de un punto 0, A en dirección N40°E y B en dirección S 20°E. ¿Cuál es la rapidez con la que varía la distancia entre A y B si en cierto instante OA=8km, OB=6km el barco A avanza a razón de 20 km/h y B a 30km/h?

A) $\frac{140\sqrt{7}}{7}$ km/h B) $\frac{120\sqrt{2}}{13}$ km/h

C) $\frac{136\sqrt{5}}{5}$ km/h

D) $\frac{260\sqrt{7}}{7}$ km/h E) $\frac{260\sqrt{37}}{37}$ km/h

1	E
2	B
3	C
4	E
5	E
6	D
7	A
8	A
9	C
10	E
11	B
12	D
13	D
14	E
15	C
16	D
17	A
18	C
19	E
20	A
21	B
22	E
23	D
24	C
25	A
26	B
27	E
28	C
29	C
30	C
31	A
32	A
33	E
34	A
35	C

Claves

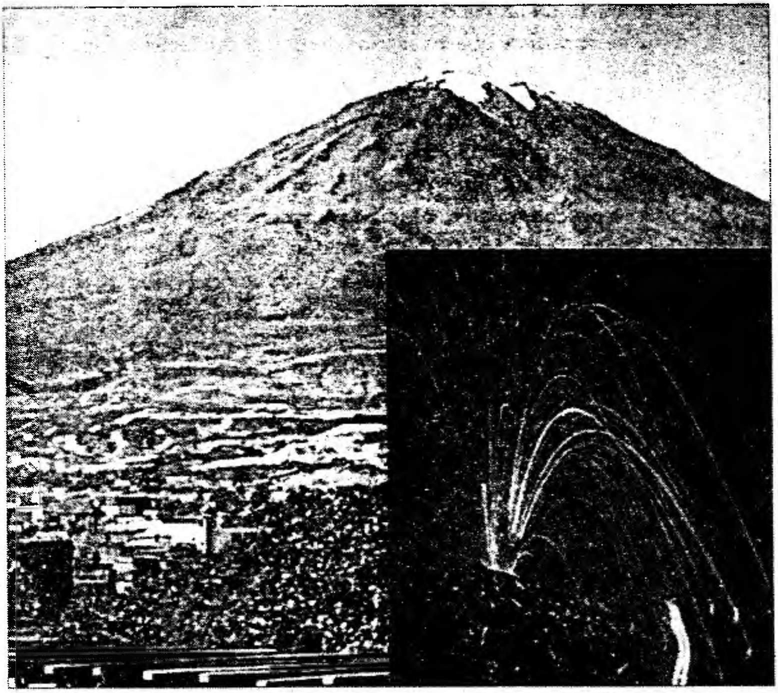
36	D	48	B	59	B
37	D	49	D	60	B
38	E	50	A	61	A
39	E	51	B	62	A
40	C	52	C	63	A
41	A	53	C	64	A
42	E	54	B	65	D
43	A	55	B	66	A
44	E	56	B	67	A
45	B	57	B	68	A
46	A	58	B	69	C
47	A			70	E

CAPÍTULO

XI

Traslación y rotación de ejes

TRIGONOMETRÍA



Parábola y fenómeno físico

La trayectoria que un cuerpo realiza en la atmósfera es una parábola. Ejemplo de ello es una erupción volcánica: a la noche, las partículas de lava ígnea lanzadas por el cráter van dejando tras sí estrías parabólicas. Reportes históricos sobre el volcán el Misti en Arequipa (Perú) dan cuenta de er[illegible]ciones ocurridas entre 1292-1412, 1440-1470.

LECTURA

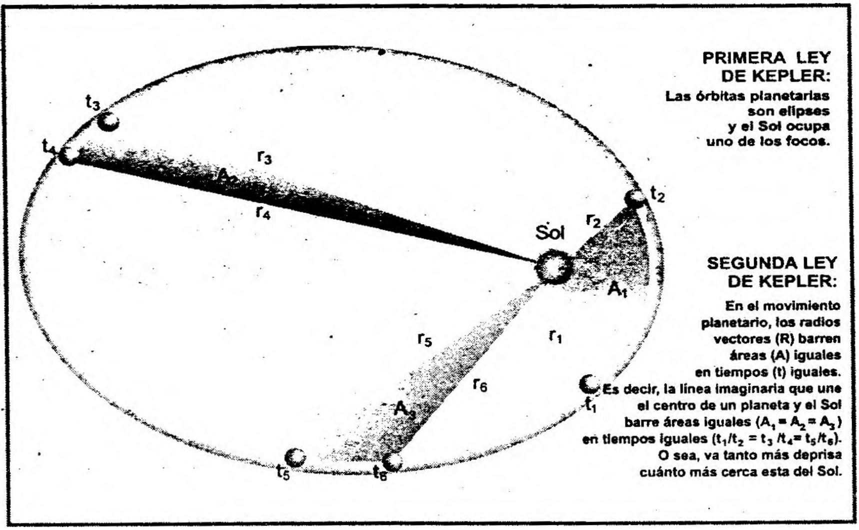
LAS SECCIONES CÓNICAS

A ciencia cierta no se sabe lo que originó a las secciones cónicas o lo que motivó su estudio y descubrimiento. Por lo general se piensa que fueron resultados del estudio de problemas de construcción; además, sobre su descubrimiento se distinguen dos teorías:

I. Según el geógrafo y astrónomo Alejandro Eratóstenes, el primero en descubrir las secciones cónicas fue Menecno, un geómetra y astrónomo de la academia de Platón, quien las utilizó para resolver el problema conocido en aquel entonces como "La duplicación de un cubo", que era la construcción de un cubo cuyo volumen es el doble de volumen de un cubo dado.

II. Otra teoría sugiere que las secciones cónicas pudieron haberse originado como resultado del trabajo sobre relojes de sol.

Más adelante, con el advenimiento de la geometría analítica y del cálculo, las secciones cónicas ganaron gran importancia en las ciencias físicas, por ejemplo Johane Kepler quien en 1609 publicó un libro conocido como ***Astronomía nova***, en el cual presentó su culminante descubrimiento de que la trayectoria de cada planeta alrededor del Sol tenía forma elíptica. También Galileo y Newton demostraron que los objetos sujetos a fuerzas gravitacionales podían moverse en trayectorias que son parábolas o hipérbolas. Actualmente, las propiedades de las secciones cónicas se usan en la construcción de telescopios, antenas de radar y sistemas de navegación y determinación de órbitas de satélites.



Los estudios de Kepler sobre la trayectoria de los planetas fueron esenciales para el desarrollo de la astronomía.

Traslación y rotación de ejes

OBJETIVOS

- Identificar a qué gráfica pertenece toda ecuación de segundo grado.
- Deducir las ecuaciones utilizadas para una traslación o rotación de ejes.
- Conocer algunas de las aplicaciones que tienen las secciones cónicas tanto en la vida cotidiana como en la ingeniería.

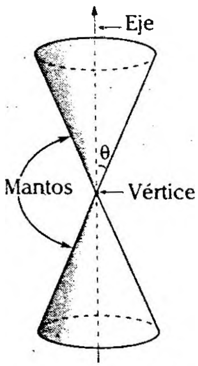
INTRODUCCIÓN

Cuando se introdujo el concepto de sistema coordenado, se buscaba indicar la posición de un móvil respecto a un sistema de referencia. Sin embargo, para un mismo móvil se puede referir su ubicación dependiendo del punto de referencia que se considere, si nos preguntamos ¿qué ocurre si el móvil se desplaza? Obviamente, dicho desplazamiento describirá una curva, la cual si se puede expresar matemáticamente, dicha expresión matemática que resulta ser una ecuación estará también referida respecto al sistema de referencia que consideremos.

Si logramos describir el comportamiento de un móvil, se podrá analizar de manera detallada cualquier cambio en su desplazamiento, velocidad, aceleración, etc; para ello buscamos el sistema más adecuado que nos permita analizar dicho comportamiento. ¿Qué ocurre si una ecuación matemática que expresa el comportamiento de un móvil no es fácil de analizar? Probablemente, si lo referimos a otro sistema, dicha ecuación nos resulta más simple y por tanto exprese el comportamiento del mismo móvil de manera más sencilla. Por lo tanto, es necesario conocer las formas de obtener la ecuación de punto cuando el sistema de referencia ha sido trasladado, rotado o probablemente ambos a la vez; para ello lo invitamos a leer el presente capítulo que aclarará determinados conceptos referidos a la relatividad de posición, velocidad y de tiempo, conceptos que fueron introducidos por Newton.

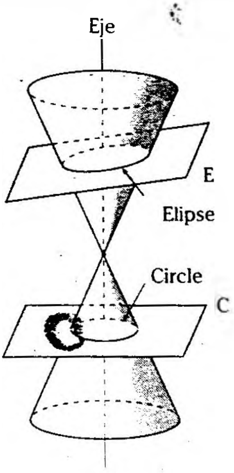
DETERMINACIÓN GRÁFICA DE LAS SECCIONES CÓNICAS

La figura 11.1(a) se llama doble cono circular recto o simplemente cono. Se genera por una recta que se hace girar alrededor de un eje fijo, de modo que la recta pase siempre por un punto fijo denominado vértice y haga el mismo ángulo con el eje; las curvas cónicas pueden obtenerse al intersectar un cono con un plano (se les suele llamar cónicas o secciones cónicas)



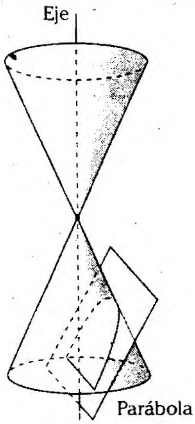
(a)

Las cónicas más importantes son las elipses, parábolas e hipérbolas, una muestra gráfica se da a continuación (vea la figura 11.1(b)).



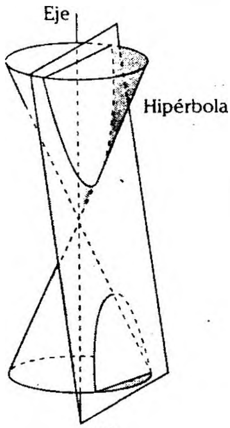
(b)

Obtenemos la parábola cuando interceptamos un plano inclinado con uno de los mantos del cono.



(c)

Obtenemos la hipérbola cuando se intercepta un plano inclinado con los mantos del cono.



(d)

Figura 11.1

Nota

Cuando el plano de corte se elige de modo que pase por el vértice, es posible obtener en la intersección un punto o un par de rectas (a estas curvas cónicas se les denomina secciones cónicas degeneradas).

SECCIONES CÓNICAS

Definición de Parábola

Una parábola es el conjunto de puntos en el plano, tales que equidistan de un punto fijo F (llamado foco) y recta fija $\mathcal{L}$ (llamada directriz).

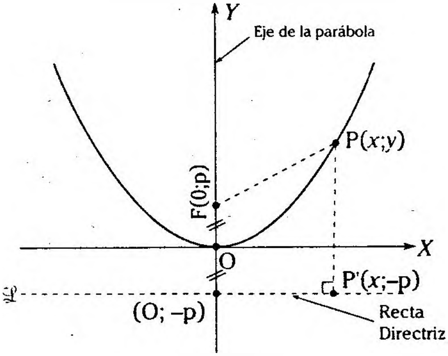


Figura 11.2

Para obtener una ecuación sencilla de una parábola asumimos que el eje Y sea el eje de la parábola con vértice en el origen (véase figura 11.2)
Para un número real $p \neq 0$, entonces el punto P(x;y) equidista de F(O; p) y de P'(x;–p), es decir

$$\sqrt{(x-0)^2+(y-p)^2}=\sqrt{(x-x)^2+(y+p)^2}$$

Simplificando la expresión

$$y=\frac{1}{4p}x^2 \quad \left(\text{es la ecuación de la parábola vertical con vértice en el origen}\right)$$

Análogamente

$$x=\frac{1}{4p}y^2 \quad \left(\text{es la ecuación de la parábola horizontal con vértice en el origen}\right)$$

Ejemplo 1
Halle la ecuación de la parábola con vértice en el origen y foco en (2;0)

Resolución
Como se tiene el foco F(2;0), entonces el eje de la parábola es horizontal.

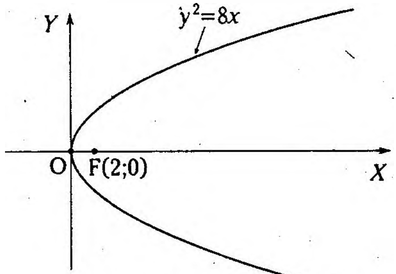


Figura 11.3

Así tenemos $x=\frac{1}{4p}y^2$

Como p=2, $\therefore\ x=\frac{y^2}{8}$ ó $y^2=8x$ (figura 11.3)

Ejemplo 2
Calcule el vértice, el foco y la directriz de la parábola $x^2+6y=0$

Resolución
De la ecuación dada $y=-\frac{x^2}{6}$

Llevando a la forma normal $y=\frac{x^2}{4\left(-\frac{3}{2}\right)}$

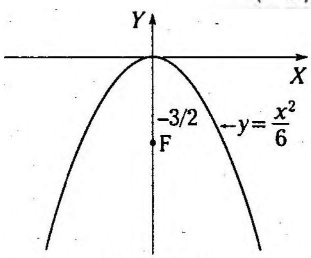


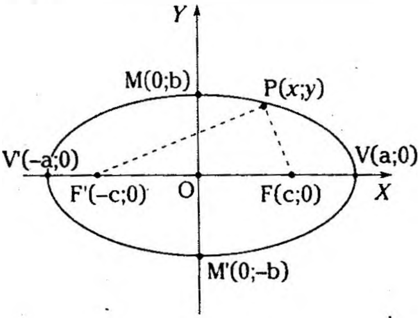
Figura 11.4

Entonces se trata de una parábola con eje vertical de vértice en O(0;0) para P$=-\frac{3}{2}$ (la parábola se abre hacia abajo; véase figura 11.4); entonces el foco es $F\left(0;-\frac{3}{2}\right)$ y directriz $y=\frac{3}{2}$

Definición de Elipse

Una elipse es el conjunto de puntos en el plano tales que la suma de sus distançias a dos puntos fijos, llamados focos, también en el plano, es igual a una constante.

Para obtener una ecuación sencilla de una elipse, consideramos al eje X como la recta que pasa por los focos F y F', y el centro en el origen (véase figura 11.5(a)) si c>0, entonces FF' =2c.



(a)

La suma constante de las distancias de P a F y a F' será 2a para a>c entonces P(x;y) está en la elipse si FP+PF'=2a; es decir

$$\sqrt{(x-c)^2+(y-0)^2}+\sqrt{(x+c)^2+(y-0)^2}=2a$$

Simplificando

$$x^2(a^2-c^2)+a^2y^2=a^2(a^2-c^2)$$

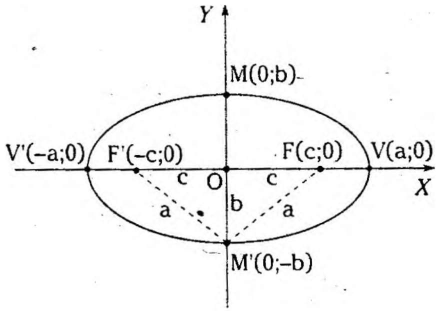
En el ⊾FOM' (ver figura 11.5(b))

$$a^2=b^2+c^2 \Rightarrow b^2=a^2-c^2$$

Reemplazando obtenemos

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1}$$

Es la ecuación canónica de una elipse con centro en (0;0) con eje mayor sobre el eje X, donde a>b (véase gráfico 11.5(b))



(b)
Figura 11.5

Los vértices son (–a;0) y (a;0)
Los puntos extremos del eje menor son (0;b) y (0;–b)
Los focos están en (–c;0) y (c;0) donde $c^2=a^2-b^2$

Ejemplo 1
Halle la ecuación para una elipse con centro en O(0;0), foco (2;0) y vértice (3;0)

Resolución
Como es evidente si un foco es F(2;0) el otro es F'(–2;0) ya que el centro es el origen, luego c=2:

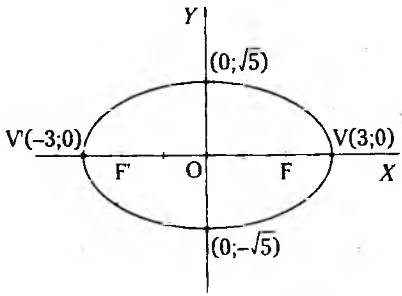


Figura 11.6

Además con el vértice V(3;0), tenemos V'(–3;0) entonces a=3

Pero $b^2=a^2-c^2 \Rightarrow b^2=3^2-2^2 \Rightarrow b^2=5$

$$\therefore \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1 \text{ (figura 11.6)}$$

Ejemplo 2

Dada la ecuación $x^2+\frac{y^2}{4}=1$, calcule el centro, los focos y los vértices.

Resolución

De la ecuación identificamos

$a^2=1$; $b^2=4$

entonces el eje mayor es vertical y

$a^2=b^2-c^2$

$\Rightarrow c=\sqrt{3}$

$\therefore$ $O(0;0)$, $F(0;\sqrt{3})$, $F'(0;-\sqrt{3})$ y

$V(0;2)$, $V'(0;-2)$

(vea la figura 11.7)

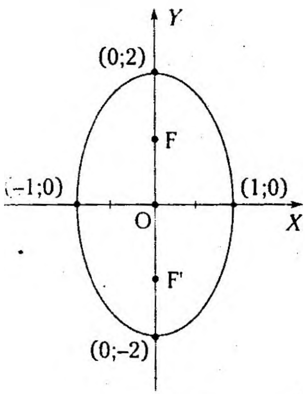
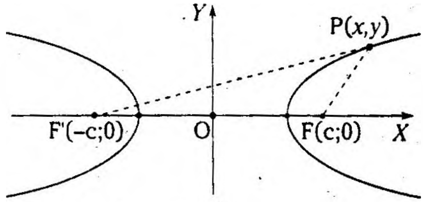


Figura 11.7

Definición de Hipérbola

Una hipérbola es el conjunto de todos los puntos en un plano, tales que la diferencia de distancias a dos puntos fijos llamados focos, también en el plano, es una constante.

Para obtener una ecuación sencilla de una hipérbola, consideramos al eje X como la recta que pasa por los focos F y F' y el punto medio de FF' es el origen o centro de la hipérbola (véase figura 11.8(a)).



(a)

Si $c>0$, entonces $FF'=2c$. La diferencia constante de P a F' y F será 2a.

Si $P(x;y)$ está en la hipérbola se cumple

$|d(P;F')-d(P;F)|=2a$, es decir

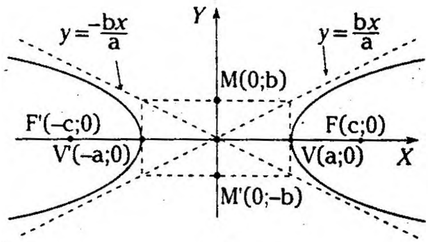
$$\left|\sqrt{(x-c)^2+(y-0)^2}-\sqrt{(x+c)^2+(y-0)^2}\right|=2a$$

Simplificando $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{c^2-a^2}=1$

Hacemos $b^2=c^2-a^2$; $b>0$

Entonces $\boxed{\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1}$

Es la ecuación canónica de una hipérbola con centro en (0;0) con eje mayor en el eje X. Los vértices son (–a;0) y (a;0), (véase la figura 11.8(b))



(b)

Figura 11.8

Los puntos extremos del eje conjugado son (0;b) y (0;–b) los focos están en (–c;0) y (c;0), donde $c^2=a^2+b^2$, las rectas $y=\frac{b}{a}x$, $y=\frac{-b}{a}x$ son asíntotas de la hipérbola.

Ejemplo
Halle la ecuación de una hipérbola, tal que el centro está en (0;0), un vértice en (2;0) y un foco en (4;0)

Resolución
Como se tiene un vértice en (2;0) y origen en (0;0) es evidente que el otro vértice es (–2;0), entonces el eje mayor coincide con el eje X; además a=2, como un foco es (4;0) el otro será (–4;0) entonces c=4, luego $b^2=c^2-a^2$

$$\Rightarrow b^2=4^2-2^2 \Rightarrow b^2=12$$

$$\therefore \frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{12}=1 \quad \text{(figura 11.9)}$$

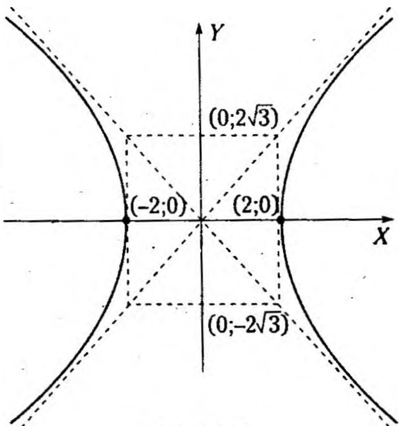


Figura 11.9

Ecuación General de una Sección Cónica

Puesto que una sección cónica está contenida en un plano, a dicha curva se le asociará una determinada ecuación de dos variables x e y respecto del sistema X Y, la mencionada ecuación tiene como forma general:

$$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$$

(ecuación de segundo grado)

donde A, B, C, D, E, F, son constantes reales.

Pero la forma que más se utiliza por su facilidad para ser analizada es cuando el término Bxy no está presente, y se obtiene una ecuación de la forma

$$Ax^2+Cy^2+Dx+Ey+F=0$$

Para esta ecuación sus ejes principales (eje focal, eje mayor, eje menor) serán paralelos a los ejes XY.

Antes de explicar en qué consiste la traslación y rotación de ejes debemos recordar que una posición referencial es la ubicación o lugar desde el cual se van a considerar eventos, características, situaciones gráficas, etc., de algunos elementos. Para nuestro caso en la traslación y rotación de ejes, algunos puntos geométricos del plano XY los expresamos de una forma en dicho plano, pero de otra diferente manera para otro plano distinto del XY, aunque los mencionados puntos siempre estén estáticos.

Ejemplo
En la figura 11.10

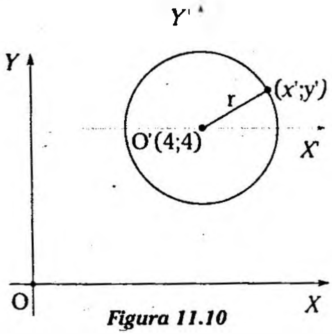


Figura 11.10

I. La circunferencia (su ecuación) puede escribirse en el sistema XY como $(x-4)^2+(y-4)^2=r^2$

II. La misma circunferencia para el sistema $X'Y'$ tendrá como ecuación $(x')^2+(y')^2=r^2$

Las dos maneras son correctas respecto a su sistema de coordenada, también se nota que la circunferencia siempre está ahí, y lo único que ha cambiado es su forma de representarla como ecuación.

TRASLACIÓN DE EJES

Se da cuando el origen de coordenadas se traslada a un determinado punto del plano XY manteniendo sus respectivos ejes homólogos paralelos (en el nuevo sistema $X'Y'$, X' es homólogo de X e Y' de Y), también deben mantener la misma unidad de escala, esto es, si en el sistema XY la distancia entre dos puntos A y B es 10 entonces en el sistema $X'Y'$ sigue siendo 10.

Gráficamente

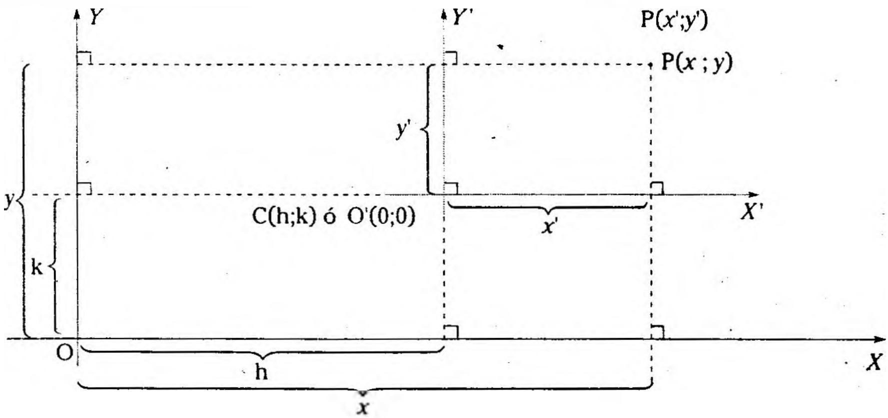


Figura 11.11

C(h; k) : origen del nuevo sistema $X'Y'$.

Además, estará usted observando que el punto P tiene dos formas de poder expresarlo:

- En el sistema XY : P(x; y)
- En el sistema $X'Y'$: P'(x'; y')

Luego, de la figura 11.11 obtenemos

$$\begin{cases} x = x' + h \\ y = y' + k \end{cases} \quad \dots (1)$$

Estas relaciones mostradas sirven para encontrar las coordenadas en el sistema XY (x;y) cuando nos dan como dato las coordenadas (x';y') de un punto cuando los ejes se han trasladado a un nuevo origen O'(h; k).

El caso recíproco ocurre cuando a partir de la ecuacíón (1) se despeja x' e y', así se obtiene

$$\begin{cases} x' = x - h \\ y' = y - k \end{cases} \quad \dots (2)$$

Nota

A las ecuaciones (1) y (2) se les llama *Ecuación de traslación*.

Ejemplo 1

Halle las coordenadas del punto P(3;5) en el nuevo sistema $X'Y'$ cuando el origen se ha trasladado al punto (1;2)

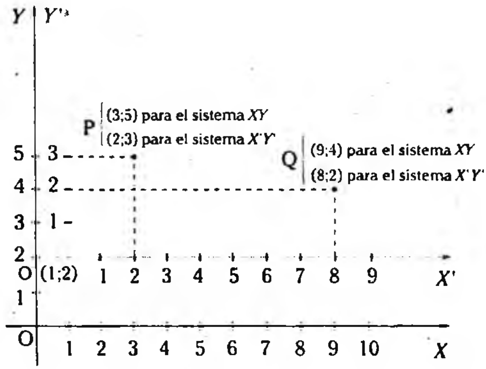


Figura 11.12

De los datos P(x,y)=(3;5) y O'(h;K)=(1;2)

Aplicando la fórmula 2

$$x' = x - h = 3 - 1 \Rightarrow x' = 2$$

$$y' = y - K = 5 - 2 \Rightarrow y' = 3$$

$\therefore (x';y') = (2;3)$

(coordenadas de P en el sistema $X'Y'$)

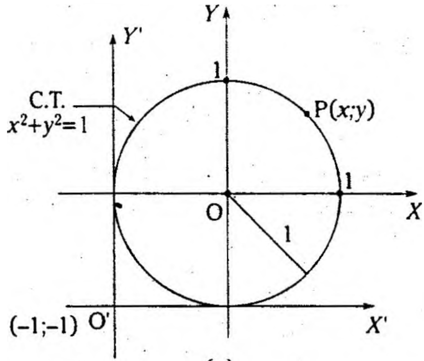
De la misma forma usted puede verificar para las coordenadas del punto Q.

Ejemplo 2

Halle la ecuación de la C.T. $(x^2+y^2=1)$ en un nuevo sistema $X'Y'$, cuyo origen esta en el punto (−1; −1).

Resolución

Dado el enunciado, como el radio de la circunferencia trigonométrica es uno y la distancia del origen a los ejes X e Y es uno también, entonces podemos plantear el siguiente gráfico (vea la figura 11.13(a))



(a)

Se observa que un punto P(x;y) del sistema XY se puede escribir como

$$x = x' + h$$
$$y = y' + k$$

donde O'(h;k) es el nuevo origen, luego

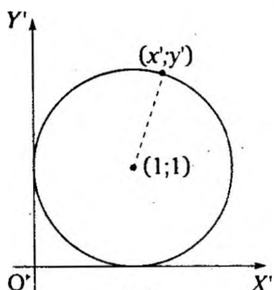
$$\left.\begin{matrix} x = x' - 1 \\ y = y' - 1 \end{matrix}\right\} \ldots (\alpha)$$

∴ La ecuación de la circunferencia en el sistema $X'Y'$ deberá estar en términos de x' e y', por lo que reemplazamos (α) en la ecuación

$$x^2 + y^2 = 1$$

$$\Rightarrow (x'-1)^2 + (y'-1)^2 = 1$$

Esta ecuación es para el sistema $X'Y'$ (véase la figura 11.13(b))



(b)

Figura 11.13

Ejemplo 3

Realice la gráfica $y = 2\operatorname{sen}\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + 1$; por el método de traslación de ejes.

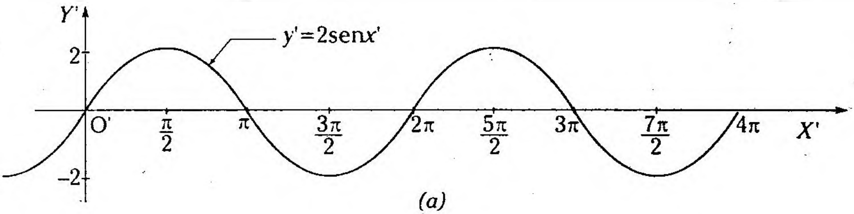
Resolución

Dada la ecuación original $y = 2\operatorname{sen}\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + 1$, acomodamos esta expresión $y - 1 = 2\operatorname{sen}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$.

Debido a que $y - 1$ puede ser cambiado por y' (nuevo sistema) y

$x - \frac{\pi}{2}$ puede ser cambiado por x' (nuevo sistema)

Entonces queda $y' = 2\operatorname{sen}x'$ (La gráfica de esta ecuación para un sistema $X'Y'$ es bastante sencilla y la mostramos a continuación.)

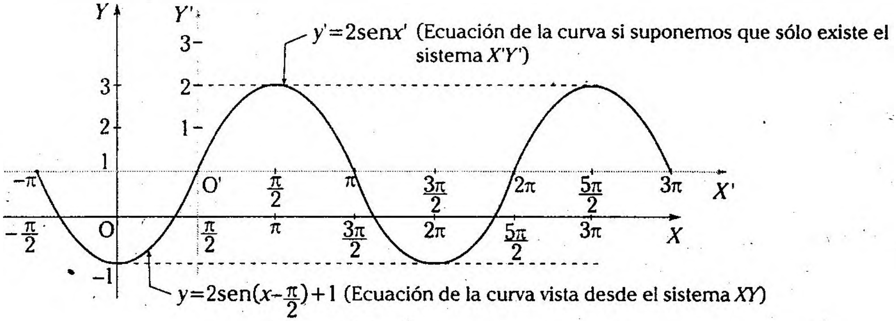


(a)

Y la pregunta que se hará el lector es ¿dónde está el sistema XY? A continuación le informamos que debido a las ecuaciones deducidas en (2)

$x' = x - h$, $y' = y - k$ en nuestro caso son $\begin{cases} x' = x - \frac{\pi}{2} \\ y' = y - 1 \end{cases}$

De donde O'(0;0) en el sistema $X'Y'$ tendrá el siguiente par ordenado $O'\left(\frac{\pi}{2};1\right)$ respecto del sistema XY como se muestra en la figura 11.14(b).



(b)

Figura 11.14

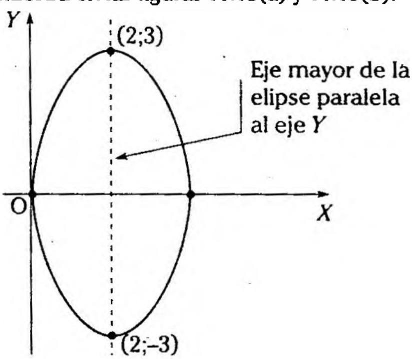
Nota

Del ejemplo anterior, notamos que la curva es la misma y, sin embargo, se escribe de diferente forma, esto se debe a que toda curva puede ser escrita de acuerdo al sistema de referencia que se considere, es decir, una misma curva puede tener varias ecuaciones, una para cada uno de los sistemas que se consideren.

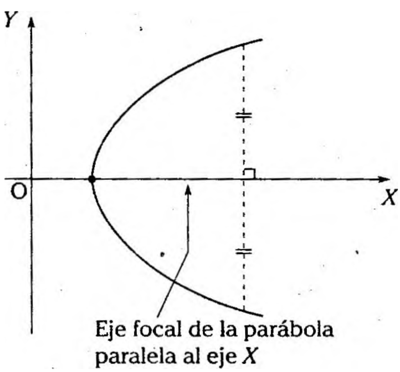
ROTACIÓN DE EJES

Dado que la ubicación de un punto en un plano puede ser representado de varias formas (distintos pares ordenados) de acuerdo al sistema de referencia que se utilice, dicho sistema puede ser obtenido mediante una traslación o rotación de ejes. En la presente sección haremos más énfasis en lo último.

Como se sabe, las secciones cónicas presentan muchas aplicaciones, pero mayormente cuando se requiere analizarlas están escritas en su forma canónica (más sencillo de analizar), esto es cuando los ejes de la sección cónica son paralelos a los ejes del sistema de referencia, como por ejemplo lo que se muestra en las figuras 11.15(a) y 11.15(b).

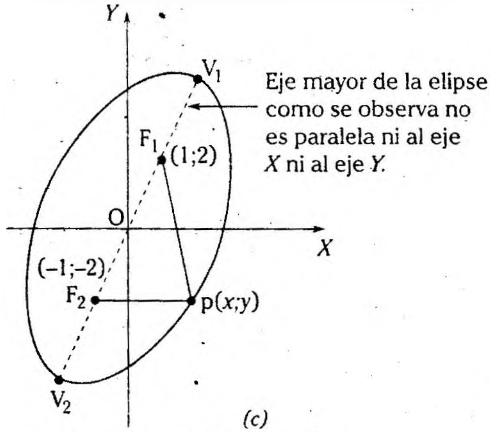


(a)



(b)

Pero hay ocasiones en las cuales dichos ejes no son paralelos a los ejes X o Y, como es el caso de



(c)

Figura 11.15

Algo más que podemos acotar sobre la forma de la ecuación de dicha elipse, la cual la obtenemos a partir del punto $P(x;y)$ que pertenece a la elipse, teniendo como dato adicional que la distancia $\overline{V_1V_2}=6$

Para que sea una elipse debe cumplir que

$$d\overline{PF_1}+d\overline{PF_2}=\overline{V_1V_2}$$

$$\Rightarrow \sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}+\sqrt{(x+1)^2+(y+2)^2}=6$$

Elevando al cuadrado dos veces obtenemos la siguiente ecuación

$$8x^2-4xy+5y^2=36$$

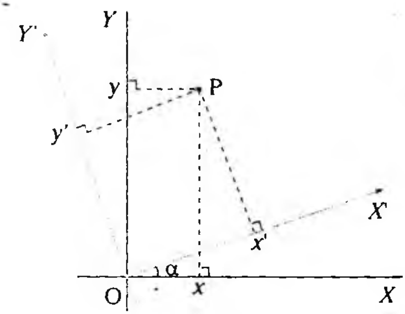
La cual presenta el término cruzado $-4xy$ que indicará en adelante que los ejes de dicha sección cónica no son paralelos a los ejes del sistema XY.

Una pregunta inmediata por parte del lector sería *¿por qué no rotamos los ejes del sistema de tal forma que coincidan con los ejes de la sección cónica*? Esta apreciación es correcta, pero observe que no se puede rotar cualquier ángulo; para que lo mencionado suceda, para hallar dicho ángulo de rotación es necesario tener en cuenta ciertas nociones previas.

A continuación se verá la forma de relacionar un punto P(x;y) con su forma de expresarlo en otro sistema $X'Y'$ donde este último con respecto al sistema XY ha rotado un ángulo antihorario tal como α, el cual se considerará en el siguiente intervalo $0<\alpha<90°$.

Una explicación acerca de este intervalo se hará más adelante.

Gráficamente

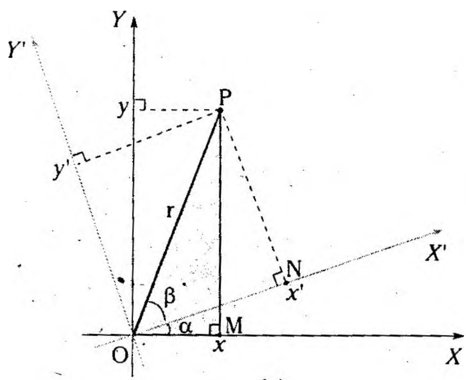


(a)

Al punto P se hace coincidente dos pares ordenados

P(x y) : respecto del sistema XY y

P(x';y') : respecto del sistema $X'Y'$



(b)

A continuación deduciremos las ecuaciones que relacionan x, y, x', y' y α.

⊾OMP

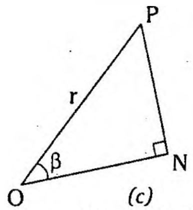
$$\overline{OM}=r\cos(\alpha+\beta)$$

$$\overline{PM}=r\,\text{sen}(\alpha+\beta)$$

Pero $\overline{OM}=x$; $\overline{PM}=y$

Luego $\left.\begin{array}{l} x=r\cos(\alpha+\beta) \\ y=r\,\text{sen}(\alpha+\beta) \end{array}\right\}\ldots\text{(I)}$

En el triángulo OPN aplicaremos



(c)

Figura 11.16

$$\overline{ON}=r\cos\beta \ ; \ \overline{PN}=r\,\text{sen}\beta$$

Pero, $\overline{ON}=x'$; $\overline{PN}=y'$

Luego, $\left.\begin{array}{l} x'=r\cos\beta \\ y'=r\,\text{sen}\beta \end{array}\right\}\ldots\text{(II)}$

De las relaciones (I) y (II) tenemos

De (I)

$$x=r\cos(\alpha+\beta)$$

$$\Rightarrow\ x=r[\cos\alpha\cos\beta-\text{sen}\beta\,\text{sen}\alpha]$$

$$\Rightarrow\ x=\underbrace{r\cos\beta}_{x'}\cos\alpha-\underbrace{r\,\text{sen}\beta}_{y'}\text{sen}\alpha$$

$$\therefore\ x=\ x'\cos\alpha\ -\ y'\text{sen}\alpha \quad \ldots\text{(III)}$$

También de (I)

$$y=r\,\text{sen}(\alpha+\beta)$$

$$\Rightarrow\ y=r[\text{sen}\alpha\cos\beta+\text{sen}\beta\cos\alpha]$$

$$\Rightarrow\ y=r\,\text{sen}\alpha\cos\beta+r\,\text{sen}\beta\cos\alpha$$

Ordenando

$$y=\underbrace{r\cos\beta}_{x'}\text{sen}\alpha+\underbrace{r\,\text{sen}\beta}_{y'}\cos\alpha$$

$$\therefore\ y=x'\text{sen}\alpha\ +\ y'\cos\alpha \quad \ldots\text{(IV)}$$

De las igualdades (III) y (IV) se concluye

$$\boxed{\begin{aligned} x &= x'\cos\alpha - y'\operatorname{sen}\alpha \\ y &= x'\operatorname{sen}\alpha + y'\cos\alpha \end{aligned}} \quad \text{... (V)}$$

donde

$(x'; y')$: par ordenado del punto P en el sistema $X'Y'$

$(x; y)$: par ordenado del punto P en el sistema XY

α : ángulo de rotación del sistema XY para obtener el sistema $X'Y'$

Nota

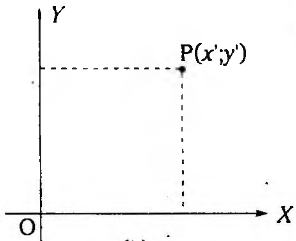
A las ecuaciones de la relación (V) se les llama *Ecuaciones de rotación*.

A continuación mostramos un ejemplo de aplicación.

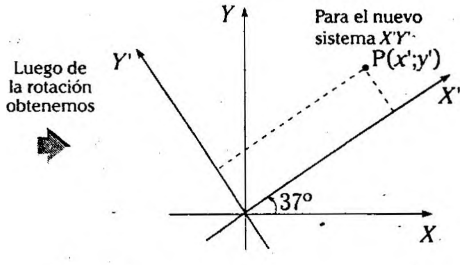
Ejemplo

Calcule las coordenadas del punto P(x;y) en el sistema XY, si en el nuevo sistema $X'Y'$ que se genera cuando lo ejes de XY giran un ángulo de 37°, sus coordenadas son P(25; 5).

Gráficamente



(a)



(b)

Dato: P(25;5)= P $(x'y')$; en el sistema $X'Y'$, de donde $x' = 25$; $y' = 5$

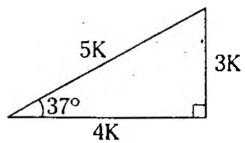
Ángulo de rotación: $\alpha = 37°$; entonces

$$x = x'\cos\alpha - y'\operatorname{sen}\alpha$$
$$y = x'\operatorname{sen}\alpha + y'\cos\alpha$$

Luego de las ecuaciones de rotación obtenemos

$$x = 25\cos 37° - 5\operatorname{sen} 37°$$

Para calcular el valor de x utilizaremos



(c)

Figura 11.17

$$x = 25\left(\frac{4}{5}\right) - 5\left(\frac{3}{5}\right) = 20 - 3 = 17$$

$$\Rightarrow \quad x = 17$$

También

$$y = 25\operatorname{sen} 37° + 5\cos 37°$$

$$y = 25\left(\frac{3}{5}\right) + 5\left(\frac{4}{5}\right) = 15 + 4 = 19$$

$$\Rightarrow \ y = 19$$

Por lo que podemos afirmar que el punto P en el sistema XY tendrá las siguientes coordenadas: P(17;19).

Pero se puede presentar el caso contrario, es decir, se puede pedir las nuevas coordenadas teniendo como datos el ángulo de rotación y las coordenadas en el sistema XY. Para resolver este tipo de ejemplos se sugiere despejar x' e y' de las ecuaciones de rotación, de las que se obtiene el siguiente par de ecuaciones, que también se conocen con el nombre de **fórmulas de rotación inversa**.

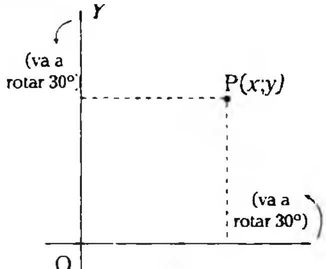
$$\boxed{\begin{aligned} x' &= x\cos\alpha + y\operatorname{sen}\alpha \\ y' &= -x\operatorname{sen}\alpha + y\cos\alpha \end{aligned}}$$

Para entender un poco más, mostramos el siguiente ejemplo de aplicación.

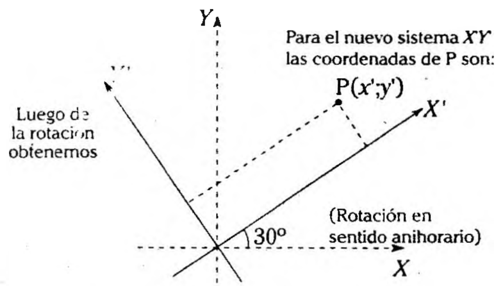
Ejemplo 1

Determine las nuevas coordenadas del punto P en el nuevo sistema $X'Y'$, el cual se obtiene a partir del sistema XY, cuando los ejes han rotado un ángulo de 30° en sentido antihorario; si además las coordenadas de P en el sistema XY son $(4;2\sqrt{3})$.

Gráficamente



(a)



(b)

Figura 11.18

A partir del gráfico observamos

$P(x; y)$ en el sistema XY, pero $P(4;2\sqrt{3})$ son sus coordenadas en este sistema.

De donde $x=4$, $y=2\sqrt{3}$, pero otro lado P en el nuevo sistema $X'Y'$; $P(x';y')$ son sus nuevas coordenadas y α el de rotación $\alpha=30°$

De las ecuaciones de rotación inversa

$$\begin{cases} x' = x\cos\alpha + y\,\text{sen}\,\alpha \\ y' = -x\,\text{sen}\,\alpha + y\cos\alpha \end{cases}$$

Si reemplazamos nuestros datos en dichas ecuaciones obtenemos lo siguiente

$$x' = 4\cos 30° + 2\sqrt{3}\,\text{sen}\,30°$$

$$x' = 4\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 2\sqrt{3}\left(\frac{1}{2}\right) \Rightarrow x' = 3\sqrt{3}$$

También

$$y' = -4\,\text{sen}\,30° + 2\sqrt{3}\cos 30°$$

$$y' = -4\left(\frac{1}{2}\right) + 2\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \Rightarrow y' = 1$$

Por lo que podemos afirmar que el punto P en el nuevo sistema $X'Y'$ obtenido, luego de una rotación de 30 °en sentido antihorario, tendrá las siguientes coordenadas $P=(3\sqrt{3};1)$

Ejemplo 2

Suponga usted que los ejes coordenados XY han rotado un ángulo de 45° en sentido antihorario para obtener un sistema de coordenadas $X'Y'$. Halle la ecuación en este último sistema si su ecuación en el sistema XY es $x^2 - xy + y^2 - 6 = 0$

Resolución

De las ecuaciones de rotación se tiene

$$x = x'\cos\alpha - y'\,\text{sen}\,\alpha \quad \ldots (1)$$

$$y = x'\,\text{sen}\,\alpha + y'\cos\alpha$$

Puesto que α es el ángulo de rotación del problema $\alpha = 45°$

De (1) $\quad x = x'\cos 45° - y'\,\text{sen}\,45°$

$\quad y = x'\,\text{sen}\,45° + y'\cos 45°$

Reemplazando $\quad \text{sen}\,45° = \frac{1}{\sqrt{2}}$; $\cos 45° = \frac{1}{\sqrt{2}}$

obtenemos

$$\left.\begin{aligned} x = x'\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - y'\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) &\Rightarrow x = \frac{x'-y'}{\sqrt{2}} \\ y = x'\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + y'\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) &\Rightarrow y = \frac{x'+y'}{\sqrt{2}} \end{aligned}\right| \quad (2)$$

Reemplazando (2) en la ecuación

$$x^2-xy+y^2-6=0$$

se obtiene

$$\left(\frac{x'-y'}{\sqrt{2}}\right)^2-\left(\frac{x'-y'}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{x'+y'}{\sqrt{2}}\right)+\left(\frac{x'+y'}{\sqrt{2}}\right)^2-6=0$$

Seguidamente efectuaremos los binomios al cuadrado así como la diferencia de cuadrados.

$$\frac{x'^2-2x'y'+y'^2}{2}-\frac{(x'^2-y'^2)}{2}+\frac{x'^2+2x'y'+y'^2}{2}-6=0$$

$$\frac{x'^2-2x'y'+y'^2-x'^2+y'^2+x'^2+2x'y'+y'^2-12}{2}=0$$

$$\Rightarrow\ x'^2+3y'^2=12$$

De donde la nueva ecuación será

$$\frac{(x')^2}{12}+\frac{(y')^2}{4}=1$$

Esta ecuación representa a una elipse, la cual se presenta a continuación

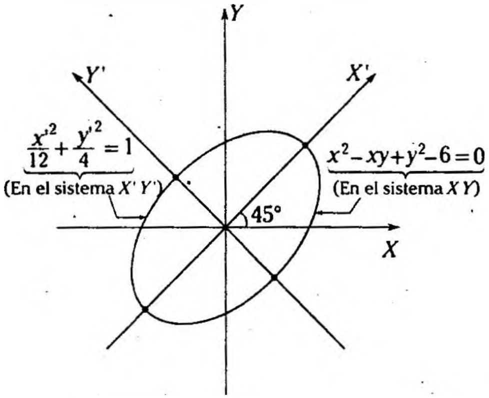


Figura 11.19

Observe que la curva es la misma para ambos sistemas, lo que solo cambia es la forma de la ecuación.

Eliminación del Término xy

Dada la ecuación general completa de una sección cónica

$$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0\ \ldots(1)$$

Es tal que $B\neq 0$, en este caso si consideramos un sistema $X'Y'$ el cual se obtendrá por una rotación de ejes, entonces lo que se buscará es expresar la ecuación (1) en el nuevo sistema $X'Y'$, ello mediante las ecuaciones de rotación:

$$x=x'\cos\theta-y'\operatorname{sen}\theta\quad\ldots(2)$$

$$y=x'\operatorname{sen}\theta+y'\cos\theta\quad\ldots(3)$$

Reemplazando (2) y (3) en (1) se obtiene

$$A(x'\cos\theta-y'\operatorname{sen}\theta)^2$$
$$+B(x'\cos\theta-y'\operatorname{sen}\theta)(x'\operatorname{sen}\theta+y'\cos\theta)$$
$$+C(x'\operatorname{sen}\theta+y'\cos\theta)^2$$
$$+D(x'\cos\theta-y'\operatorname{sen}\theta)$$
$$+E(x'\operatorname{sen}\theta+y'\cos\theta)+F=0$$

Efectuando obtenemos

$$A(x'^2\cos^2\theta-y'^2\operatorname{sen}^2\theta-2x'y'\operatorname{sen}\theta\cos\theta)$$
$$+B(x'^2\operatorname{sen}\theta\cos\theta+x'y'\cos^2\theta-x'y'\operatorname{sen}^2\theta-y'^2\operatorname{sen}\theta\cos\theta)$$
$$+C(x'^2\operatorname{sen}^2\theta+y'^2\cos^2\theta+2x'y'\operatorname{sen}\theta\cos\theta)$$
$$+D(x'\cos\theta-y'\operatorname{sen}\theta)$$
$$+E(x'\operatorname{sen}\theta+y'\cos\theta)+F=0$$

A continuación se agrupará respecto de $x'^2, y'^2, x'y', x', y'$ se tiene

$$\Rightarrow(A\cos^2\theta+B\operatorname{sen}\theta\cos\theta+C\operatorname{sen}^2\theta)x'^2+$$
$$(-2A\operatorname{sen}\theta\cos\theta+B(\cos^2\theta-\operatorname{sen}^2\theta)+2C\operatorname{sen}\theta\cos\theta)x'y'$$
$$+(A\operatorname{sen}^2\theta-B\operatorname{sen}\theta\cos\theta+C\cos^2\theta)y'^2$$
$$+(D\cos\theta+E\operatorname{sen}\theta)x'+(-D\operatorname{sen}\theta+E\cos\theta)y'+F=0$$

Si usted observa detenidamente la última ecuación notará que tiene la forma (o es equivalente) de

$$A'x'^2+B'x'y'+C'y'^2+D'x'+E'y'+F'=0$$

y si identificamos cada coeficiente correspondiente para $x'^2, x'y', y'^2, x', y'$, se obtiene

$$\left.\begin{aligned}
A' &= A\cos^2\theta+B\operatorname{sen}\theta\cos\theta+C\operatorname{sen}^2\theta\\
B' &= B(\cos^2\theta-\operatorname{sen}^2\theta)+2(C-A)\operatorname{sen}\theta\cos\theta\\
C' &= A\operatorname{sen}^2\theta-B\operatorname{sen}\theta\cos\theta+C\cos^2\theta\\
D' &= D\cos\theta+E\operatorname{sen}\theta\\
E' &= -D\operatorname{sen}\theta+E\cos\theta\\
F' &= F
\end{aligned}\right| \quad (5)$$

Si nosotros quisiéramos eliminar el término $x'y'$ debería verificarse que $B'=0$, por lo que podemos plantear

$$B'=B\underbrace{(\cos^2\theta-\operatorname{sen}^2\theta)}_{\cos 2\theta}+(C-A)\underbrace{2\operatorname{sen}\theta\cos\theta}_{\operatorname{sen}2\theta}=0$$

De donde

$$B'=B\cos 2\theta+(C-A)\operatorname{sen}2\theta=0$$

Finalmente

$$\boxed{\cot 2\theta=\frac{A-C}{B}} \quad \ldots (6)$$

Nota

Puesto que esta última ecuación (donde A; B y C son constantes) puede ser positiva, negativa o incluso cero, siempre será posible satisfacerla con un ángulo θ que verifique ($0<\theta<90°$), razón por la cual se le utilizará en la rotación de ejes, ello sin negar que se puede rotar un ángulo mayor de 90° e incluso ángulos negativos, para estos casos se trabajará de manera análoga.

Ejemplo

Elimine el término *XY* y encuentre la ecuación luego del giro de los ejes

$$3x^2-2\sqrt{3}xy+y^2+2x+2\sqrt{3}y=0 \quad .....(\alpha)$$

Resolución

Dada la ecuación de segundo grado, así como la ecuación general

$$3x^2-2\sqrt{3}xy+y^2+2x+2\sqrt{3}y=0$$

$$Ax^2-Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$$

Identificando A, B y C obtenemos

$$A=3\ ;\ B=-2\sqrt{3}\ ;\ C=1$$

Calculemos el ángulo de rotación con

$$\cot 2\theta=\frac{A-C}{B}=\frac{3-1}{-2\sqrt{3}}=\frac{-\sqrt{3}}{3}$$

$$\Rightarrow \theta=60°$$

Luego, en las fórmulas de rotación

$$x=x'\cos 60°-y'\operatorname{sen}60°=\frac{x'-y'\sqrt{3}}{2}$$

$$y=x'\operatorname{sen}60°+y'\cos 60°=\frac{x'\sqrt{3}+y'}{2}$$

Reemplazando en la ecuación α, tenemos $x'=-(y')^2$. Véase la figura 11.20

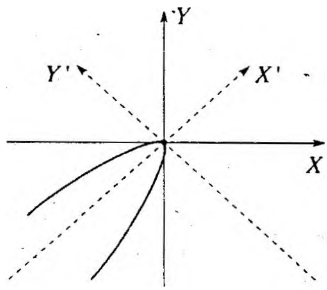


Figura 11.20

Uso del Discriminante

Teniendo en cuenta la ecuación de 2do. grado completa, esto es

$$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$$

Al término B^2-4AC se le llama discriminante de la ecuación cuadrática y como se puede verificar de las expresiones dadas en (5) (la dificultad sería solo algebraica) se cumple la relación

$$B'^2-4A'C'=B^2-4AC \qquad \ldots(7)$$

Ello significa que la relación entre los coeficientes A, B y C es invariante por una rotación, si θ se ha escogido de tal forma que verifique (6), entonces la ecuación

$$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$$

se transformaría en

$$A'x'^2+C'y'^2+D'x'+E'y'+F'=0$$

entonces $B'=0$

Cumpliéndose, además, la relación

$$-4A'C'=B^2-4AC$$

El uso del discriminante radica en que es posible identificar la gráfica de una ecuación de segundo grado sin rotar los ejes coordenados, a saber se presentan los siguientes casos:

I. Si $B^2-4AC<0$: La ecuación representa a una elipse, una circunferencia, un punto o bien no tiene gráfica.

II. Si $B^2-4AC=0$: La ecuación representa a una parábola, una recta, una pareja de rectas paralelas o bien no tiene gráfica.

III. Si $B^2-4AC>0$: La ecuación representa una hipérbola o una pareja de rectas que se interceptan.

A continuación sigamos con la demostración de uno de los casos (el primero); aquel en el cual se verifica $B^2-4AC<0$.

Demostración

De las ecuaciones de 5 y de la ecuación de segundo grado se demuestra

$$B^2-4AC=(B')^2-4\ A'C'$$

$$B'^2-4A'C'<0 \Rightarrow A'C'>0 \ \text{(porque } B'^2=0\text{)}$$

Al eliminar $BX'Y'$ se tiene

$$A'(x')^2+C'(y')^2+D'x'+E'y'+F'=0$$

Dividiendo por A'C' y ordenando, obtenemos

$$\frac{1}{C'}\left[(x')^2+\frac{D'}{A'}x'\right]+\frac{1}{A'}\left[(y')^2+\frac{E'}{C'}y'\right]=\frac{-F}{A'C'}$$

Luego de completar cuadrados, la ecuación anterior puede escribirse de la forma

$$\frac{1}{C'}(x'-h)^2+\frac{1}{A'}(y'-k)^2=K$$

Nota

$A'C'>0 \Rightarrow A'$ y C' (tienen el mismo signo)

Suponiendo $A'>0 \Rightarrow C'>0$

$$\Rightarrow \frac{(x'-h)^2}{(\sqrt{C'})^2}+\frac{(y'-k)^2}{\sqrt{(A')^2}}=K$$

De esta ecuación

I. Si $K<0$: Esta ecuación no tiene gráfica.

II. Si $K=0$: La ecuación sólo satisface para $x'=h$; $y'=k$, por lo que afirmamos que la gráfica solo es un punto $(h;k)$

III. Si $K>0$: Es una elipse o circunferencia, dependiendo de A' y C' si son diferentes o iguales respectivamente.

De igual forma los otros casos.

Ejemplo

Usando el discriminante, identifique la gráfica a la cual pertenece la siguiente ecuación de segundo grado.

$$8x^2-3xy+5y^2-7x+6=0$$

$$B^2-4AC=-151<0$$

$\therefore$ La ecuación representa una elipse, una circunferencia, un punto o bien no tiene gráfica.

Nota

En los casos en que una ecuación cuadrática representa un punto, una pareja de rectas paralelas, una pareja de rectas que se intersecan o no tiene gráfica; se dice que la ecuación representa una sección cónica degenerada.

Problemas Resueltos

Problema 1

Después de haber sido rotado el sistema XY un ángulo de 37°, se obtuvo los puntos $A'(-4;\,6)$, $B'(2;4)$ y un punto P' tal que $A'P=PB'$ en el sistema $X'Y'$. Halle las coordenadas de P' en el sistema XY.

Resolución

Primero hallaremos las coordenadas de P' en el sistema $X'Y'$, como P' es punto medio de

$$A'B' \Rightarrow P'\left(\frac{-4+2}{2};\frac{+6+4}{2}\right) \Rightarrow P'(-1;5)$$

Para hallar las coordenadas de P' en el sistema XY usaremos las fórmulas de rotación

$$x = x'\cos\alpha - y'\operatorname{sen}\alpha$$

$$y = x'\operatorname{sen}\alpha + y'\cos\alpha$$

$(x;y)$: las coordenadas de P en el sistema XY.

donde $(x';y')=(-1;5)$ y $\alpha=37°$

entonces $x=(-1)\dfrac{4}{5}-5\left(\dfrac{3}{5}\right)=\dfrac{-19}{5}$

$$y=(-1)\frac{3}{5}+5\left(\frac{4}{5}\right)=\frac{17}{5}$$

Luego, las coordenadas de P son $\left(\dfrac{-19}{5};\dfrac{17}{5}\right)$

Problema 2

Debido a una traslación de ejes de coordenadas al nuevo origen $O'(4;7)$ luego de rotar los ejes un ángulo $\alpha=\arctan\left(\dfrac{12}{5}\right)$, las coordenadas de un cierto punto R en el sistema XY se transforman en $(13;26)$. Halle las coordenadas del punto R en el sistema original.

Resolución

Del enunciado: nuevo origen $O'(4;7)$ del sistema $X'Y'$, en dicho sistema R tiene como coordenada$(13;26)$ y el ángulo de rotación es

$$\alpha=\arctan\left(\frac{12}{5}\right)$$

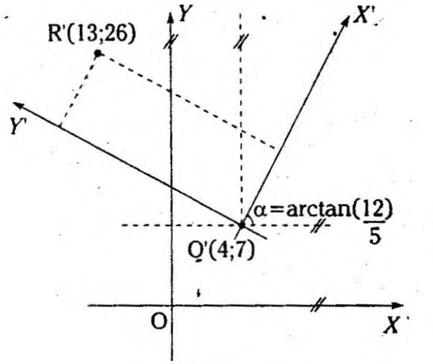


Figura 11.21

Las fórmulas para una rotación y traslación de ejes son

$$x = x'\cos\alpha - y'\operatorname{sen}\alpha + x_0 \quad ...\ (1)$$

$$y = x'\operatorname{sen}\alpha + y'\cos\alpha + y_0 \ ...\ (2)$$

Donde $(x_0;y_0)$ son las coordenadas del nuevo origen, entonces $(x_0;y_0)=(4;7)$ ...(3)

$(x';y')$: las coordenadas de R en el nuevo sistema

$(x';y')=(13;\,26)$ ...(4)

$(x;y)$: las coordenadas de R en el sistema XY.

Si

$$\alpha=\arctan\left(\frac{12}{5}\right) \Rightarrow \operatorname{sen}\alpha=\frac{12}{13} \wedge \cos\alpha=\frac{5}{13} \ ...(5)$$

reemplazando (3) y (5) en las ecuaciones (1) y (2) obtenemos

$$x = 13\left(\frac{5}{13}\right)-26\left(\frac{12}{13}\right)+4$$

$$y = 13\left(\frac{12}{13}\right)+26\left(\frac{5}{13}\right)+7$$

Resolviendo obtenemos $x=-15$; $y=29$

$\therefore$ las coordenadas de R en el sistema XY son $(-15;\,29)$.

Problema 3

Sea P(10;5a) las coordenadas de un punto en el sistema XY y P'(22;a) las coordenadas de un punto en el sistema $X'Y'$ que se obtuvo al rotar el sistema XY un ángulo α.

Halle el valor de $M = a\,\text{sen}\,\alpha + 2a\cos\alpha$.

Resolución

Se tiene
$$\left.\begin{array}{l} P(10;5a) \text{ en el sistema } XY \\ P'(22;a) \text{ en el sistema } X'Y' \end{array}\right\}(I)$$

Para calcular a y α usaremos las fórmulas de rotación

$$x = x'\cos\alpha - y'\text{sen}\,\alpha$$

$$y = x'\text{sen}\,\alpha + y'\cos\alpha$$

De (I) obtenemos $x = 10$, $y = 5a$

$x' = 22$, $y' = a$

Por lo tanto $10 = 22\cos\alpha - a\,\text{sen}\,\alpha$ ....(II)

$5a = 22\,\text{sen}\,\alpha + a\cos\alpha$ ....(III)

De (III) al despejar **a**, obtenemos

$$a = \frac{22\,\text{sen}\,\alpha}{5-\cos\alpha} \quad ...(IV)$$

Reemplazando en (II)

$$10 = 22\cos\alpha - \frac{22\,\text{sen}\,\alpha}{5-\cos\alpha}\text{sen}\,\alpha$$

$$\Rightarrow 50 - 10\cos\alpha = 110\cos\alpha - 22\cos^2\alpha - 22\,\text{sen}^2\alpha$$

$$\Rightarrow 120\cos\alpha = 50 + 22(\underbrace{\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha}_{1})$$

$$\Rightarrow 120\cos\alpha = 72 \Rightarrow \cos\alpha = \frac{3}{5} \wedge \text{sen}\,\alpha = \frac{4}{5}$$

Reemplazando en (IV)

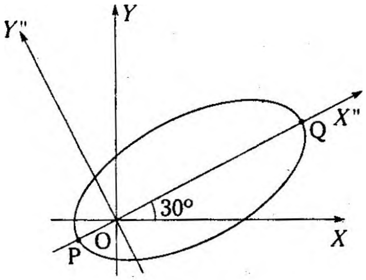
$$a = \frac{22\left(\frac{4}{5}\right)}{5-\frac{3}{5}} \Rightarrow a = 4$$

Se pide $a\,\text{sen}\,\alpha + 2a\cos\alpha = 4\left(\frac{4}{5}\right) + 2(4)\left(\frac{3}{5}\right)$

$\therefore M = 8$

Problema 4

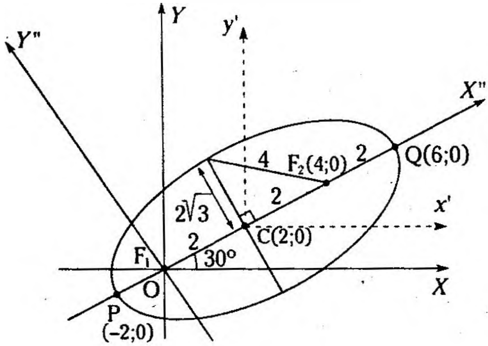
A partir de la figura 11.22(a), determine la ecuación de la elipse cuando el sistema XY se traslada al punto $(\sqrt{3};1)$; si en el sistema $X''Y''$ P y Q tienen como coordenadas (–2;0) y (6;0) respectivamente, además O es un foco de la elipse.



(a)

Resolución

Dado el gráfico mostrado podemos obtener ciertos elementos para la elipse como las coordenadas de los focos y de los vértices.



(b)

Figura 11.22

F_1 (Foco 1) $\Rightarrow F_1\,(0;0)$

F_2 (Foco 2) $\Rightarrow F_2\,(4;0)$

C (Centro) $\Rightarrow$ C (2;0)

La ecuación de la elipse en el sistema $X''Y''$ será

$$\frac{(x''-2)^2}{4^2}+\frac{y''^2}{(2\sqrt{3})^2}=1 \quad ...(1)$$

Para transformar al sistema XY usaremos las fórmulas de rotación (ángulo de rotación 30°)

$$x'' = x\cos 30° + y\,\text{sen}30°$$

$$y'' = -x\,\text{sen}30° + y\cos 30°$$

Luego obtenemos

$$x''=\frac{x\sqrt{3}+y}{2} \wedge y''=\frac{-x+y\sqrt{3}}{2} \quad ...(2)$$

Reemplazando (2) en (1) obtenemos

$$\frac{\left(\frac{x\sqrt{3}+y}{2}-2\right)^2}{16}+\frac{\left(\frac{-x+y\sqrt{3}}{2}\right)^2}{12}=1$$

Reduciendo obtenemos

$$3(\sqrt{3}x+y-4)^2+4(-x+y\sqrt{3})^2=192 \quad ...(3)$$

(esta ecuación es en el sistema XY)

Pero en el problema se busca la ecuación en el sistema $X'Y'$ la cual se obtuvo luego de una traslación de ejes, de nuestras fórmulas de traslación tenemos que

$$x=x'+h$$

$$y=y'+k$$

donde $(h;k)=(\sqrt{3};1)$, son las coordenadas del nuevo origen; entonces

$$x=x'+\sqrt{3} \quad \wedge \quad y=y'+1 \quad ...(4)$$

Reemplazando (4) en (3) se obtiene

$$3\left[\sqrt{3}(x'+\sqrt{3})+(y'+1)-4\right]^2$$

$$+4\left[-(x'+\sqrt{3})+(y'+1)\sqrt{3}\right]^2=192$$

Reduciendo obtenemos

$$\therefore\ 13x'^2+15y'^2-2\sqrt{3}x'y'-192=0$$

Esta es la ecuación que se buscaba en el sistema $X'Y'$.

Problema 5

Grafique la siguiente cónica

$$17x^2-12xy+8y^2-80=0 \qquad (*)$$

Resolución

Para graficar, simplifiquemos por rotación de ejes; previamente

$$B^2-4AC=(-12)^2-4(17)(8)=-400<0$$

Por teoría es una elipse o su degenerada, para eliminar el término XY debemos hallar θ tal que

$$\cot 2\theta=\frac{A-C}{B}=\frac{17-8}{-12}=-\frac{3}{4}; \quad \begin{matrix}0<2\theta<\pi\\ 0<\theta<\pi/2\end{matrix}$$

Luego, hallamos senθ y cosθ

$$\text{sen}\theta=\sqrt{\frac{1-\cos 2\theta}{2}} \quad \text{y} \quad \cos\theta=\sqrt{\frac{1+\cos 2\theta}{2}}$$

ya que $\cot 2\theta=-\frac{3}{4}$ y $0<2\theta<\pi$ se deduce

$$\cos 2\theta=-3/5$$

Luego

$$\text{sen}\theta=\sqrt{\frac{1-\left(-\frac{3}{5}\right)}{2}} \quad \text{y} \quad \cos\theta=\sqrt{\frac{1+\left(-\frac{3}{5}\right)}{2}}$$

$$\therefore\ \text{sen}\theta=\frac{2}{\sqrt{5}} \text{ y } \cos\theta=\frac{1}{\sqrt{5}};$$

$$\theta\approx 90°-\frac{53°}{2}\approx 63°30'$$

De las ecuaciones de rotación tenemos

$$\left.\begin{aligned} x&=x'\cos\theta-y'\text{sen}\theta=x'.\frac{1}{\sqrt{5}}-y'.\frac{2}{\sqrt{5}}\\ y&=x'\text{sen}\theta+y'\cos\theta=x'.\frac{2}{\sqrt{5}}+y'.\frac{1}{\sqrt{5}}\end{aligned}\right\} \text{(I)}$$

Reemplazamos (I) en la ecuación dada (*)

$$17\left(\frac{x'^2-4x'y'+4y'^2}{5}\right)-12\left(\frac{2x'^2-3x'y'-2y'^2}{5}\right)$$

$$+8\left(\frac{4x'^2+4x'y'+y'^2}{5}\right)-80=0$$

Reduciendo

$$x'^2+4y'^2=16$$

$$\frac{x'^2}{16}+\frac{y'^2}{4}=1$$

Luego graficamos la elipse

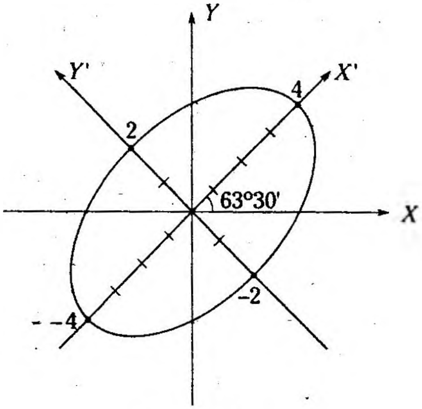


Figura 11.23

Problema 6

Analice y trace la gráfica de la ecuación

$$x^2+2\sqrt{3}xy+3y^2+8\sqrt{3}x-8y+32=0$$

Resolución

Se tiene $B^2-4AC=(2\sqrt{3})^2-4(1)(3)$

$\Rightarrow\ B^2-4AC=0$

Luego la gráfica es una parábola o su degenerada.

A partir de la ecuación se obtiene

$$\cot 2\phi=\frac{A-C}{B}=\frac{1-3}{2\sqrt{3}}=-\frac{1}{\sqrt{3}}$$

Por tanto

$$2\phi=120°\ \text{ y }\ \phi=60°$$

$$\text{sen}\phi=\frac{\sqrt{3}}{2}\ \text{ y }\ \cos\phi=\frac{1}{2}$$

Las fórmulas de rotación de ejes son como sigue

$$x=\frac{1}{2}x'-\frac{\sqrt{3}}{2}y'=\frac{1}{2}(x'-\sqrt{3}y')$$

$$y=\frac{\sqrt{3}}{2}x'+\frac{1}{2}y'=\frac{1}{2}(\sqrt{3}x'+y')$$

Reemplazando en la ecuación dada

$$\frac{(x'-\sqrt{3}y')^2}{4}+\frac{2\sqrt{3}}{4}(x'-\sqrt{3}y')(\sqrt{3}x'+y')$$

$$+\frac{3}{4}(\sqrt{3}x'+y')^2-8\left(\frac{\sqrt{3}x'+y'}{2}\right)+32=0$$

Simplificando

$$4x'^2-16y'+32=0\quad \text{ó}\quad y'=\frac{x'^2}{4}+2$$

Graficando se obtiene la figura 11.24

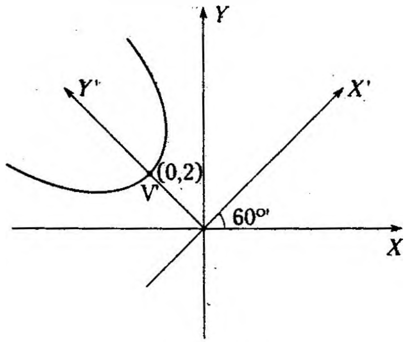


Figura 11.24

Problema 7

Identifique el tipo de curva que representa la ecuación

$$4x^2-4xy+y^2+8x-4y-5=0$$

Resolución

$B^2-4AC=(-4)^2-4(4)(1)=0$, por teoría es una parábola o su degenerada.

Luego hallamos θ el ángulo de rotación tal que

$$\cot 2\theta = \frac{A-C}{B} = \frac{4-1}{-4} = -\frac{3}{4}\text{, por problema 5}$$

$$\theta = 63°30',\ \operatorname{sen}\theta = \frac{2}{\sqrt{5}}\ \text{y}\ \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{5}}\ ;\quad x = \frac{x'-2y'}{\sqrt{5}},\quad y = \frac{2x'+y'}{\sqrt{5}}$$

Luego reemplazamos, en la ecuación dada; que tiene por equivalente

$$(2x-y)^2+4(2x-y)-5=0$$

$$\left(2\left(\frac{x'-2y'}{\sqrt{5}}\right)-\left(\frac{2x'+y'}{5}\right)\right)^2$$

$$+4\left(2\left(\frac{x'-2y'}{\sqrt{5}}\right)-\frac{2x'+y'}{\sqrt{5}}\right)-5=0$$

$$\frac{(-5y')^2}{5}+\frac{4}{\sqrt{5}}(-5y')-5=0$$

$$\Rightarrow (\sqrt{5}y'-2)^2=9$$

Efectuando

$$y'=\frac{3}{\sqrt{5}}\ \text{ó}\ y'=-\frac{3}{\sqrt{5}}$$

Graficando

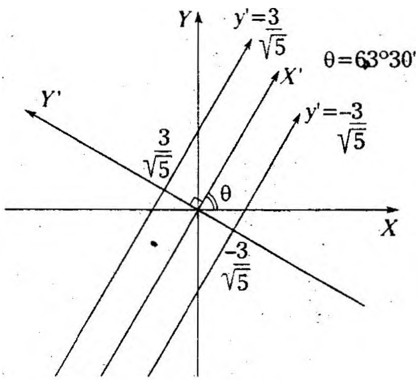


Figura 11.25

Problema 8

Dada la ecuación completa de 2do grado

$$Ay^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$$

demuestre que si $B^2-4AC>0$, dicha ecuación pertenece a una hipérbola o una sección degenerada.

Resolución

Puesto que debido a una rotación de ejes se obtiene una ecuación de la forma

$$A'x'^2+B'x'y'+C'y'^2+D'x'+E'y'+F'=0\ ...(1)$$

Se verifica que

$$B'^2-4A'C'=B^2-4AC;\ \text{como } B^2-4AC>0$$

$$\Rightarrow B'^2-4A'C'>0\ ...(2)$$

Pero si se elimina el término $x'y'$ $\Rightarrow$ $B'=0$

De (1): $A'x'^2+C'y'^2+D'x'+E'y'+F'=0\ ...(3)$

Luego de (2)

$$-4A'C'>0$$

$$\Rightarrow\ A'C'<0$$

(lo cual indica que A'C' tienen signos opuestos)

De (3) podemos obtener

$$A'\left(x'^2+\frac{D'}{A'}x'\right)+C'\left(y'^2+\frac{E'}{C'}y\right)=-F'$$

Completando cuadrados

$$A'\left(x'^2+2\left(\frac{D'}{2A'}\right)x'+\left(\frac{D'}{2A'}\right)^2-\left(\frac{D'}{2A'}\right)^2\right)$$

$$+C'\left(y'^2+2\left(\frac{E'}{2C'}\right)y'+\left(\frac{E'}{2C'}\right)^2-\left(\frac{E'}{2C'}\right)^2\right)=-F'$$

$$A'\Big(x'+\underbrace{\frac{D'}{2A'}}_{\text{cte}}\Big)^2+C'\Big(y'+\underbrace{\frac{E'}{2C'}}_{\text{cte}}\Big)^2=\underbrace{-F+\frac{D'^2}{4A'}+\frac{E'^2}{4C'}}_{\text{cte}}$$

esas constantes las cambiamos por m; n y k ∈ ℝ respectivamente, èsto para tener un mejor panorama de dicha ecuación

$$A'(x'+m)^2+C'(y'+n)^2=k\ ...(4)$$

Como A' y C' tienen signos opuestos se tendrán dos casos:

1er Caso

$A'>0 \wedge C'<0$, hacemos $C'=-P$; $P\in\mathbb{R}^+$ ...(5)

Reemplazamos (5) en (4)

$$A'(x'+m)^2-P(y'+n)^2=k \quad ...(6)$$

Pero respecto de k se tienen a su vez dos casos

i) Si $k\in\mathbb{R}-\{0\}$ ii) Si $k=0$

Analizando la posibilidad i) la ecuación (6) se transforma en

$$\frac{(x'+m)^2}{\sqrt{\frac{k}{A'}}^2}-\frac{(y'+n)^2}{\sqrt{\frac{k}{P}}^2}=1$$

(esta ecuación representa a una hipérbola)

Si analizamos la posibilidad ii) la ecuación (6) se transforma en

$$A'(x'+m)^2-P(y'+n)^2=0 \quad ...(7)$$

la que a su vez se puede escribir como

$$\sqrt{A'}^2(x'+m)^2-\sqrt{P}^2(y'+n)^2=0$$

$$\Rightarrow \left(\sqrt{A'}(x'+m)+\sqrt{P}(y'+n)\right)$$

$$\left(\sqrt{A'}(x'+m)-\sqrt{P}(y'+n)\right)=0$$

De donde se obtienen las siguientes ecuaciones

$$\sqrt{P}y'+\sqrt{A'}x'+\sqrt{A'}m+\sqrt{P}n=0$$

(es una recta de pendiente igual a $-\sqrt{A'}/\sqrt{P}$)

$$-\sqrt{P}y'+\sqrt{A'}x'+\sqrt{A'}m-\sqrt{P}n=0$$

(es una recta de pendiente igual a $\sqrt{A'}/\sqrt{P}$)

Como las pendientes son opuestas significa que estas dos rectas son secantes o que se cortan.

2do. caso

$A'<0 \wedge C'>0$; hacemos $A'=-Q$; $Q\in\mathbb{R}^+$

Este segundo caso queda para el lector, el desarrollo es en forma análoga, y obtendrá lo mismo, una hipérbola o dos rectas secantes.

Expuesto lo anterior podemos concluir que en la ecuación $Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$, si $B^2-4AC>0$, la ecuación representa a una hipérbola o dos rectas secantes (sección cónica degenerada).

Problema 9

Un avión vuela siguiendo la trayectoria hiperbólica que se observa en la figura. Si la ecuación de la trayectoria es $2(y')^2-(x')^2=8$ en el plano $X'Y'$ generado al rotar 45°, determine la ecuación de dicha trayectoria en el sistema XY, además calcule la altura del avión cuando éste se encuentra por encima del origen de coordenadas con respecto al sistema XY.

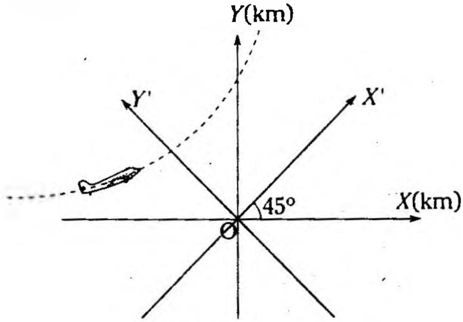


Figura 11.26

Resolución

Para calcular las coordenadas originales, cuando el sistema ha rotado un ángulo α aplicamos las siguientes fórmulas:

$$x'=x\cos\alpha+y\,\text{sen}\alpha$$

$$y'=-x\,\text{sen}\alpha+y\cos\alpha$$

Se tiene de dato $\alpha=45°$, luego

$$x'=x\cos45°+y\,\text{sen}45° \Rightarrow x'=\frac{\sqrt{2}}{2}(x+y)$$

$$y'=-x\,\text{sen}45°+y\cos45° \Rightarrow y'=\frac{\sqrt{2}}{2}(y-x)$$

Sustituyendo en la ecuación $2(y')^2-(x')^2=8$

Efectuando queda $x^2-6xy+y^2-16=0$

Es la ecuación de la trayectoria del avión en el sistema original XY.

Si hacemos $x=0$, determinaremos el valor (y) de la altura del avión

$$0^2-6(0)y+y^2-16=0$$

$$y^2=16$$

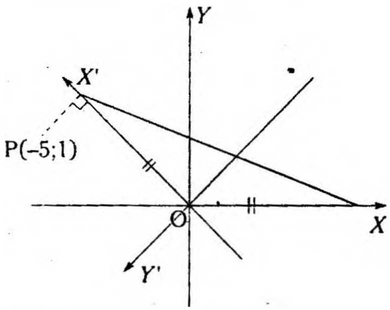
$$\therefore\ y=4\text{ km}$$

Problemas Propuestos

1. Se hace rotar un ángulo de $\pi/3$ y se traslada a la vez; determine las coordenadas del nuevo origen si el punto $P(4;\sqrt{3})$ tiene coordenadas en el nuevo sistema.

A) (1;0) B) $\left(-\frac{3}{2};0\right)$ C) (2;3)
D) (0; −1) E) (−1;1)

2. Del gráfico mostrado, halle el área de la región sombreada, si las coordenadas de P en el sistema $X'Y'$ son $(3\sqrt{2};2\sqrt{2})$.



A) $\frac{7\sqrt{2}}{2}\,u^2$ B) $\frac{9\sqrt{2}}{2}\,u^2$ C) $4\sqrt{2}\,u^2$
D) $3\sqrt{2}\,u^2$ E) $\sqrt{2}\,u^2$

3. Dada la ecuación $3x^2+8y+4-4xy-12x=0$, luego de analizarla podemos concluir que corresponde a

A) una elipse.
B) una parábola.
C) una circunferencia.
D) una hipérbola.
E) dos rectas paralelas.

4. Para la ecuación dada en el sistema XY, lleve a cabo una rotación apropiada de ejes para que la ecuación resultante en el nuevo sistema no tenga el término xy.

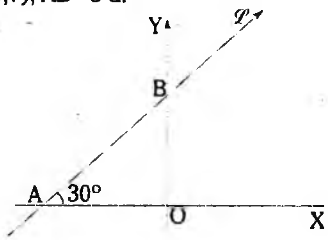
$$x^2-2xy+y^2-8x-8y=0$$

A) $\sqrt{2}y'=x'^2$ B) $2y'^2=\sqrt{3}x'$
C) $3y'^2=\sqrt{2}x'$
D) $y'^2=4\sqrt{2}x'$ E) $y'=3\sqrt{2}x'^2$

5. Determine la ecuación de la circunferencia tangente a los semiejes positivos que encierra con estos un área igual a $(4-\pi)\,u^2$ al ser trasladado el origen al punto P(−1; 3)

A) $x'^2+y'^2-6x'+2y'+6=0$
B) $x'^2+y'^2+6x'+2y'+5=0$
C) $x'^2+y'^2-8x'+4y'+10=0$
D) $x'^2+y'^2-6x'+10y'+12=0$
E) $x'^2+y'^2-14x'+8y'+10=0$

6. Dado el siguiente gráfico, determine la ecuación de la recta en el nuevo sistema generado al trasladar el origen al punto M(3;7), AB=5 u.



A) $6y'+2\sqrt{3}x'+10\sqrt{3}-4=0$
B) $6y'-2\sqrt{3}x'+27-6\sqrt{3}=0$
C) $6y'+2\sqrt{3}x'+5\sqrt{3}-2=0$
D) $5y'+10\sqrt{3}x'-8\sqrt{3}+2=0$
E) $6y'-2\sqrt{3}x'+8\sqrt{3}-2=0$

7. Determine la ecuación de la curva $\mathscr{C}:(x-2)^2=4y$ en el nuevo sistema generado al rotar los ejes un ángulo 45° en sentido antihorario.

A) $x'^2+y'^2+2x'y'+8x'-10=0$

B) $2x'^2+y'^2-2x'y'+8\sqrt{2}x'-8=0$

C) $x'^2+y'^2-2x'y'-8\sqrt{2}x'+8=0$

D) $3x'^2+y'^2-2x'y'+3\sqrt{2}x'+7=0$

E) $x'^2+y'^2-4x'y'-2\sqrt{2}x'+9=0$

8. Determine el área encerrada por la recta $\mathscr{L}:x+y-4=0$ y los semiejes $X'Y'$ en el nuevo sistema generado al rotar los ejes un ángulo $\phi=37°$ en sentido horario.

A) $\dfrac{100}{7}u^2$ B) $\dfrac{150}{7}u^2$ C) $\dfrac{135}{7}u^2$

D) $\dfrac{200}{7}u^2$ E) $\dfrac{215}{7}u^2$

9. Dada la curva $\mathscr{C}:Ax^2+Bxy+Cy^2+x+y=0$, siendo A, B, C lados de un triángulo rectángulo (A: hipotenusa), de perímetro $(3\sqrt{3}+3)$ u, determine su ecuación al eliminar el término xy, si $A-C=\dfrac{\sqrt{3}B}{3}$

A) $5\sqrt{3}x'^2-\sqrt{3}y'^2+\sqrt{3}x'+y'=0$

B) $4\sqrt{3}x'^2+\sqrt{3}y'^2+(\sqrt{3}+1)x'+(\sqrt{3}-1)y'=0$

C) $3(\sqrt{3}-1)x'^2+3(\sqrt{3}+1)y'^2-\sqrt{6}x'-\sqrt{6}y'=0$

D) $2(\sqrt{3}+1)x'^2-3(\sqrt{3}-1)y'^2+\sqrt{6}x'-\sqrt{3}y'=0$

E) $5x'^2+y'^2+(\sqrt{3}+1)x'+(\sqrt{3}-1)y'=0$

10. Luego de eliminar el término xy de la ecuación $\mathscr{C}:\operatorname{sen}(60°+\alpha)x^2+\operatorname{sen}\alpha xy+\operatorname{sen}(60°-\alpha)y^2+Dx+Ey+F=0$; $\alpha\neq k\pi;k\in\mathbb{Z}$. Determine el ángulo que hace posible esta eliminación.

A) 30° B) 45° C) 60°

D) $\arctan(\sqrt{2}-1)$ E) 75°

11. Dada la gráfica $\mathscr{C}:\operatorname{sen}\phi x^2+(\operatorname{sen}\phi+\cos\phi)xy+\cos\phi y^2+x-y+5=0$; $\tan\phi\neq 1$ identifique el tipo de cónica a la cual pertenece dicha ecuación.

A) parábola B) elipse

C) hipérbola

D) recta E) circunferencia

12. Dada la curva $\mathscr{C}:-2x^2+8xy-8y^2+x+27-5=0$ luego de analizarla, esta corresponderá a una

A) elipse. B) parábola.

C) hipérbola.

D) senoide. E) circunferencia.

13. Dada la siguiente ecuación $Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+y+1=0$, se cumple que $\dfrac{A}{B}=\dfrac{B}{C}=\dfrac{C}{D}=K$; $K\neq 0$. Sea $\phi=45°$ el ángulo de rotación que permite eliminar el término xy, determine su ecuación.

A) $A(3x'^2+y'^2)+\sqrt{2}(A+1)x'+\sqrt{2}(1-A)y'+2=0$

B) $3Ax'^2-Ay'^2+\sqrt{2}(A+2)x'-\sqrt{2}(1+A)y'+3=0$

C) $3Ax'^2+Ay'^2+\sqrt{2}(A-1)x'+\sqrt{2}(A+1)y'+1=0$

D) $3Ax'^2-Ay'^2+\sqrt{2}(A-1)x'+\sqrt{2}(1-A)y'+1=0$

E) $3Ax'^2+Ay'^2-\sqrt{2}(A+1)x'+\sqrt{2}(1-A)y'+2=0$

14. Dada la ecuación de segundo grado

$$23x^2-72xy+2y^2+140x+20y-75=0$$

si el sistema XY es rotado un ángulo $\theta=\arctan\left(\frac{3}{2}\right)$ se obtiene un nuevo sistema, en dicho sistema la nueva ecuación es $Ax'^2+Bx'y'+Cy'^2+Dx'+Ey'+F=0$.

Halle $13B-(A+C)$

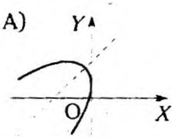
A) 25 B) 83 C) 80
D) 73 E) 75

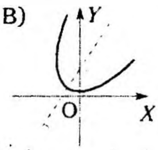
15. Halle la excentricidad **e** y las coordenadas del centro de una hipérbola cuya ecuación está dada por

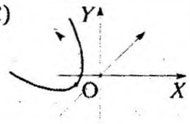
$$7x^2+48xy-7y^2+20x-110y-100=0 \quad \text{(I)}$$

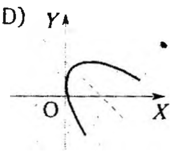
A) $e=\sqrt{3}$; C(−1;2)
B) $e=3/2$; C(−1;2)
C) $e=\sqrt{5}$; C(2;1)
D) $e=\sqrt{2}$; C(1;−2)
E) $e=\sqrt{3}$; C(−2;1)

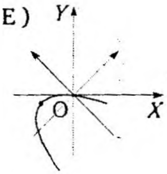
16. Determine el gráfico que corresponde a la ecuación $x^2+2xy+y^2+16\sqrt{2}y=0$

A)


B)


C)


D)


E)


17. Determine la ecuación de aquel lugar geométrico de todos los puntos cuya suma de distancias a los puntos (−3; 0) y (3; 0) es 14 cuando el sistema XY es trasladado al punto (1; 1) y rotado un ángulo $\theta=45°$.

A) $313x'^2-1898x'y'+1777y'^2-6370=0$

B) $315x'^2-1976x'y'+1764y'^2-6370=0$

C) $41x''^2+41y''^2+18x''y''+82\sqrt{2}x''+18y''-718=0$

D) $316x'^2-1545x'y'+1649y'^2-5490=0$

E) $549x'^2-1749x'y'+1549y'^2-4790=0$

18. Dado el triángulo ABC tal que A(8;6), B(a;b) y C(−7;−3) cuyo baricentro tiene coordenadas G'(−5;−1) cuando el origen del sistema XY es trasladado al punto O'(−a; b)en el primer cuadrante generándose el sistema $X'Y'$. Luego el valor de $a+b$ es

A) 5 B) 10 C) −1
D) 1 E) −2

19. Identifique a qué gráfica pertenece la siguiente ecuación $2002x^2+Rxy+D=0$ si $R\neq\cos 90° \wedge D\neq|2^i|-\cos 0$; $i=\sqrt{-1}$

A) dos rectas paralelas
B) dos rectas que se cortan
C) una elipse
D) una hipérbola
E) una parábola

20. Si la siguiente ecuación de segundo grado $Ax^2+Bxy+Cy^2+Dy+Ey+F=0$ representa a una circunferencia en el sistema XY; además, A=C, halle el valor o valores que toma B.

A) $\mathbb{R}-\{0\}$ B) $\mathbb{R}^+$ C) $\mathbb{R}^-$
D) $\{0\}$ E) $\{-1;0;1\}$

1	A	11	C
2	B	12	B
3	D	13	A
4	D	14	B
5	A	15	D
6	B	16	E
7	C	17	C
8	D	18	C
9	E	19	D
10	D	20	D

Claves

CAPÍTULO

XII

Trigonometría esférica



TRIGONOMETRÍA

Implicancia entre la Trigonometría y la Geografía

La localización de un punto sobre la superficie de la tierra depende principalmente de dos datos: latitud y longitud. Son informaciones fáciles de obtener cuando se tiene un mapa geográfico. Estos datos se obtienen considerando el comportamiento de la Tierra semejante a una esfera que gire sobre sí misma, además sabiendo que las órbitas planetarias son elipses y el Sol ocupa uno de los focos.

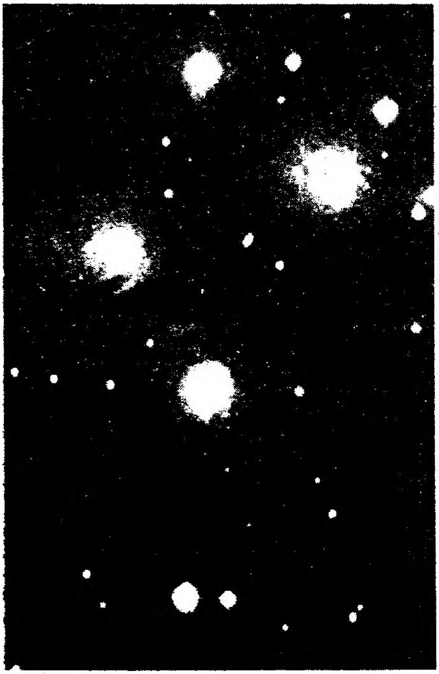
LECTURA

LA TRIGONOMETRÍA ESFÉRICA

El inicio del estudio acerca de la esfera tuvo que ver básicamente con el estudio de los planetas, especialmente en referencia a dos puntos: la forma de la Tierra y el movimiento de los planetas (Astronomía); y la proyección de la Tierra al plano así como la localización de lugares específicos (Geografía).

El nacimiento de la trigonometría esférica estuvo asociado a la medición del tiempo durante la noche (ello mediante la observación de las estrellas), con la creación de calendarios, con las trayectorias y posiciones de cuerpos celestes, así como con la navegación y la geografía.

Menelao fue el primero en definir a un triángulo esférico y demostró muchas propiedades análogas a los triángulos planos en su obra SPHAEICA. Seguidamente, Ptolomeo en su obra **Almagesto**, construye la primera tabla de razones trigonométricas que se utilizará para resolver problemas astronómicos con triángulos esféricos. Más tarde en la España islámica la trigonometría esférica resurge después de 1000 años, con los trabajos hispano-árabes, entre ellos los de Al Jayyani nacido en Jaén en el año 989; a este matemático se le atribuye la obra **Libros de los arcos desconocidos sobre una esfera**, donde enunció el teorema de Menelao.



El brillo y el tamaño aparente de las estrellas dependen de su mayor o menor proximidad a la Tierra. A simple vista, una gigante roja puede parecer poco luminosa si está muy lejos.

En la matemática griega los problemas de máximos y mínimos son inusuales, no obstante, Teodoro escribió en un libro sobre figuras con el mismo perímetro **"de todos los sólidos con la misma superficie, la esfera tiene mayor volumen"**.

Si nos referimos a lo reciente en la historia encontraremos que uno de los logros de los matemáticos del siglo XIX, y en particular de la topología, ha sido la clasificación total de las superficies bidimensionales, ello se consigue al demostrar que todas ellas, si se manejan como elásticas, pueden doblarse, estirarse o deformarse y cada una es equivalente a una esfera con un determinado número de asas, orificios o bonetes cruzados.

Trigonometría esférica

OBJETIVOS

- Conocer la relación entre los lados y ángulos de un triángulo esférico, así como la definición de exceso esférico, triángulos esféricos rectángulos, oblicuángulos y sus diferentes aplicaciones.
- Calcular la distancia más corta entre dos puntos situados sobre la superficie de una esfera.
- Identificar la posición de un punto sobre la superficie de la tierra; es decir, determinar la latitud y longitud de dicho punto.

INTRODUCCIÓN

En el presente capítulo, se desarrolla y analiza no solo los triángulos esféricos y sus elementos, sino también se enfoca el aspecto histórico, es decir, indicaremos el aporte de esta rama en la astronomía, donde es necesidad especificar los cuerpos celestes.

La Tierra es uno de los innumerables cuerpos celestes que conjuntamente con los demás astros conforman el Universo. Desde que el hombre apareció sobre la tierra, se han generado diversas interrogantes sobre el Universo. Por eso, ya en los tiempos antiguos surgió la necesidad práctica de una ciencia sobre los fenómenos celestes. Es que la vida de los seres humanos se subordina al reglamento celeste. Los rayos solares nos brindan la luz y el calor, la alternación del día y de la noche depende de la puesta y salida del sol. El carácter que varía en el transcurso del año, la mutua orientación entre el Sol y la Tierra determina el cambio de las estaciones.

Para el sustento de este capítulo se recuerda nociones de la geometría del espacio, principalmente las propiedades de un ángulo triedro. Posteriormente se definen los elementos de un triángulo esférico y se exponen los tipos diversos de triángulos esféricos como el acutángulo, rectángulo, polar, cuadrantal, etc., y los métodos para resolver. Finalmente se detalla las coordenadas geográficas de un punto en la Tierra (longitud y latitud) para aplicar en problemas de Astronomía y navegación.

ELEMENTOS FUNDAMENTALES EN UNA ESFERA

Circunferencia Máxima

Es aquella circunferencia que se forma al ser cortada una superficie esférica por un plano, tal que pase por el centro de la misma. (Véase figura 12.1(a)).

Circunferencia Mínima

Se genera cuando el plano que intersecta a la superficie esférica no pasa por el centro de ésta. (Véase figura 12.2 (b)).

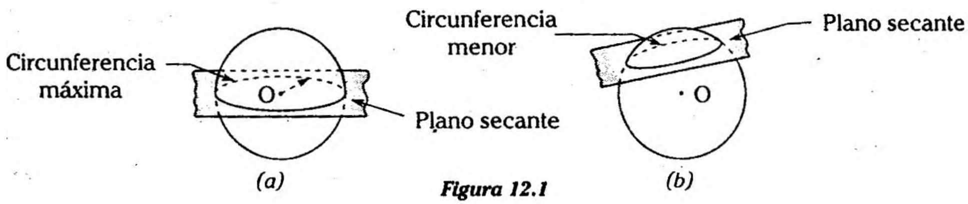


Figura 12.1

Polos

Son los extremos del diámetro perpendicular al plano que contiene a una circunferencia máxima. En la figura 12.2, P y P' son los polos de la circunferencia máxima $\mathscr{C}$. Distancia polar es el arco de circunferencia máxima de todo los lugares que distan 90° de los polos. (Véase figura 12.2) $\widehat{AP} = \widehat{PB} = 90°$

Ángulos diedros. Cuando dos planos se intersectan (tienen una recta común), entonces determinan ángulos diedros. (Véase figura 12.3)

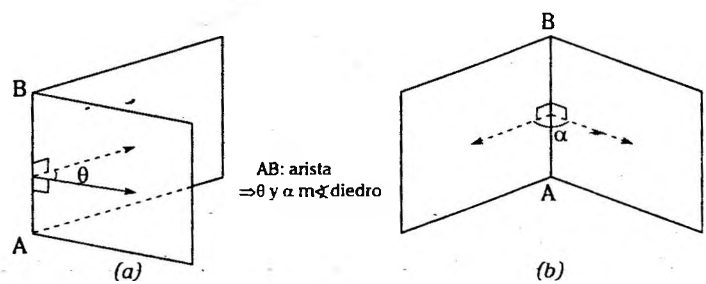


Figura 12.3

Ángulo esférico

El ángulo formado en una esfera por dos arcos secantes de circunferencias máximas se denomina ángulo esférico. En la figura 12.4(a) se muestra un ángulo esférico cuya medida es α.

La medida de un ángulo esférico viene dada por el ángulo diedro formado por los planos de las circunferencias máximas cuyos arcos constituyen los lados del ángulo esférico. (Ver figura 12.4(b))

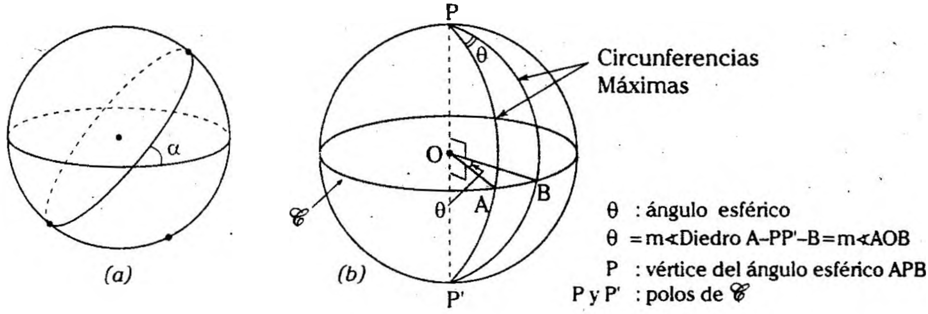
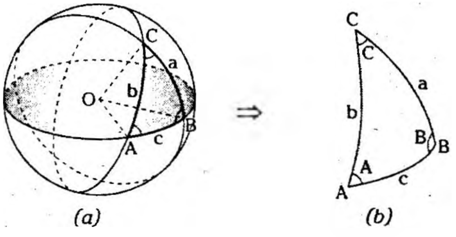


Figura 12.4

TRIÁNGULO ESFÉRICO

Definición

Es la región de la superficie de una esfera limitada por los arcos de tres circunferencias máximas, que se cortan dos a dos tal como se indica en la figura 12.5(a).



Los elementos de un triángulo esférico ABC son sus tres lados a, b, c (se miden en unidades angulares) y sus tres ángulos A, B y C. (Figura 12.5 (b))

Triángulo Euleriano. Son triángulos esféricos cuyos elementos (un lado o un ángulo) son siempre menores que 180°, en caso contrario se les llama triángulos no eulerianos.

En la figura 12.5(c), el triángulo esférico (T.E.) sombreado es euleriano pero el T.E. donde un lado es ADB mide 360° – c no es euleriano.

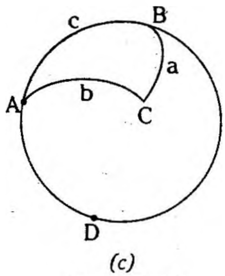


Figura 12.5

Propiedades de los Triángulos Esféricos

En la figura 12.6, se tiene el ángulo triedro (figura geométrica formada por tres regiones angulares y mismo vértice) O-ABC, entonces de cualquier propiedad de los ángulos diedros se puede inferir una propiedad análoga a los triángulos esféricos y viceversa.

Observe que las caras del ángulo triedro son las medidas de los lados del triángulo esférico y los ángulos diedros del triedro son los ángulos esféricos de ABC (Ver figura 12.6)

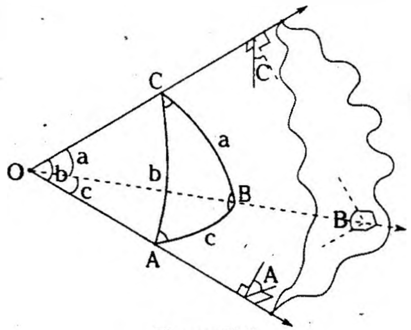


Figura 12.6

- Cualquier lado de un triángulo esférico es menor que la suma de los otros dos y mayor que la diferencia de estos.

$$b - c < a < b + c$$

- La suma de los lados de un triángulo esférico es mayor que 0° y menor que 360°.

$$0° < a+b+c < 360°$$

- La suma de los ángulos de un triángulo esférico es mayor que 180° y menor que 540°.

$$180° < A+B+C < 540°$$

Exceso Esférico (E)

El exceso esférico de un triángulo esférico, denotado por la letra E, es el valor angular en el cual la suma de los ángulos del triángulo esférico excede a 180°

$$E = (A + B + C) - 180°$$

Ejemplo
En un triángulo esférico cuyos ángulos son

$A=60°$, $B=80°$ y $C=112°$

el exceso esférico(E) se calculará de la siguiente manera $E=A+B+C-180°$, y reemplazando sus valores respectivos obtendremos la siguiente igualdad: $E=(60° + 80° + 112°) - 180°$

De donde $E=72°$

Pero debe saber usted también que el exceso esférico puede expresarse en una función de los tres lados (fórmula de L'Huilier y Serret); dicha relación la presentamos a continuación:

$$\tan\frac{E}{4} = \sqrt{\tan\frac{p}{2}\tan\left(\frac{p-a}{2}\right)\tan\left(\frac{p-b}{2}\right)\tan\left(\frac{p-c}{2}\right)}$$

Siendo p semiperímetro del T.E. ABC entonces $p = \dfrac{a+b+c}{2}$

Ejemplo
En un triángulo esférico equilátero, su perímetro es 180°. Calcule el exceso esférico si $7{,}89° = \arctan(2-\sqrt{3})^{3/2}$

Resolución
Sea el T.E. ABC, entonces $2p=180° \Rightarrow p=90°$
Entonces $a=b=c=60°$

$$\tan\frac{E}{4} = \sqrt{\tan\frac{90°}{2}\tan\left(\frac{90°-60°}{2}\right)\tan\left(\frac{90°-60°}{2}\right)\tan\left(\frac{90°-60°}{2}\right)}$$

Luego

$$\Rightarrow \tan\frac{E}{4} = \sqrt{\tan 45° \tan 15° \tan 15° \tan 15°}$$

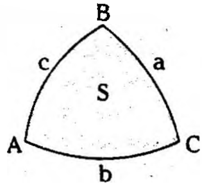
$$\Rightarrow \tan\frac{E}{4} = \sqrt{(2-\sqrt{3})^3} \Rightarrow \frac{E}{4} = \arctan\sqrt{(2-\sqrt{3})^3}$$

$$\Rightarrow E = 4\arctan\sqrt{(2-\sqrt{3})^3}$$

$$\therefore \quad E = 31{,}56°$$

Área del Triángulo Esférico (S)

El área de un triángulo esférico es el área de la superficie de la esfera, el cual se obtiene al multiplicar el cuadrado del radio con el exceso esférico.



(a)

$$S = R^2.E$$

Siendo
E: Exceso esférico expresado en radianes.
R: Radio de la esfera.

Demostración

En la demostración de la fórmula para calcular el área(S), es necesario considerar que el área de un huso esférico (véase figura 12.7(c)), siendo α ángulo expresado en radianes, se calcula por la siguiente

fórmula: $\text{Área del huso esférico} = 2\alpha R^2$

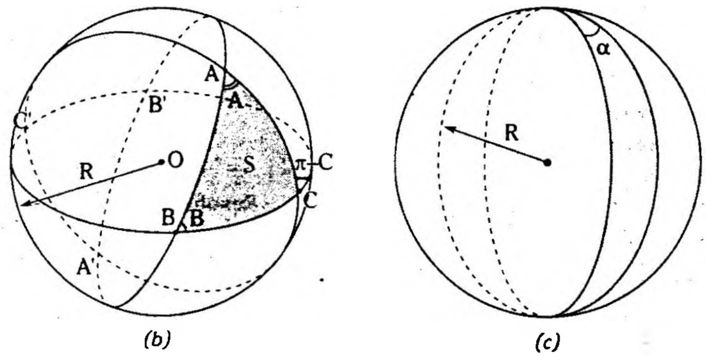


Figura 12.7

Adicionalmente, dadas tres circunferencias máximas, se determina (véase figura 12.7 (b)) sobre la esfera triángulos esféricos simétricos (ABC y A'B'C'; A'BC y AB'C', etc) los cuales tienen igual área respectivamente.

Sean: S: área de T.E. ABC , S_1:área del T.E. A'BC; S_2: área del T.E. AB'C

luego $S+S_1 = 2AR^2$ .... (*i*)

$S+S_2 = 2BR^2$ .... (*ii*)

Además como el T.E. A'BC es simétrico con el T.E. AB'C' luego estos triángulos tendrán igual área, es decir S_2=área del T.E. AB'C'

Luego $S_1+S_2=2(\pi-C)R^2$ .... (*iii*)

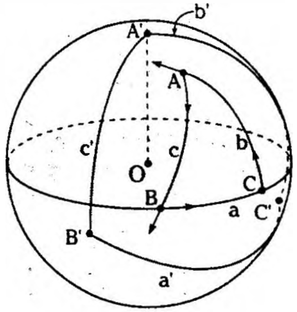
Si hacemos (*i*)+(*ii*)-(*iii*)

$$S = \underbrace{(A+B+C-\pi)}_{E}R^2 \quad ; \quad \text{E: exceso esférico expresado en radianes}$$

$\therefore$ $S=ER^2$ (esto es lo que se buscaba demostrar)

Triángulo Polar o Suplementario

El triángulo polar de un triángulo esférico es otro triángulo esférico que se obtiene por arcos de circunferencias máximas cuyos polos son los vértices del triángulo dado. (Véase figura 12.8 (a))



(a)

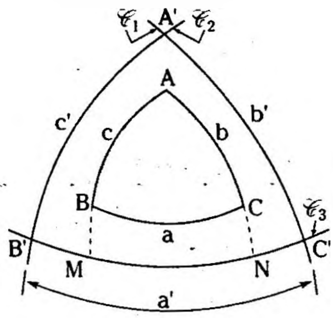
- A' es polo del lado a.
- B' es polo del lado b.

Relación entre lados y ángulos de un triángulo esférico y su polar correspondiente.

$A=180°-a'$	$B=180°-b'$	$C=180°-c'$
$A'=180°-a$	$B'=180°-b$	$C'=180°-c$

Demostración

De la figura 12.8 (a), graficamos la curva $\mathscr{C}_1$ la cual es un arco de circunferencia máxima, tomando como polo B, análogamente $\mathscr{C}_2$ con polo en C y $\mathscr{C}_3$ con polo en A, entonces el triángulo A'B'C' es triángulo polar del triángulo ABC.



(b)

Figura 12.8

I. Si A es un polo; de $\overset{\frown}{B'C'}$ (arco de circunferencia máxima).

II. $\overset{\frown}{MN}=\hat{A}$

III. Por definición de distancia polar $\overset{\frown}{B'N}=\overset{\frown}{MC'}=90°$

IV. $a'=\overset{\frown}{B'N}+\overset{\frown}{MC'}-\overset{\frown}{MN}$

$\Rightarrow a'=90°+90°-A$

$\Rightarrow a'=180°-A$

$\therefore A=180°-a'$

Ejemplos

- Halle los lados de los triángulos polares de los triángulos esféricos que tienen los siguientes ángulos:

I. A=40°, B=80°, C=110°

Resolución

a' = 140°, b' = 100°, c' = 70°

II. A = 70°10', B = 56°20', C = 92°15'

Resolución

a' = 109°50' , b' = 123°40' , c' = 87°45'

- Halle los ángulos de los triángulos polares de los triángulos esféricos que tienen los siguientes lados:

I. a=80°, b=50° y c=100°

Resolución

A' = 100°, B' = 130°, C' = 80°

II. a = 74°42', b = 95°06', c = 66°25'

Resolución

A' = 105°18'

B'=84°54'

C'=113°35'

Triedros polares o suplementarios

Son los triedros que corresponden a dos triángulos esféricos suplementarios.

Propiedad de los triedros suplementarios

Cada arista de un triedro es perpendicular a una cara de su triedro polar. En efecto, esta arista corta la esfera en el polo del plano de la cara correspondiente.

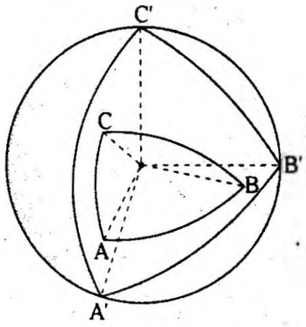


Figura 12.9

Triángulo Esférico Rectángulo (T.E.R.)

Se llama triángulo esférico rectángulo a un triángulo esférico tal que uno o más de sus ángulos sea recto. En el triángulo ABC recto en C, (véase figura 12.10) se cumplen las diez relaciones fundamentales siguientes:

1. sena = senAsenc
2. tana = tanAsenb
3. tana = cosBtanc
4. cosc = cosa cosb
5. cosA = senBcosa
6. senb = senBsenc
7. tanb = tanBsena
8. tanb = cosAtanc
9. cosc = cotAcotB
10. cosB = senA cosb

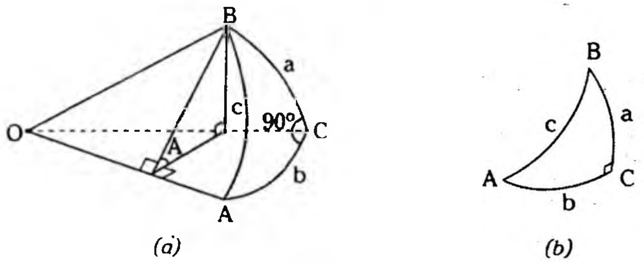


Figura 12.10

La deducción de estas relaciones aparece en los problemas resueltos del presente capítulo.

Observación

Un triángulo esférico rectángulo pueden ser de uno, dos o tres ángulos rectos, veamos:

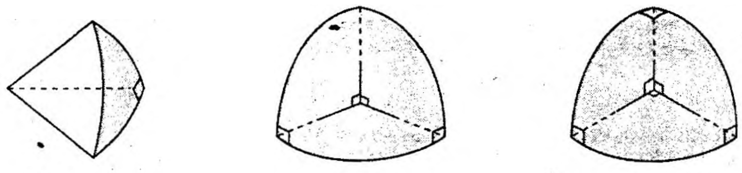


Figura 12.11

Reglas de Neper

John Neper (1550 – 1617), matemático inglés, establece las siguientes reglas para facilitar la obtención de las diez relaciones fundamentales mencionadas para el caso de un triángulo esférico rectángulo. Se sustituye del triángulo original, al lado c por (90°– c), el ángulo A por (90°– A), el ángulo B por (90°–B).

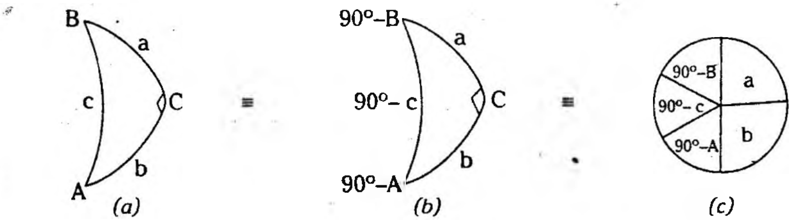


Figura 12.12

Observe que los elementos se encuentran en el círculo mostrado (véase figura 12.12(c)), de donde Neper menciona las siguientes reglas

Regla 1

El seno de cualquier elemento es igual al producto de las tangentes de los elementos adyacentes.

Ejemplo

- Considerando al lado **b** como el elemento intermedio, entonces sus elementos adyacentes son a y 90°–A, entonces $\text{sen}b=\tan a\tan(90°-A) \Rightarrow \text{sen}b = \tan a\cot A$
  $\therefore \tan a=\tan A\,\text{sen}b$ (es la relación 2)
- Considerando al lado **a** como el elemento intermedio, entonces sus elementos adyacentes son b y 90°–B $\text{sen}a=\tan(90°-B)\tan b \Rightarrow \text{sen}a=\cot B\tan b$
  $\therefore \tan b=\tan B\,\text{sen}a$ (es la relación 7)

Regla 2

El seno de cualquier elemento es igual al producto de los cosenos de los elementos opuestos.

Ejemplo 1

- Para el elemento **a**, sus elementos opuestos son 90°–A y 90°–C
  $\text{sen}a = \cos(90°-A)\cos(90°-c) \Rightarrow \text{sen}a=\text{sen}A\,\text{sen}c$ (es la relación 1)
- Para el elemento 90°– **c**, sus elementos opuestos son a y b.
  $\text{sen}(90°-c) = \cos a\cos b \Rightarrow \cos c=\cos a\cos b$ (es la relación 4)

Ejemplo 2

Del siguiente triángulo esférico, (vea la figura 12.13) calcule $2\text{sen}^2\dfrac{B}{2}$

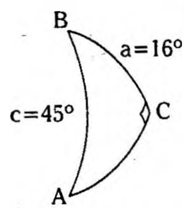


Figura 12.13

Resolución

Por las reglas de Neper, cambiamos por su complemento a los elementos A, c y B.

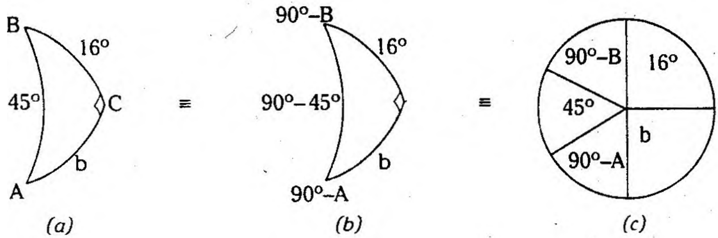


Figura 12.14

Por la regla 1

$\text{sen}(90° - B) = \tan 45° \tan 16°$

$\Rightarrow \cos B = \tan 45° \tan 16°$

$\Rightarrow \cos B = 1 \times \frac{7}{24}$

$\Rightarrow \cos B = \frac{7}{24} \Rightarrow 1 - 2\text{sen}^2\frac{B}{2} = \frac{7}{24} \Rightarrow 2\text{sen}^2\frac{B}{2} = \frac{17}{24}$

Dado el triángulo esférico ABC, la relación (1) sena=senAsenc. Para determinar si a es menor o mayor que 90°, se necesita una información adicional, esta información se obtiene de la regla de los cuadrantes.

Regla de cuadrantes

1. El lado a y el ángulo A (lo mismo que lado b y el ángulo B) pertenecen al mismo cuadrante.
2. Si c< 90°, entonces los lados a y b (lo mismo que los ángulos A y B) pertenecen al mismo cuadrante; si c>90°, entonces los lados a y b (lo mismo que los ángulos A y B) pertenecen a diferentes cuadrantes.

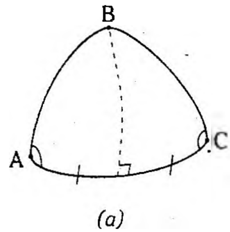
Ejemplos

I. Si $A = 100° \Rightarrow a > 90°$ ...(1ra. regla)

II. Si $c = 120° \Rightarrow b < 90° \wedge a > 90°$ ó $b > 90° \wedge a < 90°$ ... (2da. regla)

Si $c = 40° \Rightarrow b > 90° \wedge a > 90°$ ó $b < 90° \wedge a < 90°$ ...(2da. regla)

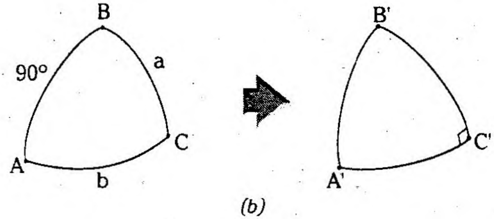
Resolución de triángulo esférico isósceles Se realiza en forma análoga a la de un triángulo isósceles plano, es decir dividiéndolo en dos triángulos esféricos rectángulos iguales por un arco de circunferencia máxima, trazado desde el vértice, perpendicular a la base. (Véase figura 12.15 (a)).



(a)

Triángulo Cuadrantal

Es un triángulo esférico tal que uno de sus lados es un cuadrante (igual a 90°). Por tanto; para resolver se realiza mediante su polar. (Véase figura 12.15(b)).



(b)

Figura 12.15

Triángulo Esférico Oblicuángulo

Un triángulo esférico oblicuángulo es un triángulo esférico, tal que ninguno de sus ángulos son rectos, un triángulo esférico oblicuángulo está definido cuando se conocen tres elementos cualesquiera (excepto los casos de ambigüedad). Para resolver estos triángulos se estudian las siguientes leyes:

1) Ley de senos

En todo triángulo esférico ABC se cumple $\dfrac{\operatorname{sen}a}{\operatorname{sen}A}=\dfrac{\operatorname{sen}b}{\operatorname{sen}B}=\dfrac{\operatorname{sen}c}{\operatorname{sen}C}$

Demostración

Dado el triángulo esférico ABC cualquiera.

- Por C trazamos una circunferencia máxima que corta perpendicularmente a AB en F. (Véase figura 12.16)

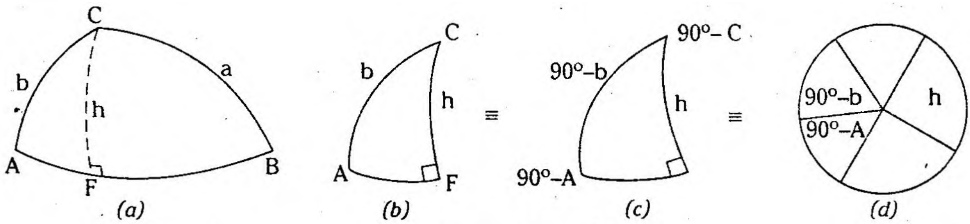


Figura 12.16

- Por la regla 2 de Neper en el triángulo ACF se tiene:
  $\operatorname{sen}h=\cos(90°-A)\cos(90°-b)$
  $\operatorname{sen}h=\operatorname{sen}A\operatorname{sen}b \quad \ldots \text{(I)}$

- Usando la regla 2 de Neper en el triángulo CFB (figura 12.17) se tiene:
  $\operatorname{sen}h=\cos(90°-a)\cos(90°-B)$
  $\Rightarrow \operatorname{sen}h=\operatorname{sen}a\operatorname{sen}B \ldots \text{(II)}$

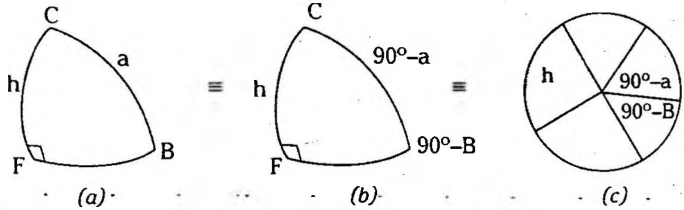


Figura 12.17

Igualando (I) y (II)

$\operatorname{sen}a\operatorname{sen}B=\operatorname{sen}b\operatorname{sen}A$

$\dfrac{\operatorname{sen}a}{\operatorname{sen}A}=\dfrac{\operatorname{sen}b}{\operatorname{sen}B}$

análogamente para los ángulos B y C

$\therefore\ \dfrac{\operatorname{sen}a}{\operatorname{sen}A}=\dfrac{\operatorname{sen}b}{\operatorname{sen}B}=\dfrac{\operatorname{sen}c}{\operatorname{sen}C}$

Ejemplo
Del T.E. ABC mostrado en la figura 12.18, calcule el valor de $M=1+\cos^2 a$

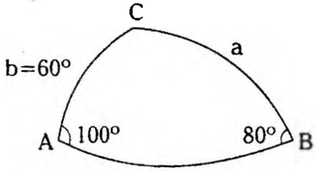


Figura 12.18

Resolución
Por ley de senos para un triángulo esférico:

$$\frac{\operatorname{sen} a}{\operatorname{sen} A}=\frac{\operatorname{sen} b}{\operatorname{sen} B}$$

reemplazando valores:

$$\frac{\operatorname{sen} a}{\cancel{\operatorname{sen} 100^\circ}}=\frac{\operatorname{sen} 60^\circ}{\cancel{\operatorname{sen} 80^\circ}} \Rightarrow \operatorname{sen} a=\operatorname{sen} 60^\circ \Rightarrow \operatorname{sen} a=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

luego: $M=1+\cos^2 a=1+1-\operatorname{sen}^2 a=2-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$

$$\therefore\ M=\frac{5}{4}$$

2) Ley de Cosenos para Lados

En todo triángulo esférico ABC, el coseno de un lado cualquiera es igual al producto de los cosenos de los otros dos lados, más el producto de los senos de estos dos lados por el coseno del ángulo que forman:

$$\cos a = \cos b \cos c + \operatorname{sen} b \operatorname{sen} c \cos A$$
$$\cos b = \cos c \cos a + \operatorname{sen} c \operatorname{sen} a \cos B$$
$$\cos c = \cos a \cos b + \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b \cos C$$

3) Ley de Cosenos para Ángulos

En todo triángulo esférico ABC, el coseno de un ángulo cualquiera es igual a menos el producto de los cosenos de los otros dos ángulos más el producto de sus senos por el coseno del lado que forman

$$\cos A = -\cos B \cos C + \operatorname{sen} B \operatorname{sen} C \cos a$$
$$\cos B = -\cos C \cos A + \operatorname{sen} C \operatorname{sen} A \cos b$$
$$\cos C = -\cos A \cos B + \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B \cos c$$

Demostraciones
En el triángulo esférico ABC (figura 12.19)
Sea AF = m y en el T.E. ACF, se tiene

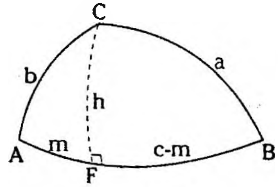


Figura 12.19

utilizando la regla 1 de Neper
- $\operatorname{sen} m = \tanh \cot A$
- $\operatorname{sen} h = \operatorname{sen} b \operatorname{sen} A$
- $\cos b = \cos h \cos m$

ahora en el T.E. CFB, se cumple

$$\cos a = \cos h \cos(c-m)$$
$$\cos a = \cos h(\cos c \cos m + \operatorname{sen} c \operatorname{sen} m)$$
$$\cos a = \underline{\cos h \cos m}\cos c + \cos h \underbrace{\operatorname{sen} m}\operatorname{sen} c$$
$$\cos a = \cos b \cos c + \cos h(\tanh \cot A)\operatorname{sen} c$$
$$\cos a = \cos b \cos c + \underbrace{\operatorname{sen} h}_{\operatorname{sen} b \operatorname{sen} A} \cot A \operatorname{sen} c$$

Luego: $\cos a = \cos b \cos c + \operatorname{sen} b \operatorname{sen} c \cos A$
Análogamente para los otros lados.
La ley de senos y cosenos también podemos demostrarla de la siguiente forma (en el ángulo triedro O-ABC)
sea OC=1

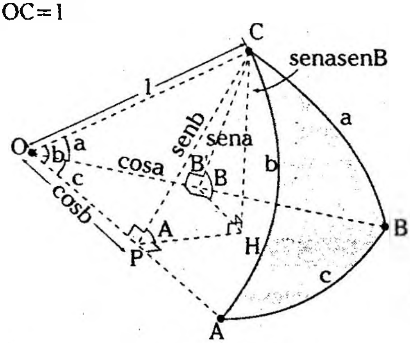


Figura 12.20

Para Ley de senos
De la figura 12.20 mostrada se tiene el ⊿PHC

$$\Rightarrow \operatorname{sen} A=\frac{\operatorname{sen} a \operatorname{sen} B}{\operatorname{sen} b}$$

luego $\frac{\operatorname{sen} a}{\operatorname{sen} A}=\frac{\operatorname{sen} b}{\operatorname{sen} B}$

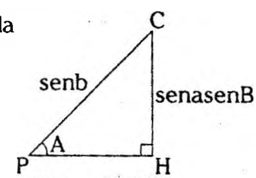


Figura 12.21

Análogamente para los ángulos B y C

$$\therefore \quad \frac{\operatorname{sen} a}{\operatorname{sen} A}=\frac{\operatorname{sen} b}{\operatorname{sen} B}=\frac{\operatorname{sen} c}{\operatorname{sen} C}$$

Para Ley de cosenos (para lados)
De la figura 12.20 tomamos el cuadrilátero OB'HP

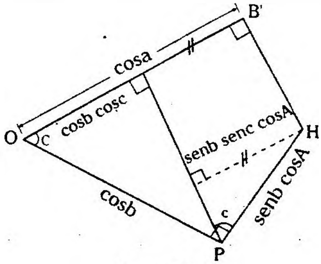


Figura 12.22

tenemos cosa=cosbcosc + senbsenccosA

Demostración (Ley de cosenos para ángulos)
Sea el triángulo polar A'B'C' para el T.E. ABC
donde a' = 180° – A y A' = 180° – a,
b' = 180° – B y c' = 180° – C,
se cumple

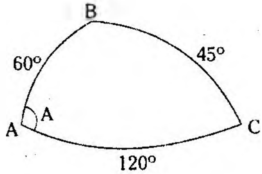
$$\cos a' = \cos b' \cos c' + \operatorname{sen} b' \operatorname{sen} c' \cos A' \ldots \text{(i)}$$
$$\cos a' = \cos(180^\circ - A) = -\cos A$$
$$\cos b' = \cos(180^\circ - B) = -\cos B$$
$$\cos c' = \cos(180^\circ - C) = -\cos C$$

Reemplazando estas relaciones en (i)

$$-\cos A = (-\cos B)(-\cos C) + (\operatorname{sen} B)(\operatorname{sen} C)(-\cos a)$$
$$\therefore \quad \cos A = -\cos B \cos C + \operatorname{sen} B \operatorname{sen} C \cos a$$

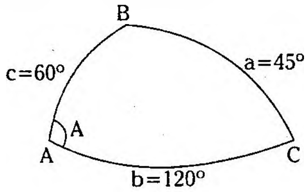
Ejemplo
En el siguiente triángulo esférico (véase figura 12.23 (a)), calcule

$$F = 3\cos A - 2\sqrt{2}$$



(a)

Resolución
Sea el triángulo esférico ABC



(b)
Figura 12.23

Por ley de cosenos para lados

$$\cos a = \cos b \cos c + \operatorname{sen} b \operatorname{sen} c \cos A$$
$$\cos 45^\circ = \cos 60^\circ \cos 120^\circ + \operatorname{sen} 60^\circ \operatorname{sen} 120^\circ \cos A$$
$$\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)+\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\cos A$$
$$\frac{\sqrt{2}}{2}=-\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\cos A$$
$$2\sqrt{2}=-1+3\cos A$$
$$3\cos A-2\sqrt{2}=1$$
$$\therefore \ F=1$$

APLICACIONES DE LA TRIGONOMETRÍA ESFÉRICA EN ASTRONOMÍA Y NAVEGACIÓN

La teoría antes expuesta tiene su utilidad al analizar a la Tierra, es decir, al hacer cálculos de distancia entre puntos sobre la Tierra consideramos a ésta como una esfera de 6370 km de radio.

Básicamente tenemos que recordar que el movimiento rotacional de nuestro planeta, tiene como ejes de rotación al diámetro que pasa por los polos Norte(N) y Sur(S), además da una vuelta completa en 24 horas. Esto es, tarda 24 horas en girar 360° (cada hora gira 15°).

El lector debe recordar que el tiempo de 24 horas para que la Tierra dé una vuelta completa es una aproximación, ya que lo real es que dicho giro se realiza en 23 horas, 56 minutos y 4 segundos

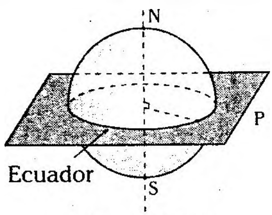


Figura 12.24

Ecuador

Es la circunferencia máxima cuyos polos son Norte y Sur. (Vea la figura 12.24)

Meridiano

El meridiano de un lugar (A) es la semicircunferencia de la Tierra que pasa por los polos Norte y Sur. (Vea la figura 12.25).

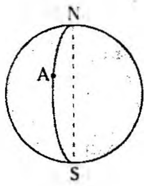


Figura 12.25

Longitud (λ)

Es la distancia esférica que hay desde el meridiano de Greenwich (Inglaterra) hasta el meridiano que pasa por el lugar de observación, varía de 0° a 180° y hacia el este u oeste.

De la figura 12.26, las coordenadas geográficas de P es (lat δ N,long λ W)

Sistema de Coordenadas Geográficas

Sistema utilizado para la ubicación de un punto en la superficie de la Tierra, mediante las coordenadas latitud (δ) y longitud (λ).

Latitud (δ)

Es la distancia esférica (medida en su meridiano) que hay desde la línea ecuatorial hasta el círculo paralelo que contiene al lugar en observación, varía de 0° a 90° y hacia el norte o el sur.

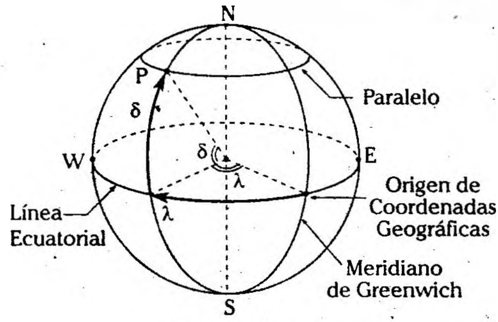


Figura 12.26

Distancia entre dos puntos de la superficie de la Tierra

La distancia más corta entre dos puntos situados sobre la superficie de una esfera es el menor arco (0° a 180°) de circunferencia máxima. Así en la figura 12.27(a) la distancia más corta entre A (latαS; longβW) y B (latθN; long0°) es la longitud del arco AB de circunferencia máxima. Para dicho cálculo se puede utilizar el triángulo esférico ANB o ASB.

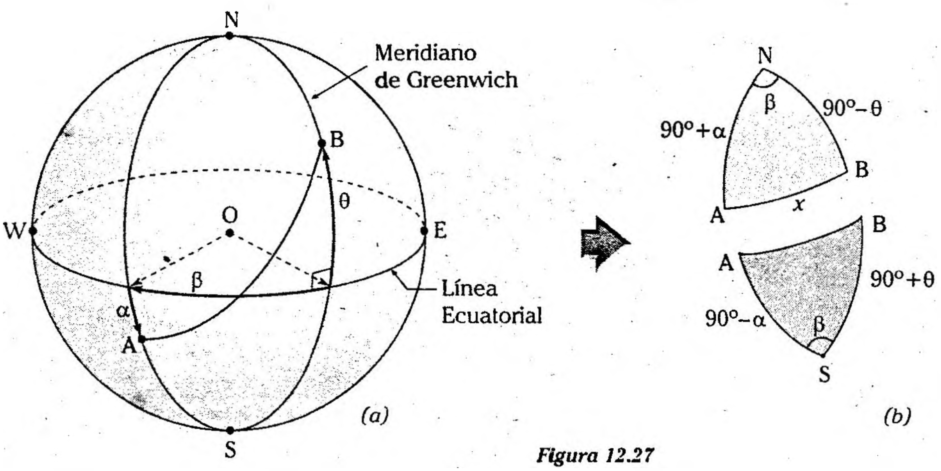


Figura 12.27

Rumbo

Cuando un navío o aeroplano recorre un arco de circunferencia máxima entre dos puntos, su rumbo es el ángulo que el recorrido forma con el meridiano del navío o del aeroplano (El rumbo se mide a partir del norte y con el sentido horario).

Ejemplo 1
Un navío que parte de A hasta B (figura. 12.28); el rumbo en A es el ángulo NAB= α y el rumbo en B es el ángulo NBC= γ.

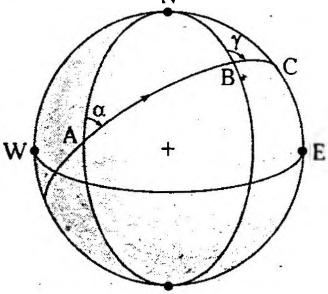


Figura 12.28

Ejemplo 2
Un navío que parte de B hasta A (figura 12.29); el rumbo en B es el ángulo NBA= θ y el rumbo en A es el ángulo NAD.

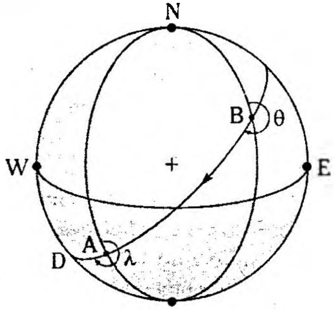


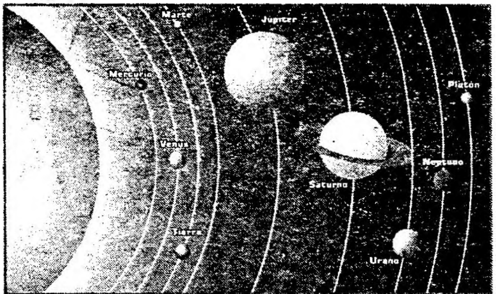
Figura 12.29

LECTURA

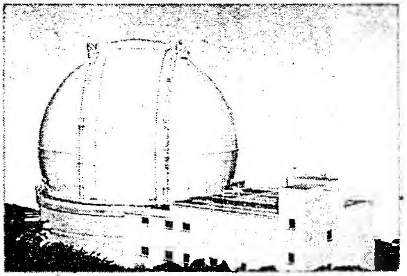
EL ESTRECHO VÍNCULO ENTRE TRIGONOMETRÍA Y ASTRONOMÍA

Las aplicaciones más importantes de la Trigonometría esférica se han dado en la Astronomía.

En efecto, la Trigonometría fue desarrollada primero por los astrónomos y durante siglos fue estudiada solamente en conexión con la Astronomía. Nosotros estudiaremos algunos de los problemas aplicativos que se presenta en esta ciencia.



Los astros del sistema planetario solar tienen por centro a la Tierra y se rigen por las leyes de Kepler.



Observatorio astronómico William Herschell, en la isla española de La Palma.

LECTURA

CHANQUILLO: OBSERVATORIO ASTRONÓMICO DE LA COSTA PERUANA

A sólo diez kilómetros de Casma, se ubica la muralla de Chanquillo. La muralla se halla derrumbada, pero conserva la curvatura original de su diseño (véase el primer gráfico).

Se puede observar los trece enigmáticos torreones y los enormes muros de una plaza enterrada.

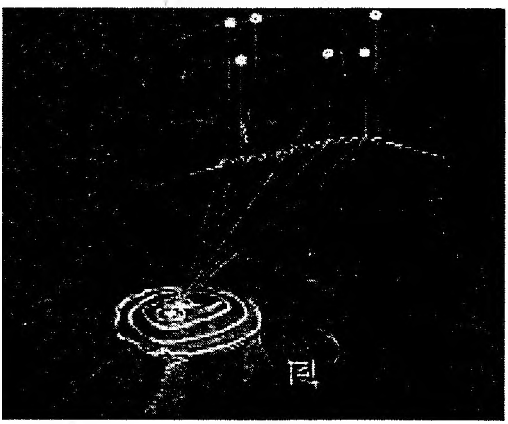


En la imagen, la muralla de Chanquillo. Expresión del desarrollo cultural de los antiguos pueblos peruanos.

En 1937, el Dr. Julio C. Tello recorre la zona en el marco de su célebre expedición por el valle de Casma, describiendo a Chanquillo como "un monumento de primer orden en su género", luego de realizar croquis, tomar fotografías y mediciones.

El estudio también llama la atención sobre los grandes portales techados con troncos de algarrobo que aún se pueden observar en Chanquillo, y según un fechado en radio – carbono realizado dio una fecha sorprendente de 320+/– 80 años antes de nuestra era.

El Dr. Paúl Kosok, el mismo que inició las investigaciones de las líneas y geoglifos en las pampas de Nazca, propuso que Chanquillo cumplió una función astronómica – calendaria, relacionada con la observación del Sol, la Luna y las estrellas. Resaltó además que los torreones coinciden con los 13 meses del calendario lunar y que las 3 murallas concéntricas del monumento tendrían referencia con los tres años solares que constan en cada ciclo lunar.



Hipotética reconstrucción del observatorio astronómico de Chanquillo por el arquitecto Carlos Milla. Los trece torreones coinciden con el número de meses lunares.

Problemas Resueltos

Problema 1

Halle el área de un triángulo esférico, sabiendo que sus ángulos miden 70°, 80° y 85°, además el radio de la esfera es 12m (tome $\pi=3{,}14$).

Resolución

De los datos: $A=70°$, $B=80°$ y $C=85°$

calculando el exceso esférico

$$\Rightarrow E=\underbrace{A+B+C}-180°$$

$$E=235°-180°$$

$$E=55°$$

luego, calculamos el área del T.E.

$$S=R^2E$$

$$S=12^2\times 55\times\frac{\pi}{180}$$

$$S=\frac{144\times 55\times(3{,}14)}{180}$$

$$S=138{,}16\text{m}^2$$

Problema 2

Dado un triángulo ABC, donde se cumple $a+b+c=180°$, calcule $K=(1-\cos A)\tan b\tan c$

Resolución

$$K=(1-\cos A)\frac{\text{sen}b\,\text{sen}c}{\cos b\cos c}$$

$$K=\frac{\text{sen}b\,\text{sen}c-\text{sen}b\,\text{sen}c\cos A}{\cos b\cos c} \quad \text{... (I)}$$

pero de la ley de cosenos para lados

$$\cos a=\cos b\cos c+\text{sen}b\,\text{sen}c\cos A$$

$$\Rightarrow \text{sen}b\,\text{sen}c\cos A=\cos a-\cos b\cos c \quad \text{... (II)}$$

Reemplazando (II) en (I)

$$K=\frac{\text{sen}b\,\text{sen}c-\cos a+\cos b\cos c}{\cos b\cos c}$$

$$K=\frac{\cos(b-c)-\cos a}{\cos b\cos c}$$

Del dato $a+(b+c)=180°$

$$\Rightarrow \cos a=-\cos(b+c)$$

$$K=\frac{\cos(b-c)+\cos(b+c)}{\cos b\cos c}$$

$$K=\frac{2\cos b\cos c}{\cos b\cos c}$$

$$\therefore K=2$$

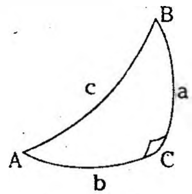
Problema 3

En un triángulo esférico ABC recto en C

simplifique
$$R=\frac{\text{sen}3b\left(\frac{\tan b}{4\tan B}-\frac{\text{sen}^3a}{3}\right)}{\text{sen}3a\left(\frac{\tan^3a}{3\tan^3A}-\frac{\text{sen}b}{4}\right)}$$

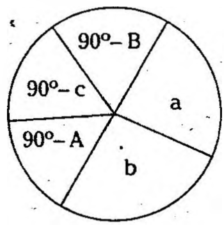
Resolución

Sea el T.E. ABC recto en C



(a)

Por la regla de Neper



(b)

Figura 12.30

- $\text{sen}a=\tan b\tan(90°-B)$

$$\Rightarrow \text{sen}a=\frac{\tan b}{\tan B} \quad \text{... (I)}$$

- $\text{sen}b=\tan a\tan(90°-A)$

$$\Rightarrow \text{sen}b=\frac{\tan a}{\tan A} \quad \text{... (II)}$$

Reemplazando (I) y (II) en R

$$R=\frac{\text{sen}3b\left(\frac{\text{sen}a}{4}-\frac{\text{sen}^3a}{3}\right)}{\text{sen}3a\left(\frac{\text{sen}^3b}{3}-\frac{\text{sen}b}{4}\right)}$$

$$R=\frac{sen3b\left(\overbrace{3sena-4sen^3a}^{sen3a}\right)}{sen3a\left(\underbrace{4sen^3b-3senb}_{-sen3b}\right)}$$

Simplificando obtenemos R=–1

Problema 4

En un triángulo esférico ABC, se cumple que

$$\sec\left(\frac{a+B}{2}\right)\sec\left(\frac{a-B}{2}\right)=2\sqrt{2}$$

obtenga el valor de la expresión siguiente:
K=cosb(senAsenC+cosc)+cosA(senbsenc–cosC)

Resolución

K = cosbsenAsenC + cosbcosc + cosAsenbsenc – cosAcosC

Agrupando convenientemente
K= (cosbcosc + senbsenccosA)
+(–cosAcosC + cosbsenAsenC)
identificando, por la ley de cosenos para lados y ángulos
K = cosa + cosB

$$K=2\cos\left(\frac{a+B}{2}\right)\cos\left(\frac{a-B}{2}\right)\quad ...(I)$$

Del dato

$$\cos\left(\frac{a+B}{2}\right)\cos\left(\frac{a-B}{2}\right)=\frac{\sqrt{2}}{4}$$

Reemplazando en (I)

$$K=2\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)\Rightarrow K=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Problema 5

En un triángulo esférico ABC demuestre

$$\tan\left(\frac{A}{2}\right)=\sqrt{\frac{sen(p-b)sen(p-c)}{senpsen(p-a)}}$$

siendo p=(a+b+c)/2

Resolución

Se conoce $\tan\left(\frac{A}{2}\right)=\sqrt{\frac{1-\cos A}{1+\cos A}}$ ...(I)

de la ley de cosenos para lados
cosa = cosbcosc + senbsenccosA

$$\Rightarrow \cos A=\frac{cosa-cosbcosc}{senbsenc}$$

Sustituyendo en (I)

$$\tan\left(\frac{A}{2}\right)=\sqrt{\frac{1-\dfrac{cosa-cosbcosc}{senbsenc}}{1+\dfrac{cosa-cosbcosc}{senbsenc}}}$$

$$\tan\left(\frac{A}{2}\right)=\sqrt{\frac{senbsenc-cosa+cosbcosc}{senbsenc+cosa-cosbcosc}}$$

Identificando, las identidades de arcos compuestos

$$\tan\left(\frac{A}{2}\right)=\sqrt{\frac{\cos(b-c)-cosa}{cosa-\cos(b+c)}}$$

Transformando a producto en el radical

$$\tan\left(\frac{A}{2}\right)=\sqrt{\frac{sen\left(\frac{a+b-c}{2}\right)sen\left(\frac{c+a-b}{2}\right)}{sen\left(\frac{a+b+c}{2}\right)sen\left(\frac{b+c-a}{2}\right)}}$$

Del perímetro del T.E. tenemos

$$2p=a+b+c\Rightarrow\frac{a+b-c}{2}=p-c$$

$$\text{análogamente}\quad\frac{c+a-b}{2}=p-b$$

$$\frac{b+c-a}{2}=p-a$$

De donde finalmente obtenemos que

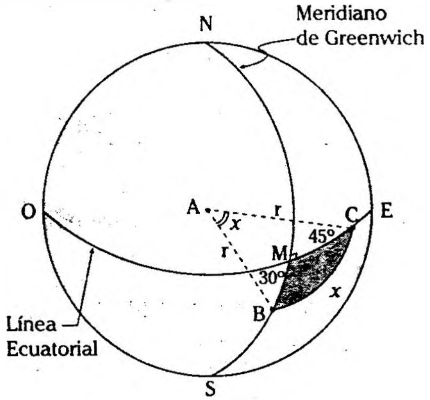
$$\tan\left(\frac{A}{2}\right)=\sqrt{\frac{sen(p-c)sen(p-b)}{senpsen(p-a)}}$$

Problema 6

De una base militar B ubicada en el Polo Norte se dispara un misil por el Meridiano de Greenwich impactando en una ciudad B (lat 30°S; long 0°). De otra ciudad C (lat 0° ; long 45°E) parte una misión exploradora. Halle la distancia más corta entre B y C, sabiendo que el radio terrestre mide aproximadamente 6300 km.

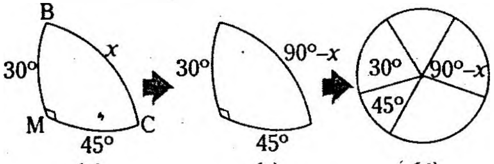
Considere $\arccos\left(\frac{\sqrt{6}}{4}\right) = 52°$

Resolución



(a)

Resolviendo el triángulo esférico rectángulo BMC de la figura 12.31(a).



(b) *(c)* *(d)*

Figura 12.31

Empleando la Regla II de Neper (véase figura 12.31)
$\operatorname{sen}(90° - x) = \cos 30° \cos 45°$

$$\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{4}$$

$$x = \arccos\left(\frac{\sqrt{6}}{4}\right) = 52°$$

La $m\widehat{BC}$, expresamos en radianes

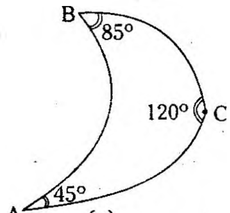
$$x = 52°\left(\frac{\pi}{180°}\right) = \frac{13\pi}{45}$$

Cálculo de la longitud del arco BC, en el sector circular BAC

$$\text{r}\widehat{BC} = \frac{13\pi}{45} \times (6300 \text{ km}) = 1820\pi \text{ km}$$

Problema 7

Del gráfico que se muestra: ABC es un triángulo esférico, cuya área es $\frac{343\pi}{2}\text{cm}^2$. ¿Cuál es el valor del radio de la esfera que contiene el triángulo?



(a)

Resolución

Recuerde, el área de un triángulo esférico es

$S = E.R^2$ ... (I)

Tenemos que el exceso esférico E, se calcula así

$E = A + B + C - 180°$,
véase figura 12.32 (b)

$\Rightarrow E = 45° + 85° + 120° - 180°$
$\Rightarrow E = 70°$,
en radianes es

$$E = \frac{7\pi}{18}\text{rad}$$

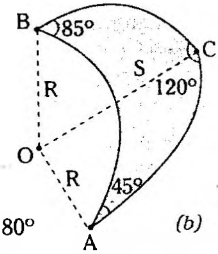


Figura 12.32

luego, reemplazando en (I)

$$\underbrace{S}_{\text{Dato}} = \frac{7\pi}{18}.R^2$$

$$\Rightarrow \frac{343\pi}{2}\text{cm}^2 = \frac{7\pi}{18}R^2$$

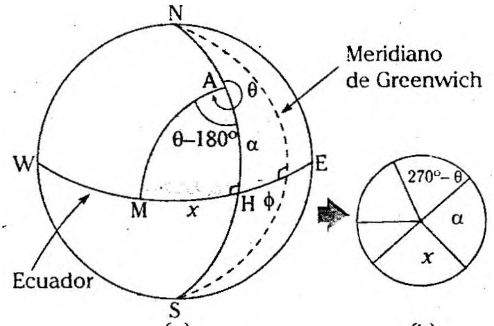
$\therefore$ R=21cm

Problema 8

El rumbo inicial de un derrotero a lo largo de una circunferencia a partir de una ciudad A (lat α N, long ϕ W) es θ; $(180° < \theta < 270°)$. Halle las coordenadas geográficas de M, (en términos de α, θ y ϕ) donde el recorrido corta al Ecuador.

Resolución

Del enunciado; ubicando al punto A



(a) *(b)*

Figura 12.33

En el T.E. MAH, por las reglas de Neper, se tiene

$$\operatorname{sen}\alpha = \tan x \tan(270° - \theta)$$

$$\operatorname{sen}\alpha = \tan x \cot\theta$$

$$\Rightarrow \tan x = \operatorname{sen}\alpha \tan\theta \Rightarrow x = \operatorname{arcot}(\operatorname{sen}\alpha \tan\theta)$$

luego las coordenadas geográficas de M son

$$M = (\text{lat}0° \,;\, \text{long}(\arctan(\operatorname{sen}\alpha \tan\theta) + \phi)W)$$

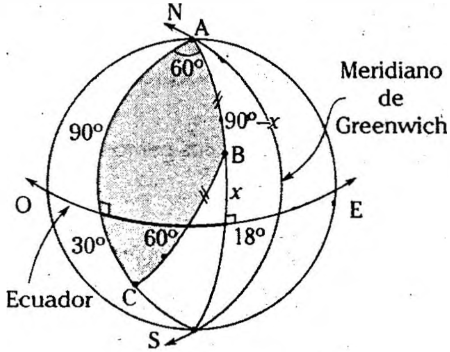
Problema 9

Tres bases A, B y C se encuentran distribuidas de la siguiente forma: B equidista de A y C. Determine la latitud de B, si se sabe que se encuentra en la long 18°O. Además, A está en el Polo Norte y C : (long78°O ; lat30°S).

Dato: $\tan 73°53' = 2\sqrt{3}$

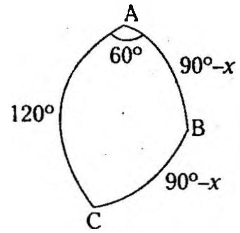
Resolución

Ubiquemos los puntos A, B y C en la Tierra.



(a)

Resolviendo el triángulo esférico ABC



(b)

Figura 12.34

Aplicando la ley de cosenos para lados en la figura 12.34(b)

$$\cos(90° - x) = \cos 120° \cos(90° - x) + \operatorname{sen}120° \operatorname{sen}(90° - x)\cos 60°$$

Reduciendo y sustituyendo valores

$$\Rightarrow \operatorname{sen}x = -\frac{1}{2}.\operatorname{sen}x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x.\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{3}{2}\operatorname{sen}x = \frac{\sqrt{3}}{4}\cos x$$

$$\Rightarrow \tan x = \frac{\sqrt{3}}{6}$$

$$\Rightarrow \cot x = 2\sqrt{3}$$

No olvidemos que $\tan 73°53' = 2\sqrt{3}$

$$\therefore \quad x = 90° - 73°53' = 16°07'$$

Problema 10

Encuentre la menor distancia entre dos ciudades A y B cuyas coordenadas geográficas son: latitud 45° Norte ; longitud 40° Oeste y latitud 45° Sur ; longitud 20° Este, respectivamente.

Resolución

Del enunciado; ubicamos los puntos A y B en la figura 12.35.

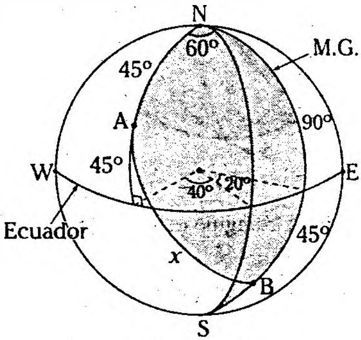


Figura 12.35

Del gráfico T.E. ANB, por ley de cosenos para lados

$\cos x = \cos 45°\cos 135° + \operatorname{sen}45°\operatorname{sen}135°\cos 60°$

$$\Rightarrow \cos x = \frac{1}{\sqrt{2}}\times\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \frac{1}{\sqrt{2}}\times\frac{1}{\sqrt{2}}\times\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \cos x = -\frac{1}{4};\ \text{como } \frac{\pi}{2} < x < \pi$$

$$\Rightarrow \quad x = \arccos\left(-\frac{1}{4}\right)$$

$$\therefore \quad x = \pi - \arccos\frac{1}{4}$$

Problema 11

El rumbo inicial de un derrotero a lo largo de una circunferencia máxima, a partir de una ciudad A (lat 40°N, long 74°W) es N30° E. Localice un punto B del recorrido más cercano al Polo Norte(N) y calcule (en millas náuticas) la distancia en la circunferencia máxima desde A hasta la ciudad B.

Datos:

- $\frac{1}{2}\cos 40° = 0{,}38$
- $\operatorname{arcsen}(0{,}38) = 22°$
- $\sqrt{3}\,\operatorname{tg}22° = 0{,}68$
- $\operatorname{arcsen}(0{,}68) = 34°$
- $\operatorname{sen}34°/\cos 40° = 0{,}73$
- $\operatorname{arcsen}(0{,}73) = 47°$

Resolución

Del enunciado, se ubican los puntos A y B en la figura 12.36 del T.E.R ANB tenemos

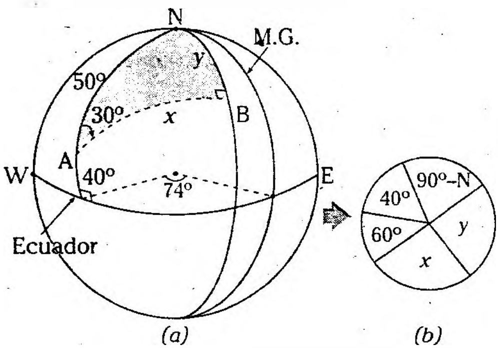


Figura 12.36

Por Neper en el T.E.R ABN se tiene

- $\operatorname{sen}y = \cos 40°\cos 60°$

  $\operatorname{sen}y = \frac{1}{2}\cos 40°$

  $\operatorname{sen}y = 0{,}38 \Rightarrow y = \operatorname{arcsen}(0{,}38) \Rightarrow y = 22°$

- $\operatorname{sen}x = \tan 60°\tan y$

  $\operatorname{sen}x = \sqrt{3}\,\operatorname{tg}22°$

  $\operatorname{sen}x = 0{,}68 \Rightarrow x = \operatorname{arcsen}(0{,}68)$

  $\Rightarrow x = 34°$

- $\operatorname{sen}x = \cos 40°\cos(90° - N)$

  $\operatorname{sen}N = \dfrac{\operatorname{sen}x}{\cos 40°}$,

  $\operatorname{sen}N = \dfrac{\operatorname{sen}34°}{\cos 40°} = 0{,}73 \Rightarrow N = \operatorname{arcsen}(0{,}73)$

  $\Rightarrow N = 47°$

Identificando las coordenadas de B

$B = (\text{lat}(90° - y)N\ ;\ \text{long}(74° - 47°)W)$

$B = (\text{lat}68°N\ ,\ \text{long}27°W)$

Luego calculamos la distancia AB

$\overset{\frown}{AB} = x = 34°$

como 1' = 1 milla náutica

$\Rightarrow \overset{\frown}{AB} = 34 \times 60' = 2040'$

$\therefore \overset{\frown}{AB} = 2040$ millas náuticas

Problema 12

Dado un triángulo esférico ABC se tiene que $E=A+B+C-\pi$ y $2p=a+b+c$ demuestre que

$$\tan\frac{E}{4}=\sqrt{\tan\frac{p}{2}\tan\left(\frac{p-a}{2}\right)\tan\left(\frac{p-b}{2}\right)\tan\left(\frac{p-c}{2}\right)}$$

Resolución

Analizando el lado **a** por teorema de cosenos para lados.

$$\cos a=\cos b\cos c+\operatorname{sen}b\operatorname{sen}c\cos A$$

$$\Rightarrow\ \cos A=\frac{\cos a-\cos b\cos c}{\operatorname{sen}b\operatorname{sen}c}$$

Por degradación $2\operatorname{sen}^2\frac{A}{2}=1-\cos A\wedge 2\cos^2\frac{A}{2}=1+\cos A$

Reemplazando tenemos $2\operatorname{sen}^2\frac{A}{2}=\frac{\cos(b-c)-\cos a}{\operatorname{sen}b\operatorname{sen}c}\wedge 2\cos^2\frac{A}{2}=\frac{\cos a-\cos(b+c)}{\operatorname{sen}b\operatorname{sen}c}$

$$\Rightarrow\ \operatorname{sen}\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{a+b-c}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{a+c-b}{2}\right)}{\operatorname{sen}b\operatorname{sen}c}}\wedge\cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{a+b+c}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{b+c-a}{2}\right)}{\operatorname{sen}b\operatorname{sen}c}}$$

Análogamente para $\operatorname{sen}\frac{B}{2}$, $\cos\frac{B}{2}$, $\operatorname{sen}\frac{C}{2}$ y $\cos\frac{C}{2}$

por arcos compuestos $\operatorname{sen}\left(\frac{A+B}{2}\right)=\operatorname{sen}\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{A}{2}\operatorname{sen}\frac{B}{2}$

reemplazando

$$\operatorname{sen}\left(\frac{A+B}{2}\right)=\sqrt{\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{a+b-c}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{a+c-b}{2}\right)}{\operatorname{sen}b\operatorname{sen}c}}\cdot\sqrt{\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{a+b+c}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{a+c-b}{2}\right)}{\operatorname{sen}a\operatorname{sen}c}}$$

$$+\sqrt{\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{a+b+c}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{b+c-a}{2}\right)}{\operatorname{sen}b\operatorname{sen}c}}\cdot\sqrt{\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{b+c-a}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{a+b-c}{2}\right)}{\operatorname{sen}a\operatorname{sen}c}}$$

Factorizando tenemos

$$\Rightarrow\operatorname{sen}\left(\frac{A+B}{2}\right)=\sqrt{\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{a+b+c}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{a+b-c}{2}\right)}{\operatorname{sen}b\operatorname{sen}a}}\left(\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{a+c-b}{2}\right)+\operatorname{sen}\left(\frac{b+c-a}{2}\right)}{\operatorname{sen}c}\right)$$

$$\Rightarrow \operatorname{sen}\left(\frac{A+B}{2}\right)=\cos\frac{C}{2}.\frac{\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)}{\cos\frac{c}{2}} \qquad ....(1)$$

Análogamente

$$\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)=\operatorname{sen}\frac{C}{2}.\frac{\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)}{\cos\frac{c}{2}} \qquad ....(2)$$

$\Rightarrow$ como $E=A+B+C-\pi$

$$\Rightarrow \frac{\pi}{2}=\left(\frac{A+B}{2}\right)+\left(\frac{C-E}{2}\right) \qquad ....(3)$$

Propiedad $\operatorname{sen}\left(\frac{A+B}{2}\right)=\cos\left(\frac{C-E}{2}\right)$ Reemplazando de (1) y (2) tenemos $\Rightarrow \dfrac{\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)}{\cos\frac{c}{2}}=\dfrac{\cos\left(\frac{C-E}{2}\right)}{\cos\frac{C}{2}}$

Empleando proporciones $\dfrac{\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)-\cos\frac{c}{2}}{\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)+\cos\frac{c}{2}}=\dfrac{\cos\left(\frac{C-E}{2}\right)-\cos\frac{C}{2}}{\cos\left(\frac{C-E}{2}\right)+\cos\frac{C}{2}}$

Transformando a producto y reduciendo

$$\tan\left(\frac{p-a}{2}\right)\tan\left(\frac{p-b}{2}\right)=\tan\left(\frac{C}{2}-\frac{E}{4}\right).\tan\frac{E}{4} \qquad ....(4)$$

de (3) $\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)=\operatorname{sen}\left(\frac{C-E}{2}\right)$ reemplazando de (2) tenemos

$\dfrac{\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)}{\cos\frac{c}{2}}=\dfrac{\operatorname{sen}\left(\frac{C-E}{2}\right)}{\operatorname{sen}\frac{C}{2}}$ reduciendo análogamente que (4) tenemos

$$\tan\frac{p}{2}.\tan\left(\frac{p-c}{2}\right)=\tan\frac{E}{4}.\cot\left(\frac{C}{2}-\frac{E}{4}\right) \qquad ....(5)$$

Multiplicando (4) y (5) tenemos

$$\tan\frac{E}{4}=\sqrt{\tan\frac{p}{2}.\tan\left(\frac{p-a}{2}\right).\tan\left(\frac{p-b}{2}\right).\tan\left(\frac{p-c}{2}\right)}$$

(esto es lo que se buscaba demostrar)

Problemas Propuestos

1. Es posible obtener un triángulo esférico ABC cuyos lados son:

   I. 180° ; 70° ; 130°
   II. 160°30' ; 100°30' ; 60°30'

2. Es posible obtener un triángulo esférico ABC cuyos ángulos son:

   I. 130° ; 120° ; 110°
   II. 20° ; 140° ; 120°

3. Es posible obtener un triángulo esférico cuyos lados son:

   I. 145° ; 100° ; 63°
   II. 80° ; 100° ; 180°

4. Es posible obtener un triángulo esférico cuyos ángulos son:

   I. 94° ; 84° ; 140°
   II. 20° ; 151° ; 110°

5. Determine en cada uno de los siguientes casos si existe el triángulo esférico ABC.

   I. c = 50° ; b = 100° ; a = 70°
   II. a = 65° ; b = 120° ; c = 35°
   III. A = 30° ; B = 37° ; C = 128°
   IV. A = 30° ; B = 85° ; C = 140°

6. Determine la existencia de los triángulos esféricos en los siguientes casos:

   I. a = 40° ; b = 130° ; c = 70°
   II. a = 90° ; b = 155° ; c = 100°
   III. A = 109° ; B = 103° ; C = 31°
   IV. A = 55° ; B = 65° ; C = 135°

7. Determine si se forma el triángulo esférico ABC en cada uno de los siguientes casos:

   I. a = 80° ; b = 100° ; c = 120°
   II. a = 70° ; b = 79° ; c = 158°
   III. A = 40° ; B = 70° ; C = 100°
   IV. A = 40° ; B = 100° ; C = 140°

8. Es posible obtener un triángulo esférico cuyos ángulos sean:

   I. 40° ; 60° ; 90°
   II. 120° ; 130° ; 50°

9. Es posible obtener un triángulo esférico cuyos lados sean:

   I. 35° ; 65° ; 120°
   II. 110° ; 90° ; 120°

10. ¿Es posible construir un triángulo esférico ABC con los siguientes datos?

    I. a = 45° ; b=135° ; c=75°
    II. a = 90° ; b=150° ; c=100°
    III. A = 120° ; B=103° ; C=33°
    IV. A = 55° ; B=65° ; C=127°

11. En una esfera de radio 2 m se encuentra un triángulo esférico ABC cuyos ángulos están en progresión aritmética, además: $\cot A = -7$; $\cot B = -\sqrt{3}$, calcule el área de dicho triángulo.

    A) $4\pi\ m^2$ B) $5\pi\ m^2$ C) $6\pi\ m^2$
    D) $8\pi m^2$ E) $10\,\pi\ m^2$

12. Halle el área de un triángulo esférico, sabiendo que sus ángulos miden A=50°, B=70°, C=90°. Además el radio de la esfera es 63,437 m.

    A) 2106,03 m^2 B) 1002,54 m^2 C) 302,50 m^2
    D) 2503,87 m^2 E) 408,75 m^2

13. Dado un triángulo esférico cuadrantal e isósceles de lados iguales a y b e iguales a α Halle el valor de la siguiente expresión

    $$R = \frac{1+\cos C\sec^2\alpha}{\cos C\csc 2\alpha + \cos 2C}$$

    A) 1 B) 2 C) 3
    D) $\frac{1}{2}$ E) $\frac{1}{3}$

14. ¿Qué parte representa el área del triángulo esférico ABC bicuadrantal del área de la superficie de dicha esfera? Además el lado desigual es 60°.

A) 1/8 B) 1/15 C) 2/9
D) 1/12 E) 3/11

15. En un triángulo rectángulo esférico ABC recto en C, si A = 60°, B = 45°, obtenga el lado a' de su respectivo triángulo polar A'B'C'

A) 100° B) 120° C) 80°
D) 45° E) 150°

16. Si los lados de un triángulo esférico ABC están en progresión aritmética y el lado intermedio mide 40°, calcule el área de su correspondiente triángulo polar, siendo su radio R = 3m.

A) $12\pi\ m^2$ B) $10\pi\ m^2$ C) $9\pi\ m^2$
D) $8\pi\ m^2$ E) $15\pi\ m^2$

17. En un triángulo esférico ABC, recto en A, si a=75° y b=45°, calcule cosccosCsenB

A) $5+\sqrt{3}$ B) $7-4\sqrt{3}$ C) $5+2\sqrt{3}$
D) $7+4\sqrt{3}$ E) $\sqrt{3}+\sqrt{15}$

18. En un triángulo esférico ABC (C=90°), simplifique

$$M=\frac{2\text{sen}^2A\,\text{sen}b\cos c}{\cos a(2\cos^2B-\text{sen}^2A)}$$

A) tan2a B) tan2b C) tan2c
D) tan2B E) sen2A

19. En un triángulo esférico rectángulo ABC (C = 90°), simplifique

$$K=\frac{2\cos A\cos c-\text{sen}B\cos b}{\text{sen}B\cos b\cos 2a}$$

A) 2 B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{1}{4}$
D) 1 E) 2

20. Dado un triángulo esférico ABC, obtenga el valor de la siguiente expresión

$$R=\frac{\cos(a-b)-\cos(a+b)}{1-\cos 2c}-\frac{\cos(A-B)-\cos(A+B)}{1-\cos 2C}$$

A) 1 B) 0 C) $\frac{1}{2}$
D) $\frac{1}{4}$ E) $\frac{2}{3}$

21. En un triángulo esférico ABC, simplifique

$$M=\frac{(1-\cos 2a)\text{sen}B\,\text{sen}c}{2\tan A(\cos a-\cos b\cos c)}$$

A) sena B) senA C) senb
D) senB E) seca

22. En un triángulo esférico ABC, simplifique

$$N=\frac{-\cos A-\cos^2\frac{a}{2}\cos(B+C)}{\text{sen}^2\left(\frac{a}{2}\right)\cos(B-C)}$$

A) 1 B) 2 C) –1
D) $-\frac{1}{4}$ E) $-\frac{1}{2}$

23. Halle la menor distancia (sobre la superficie de la tierra) entre dos ciudades R y F cuyas coordenadas geográficas respectivas son (latitud 30° Norte, longitud 80° Oeste) y (latitud 45° Sur; longitud 40° Este).
Considere que el radio de la Tierra es 6300 km

A) 10700 km
B) 10704,26 km
C) 12774,29 km
D) 21603 km
E) 10478,26 km

24. Dado un triángulo esférico ABC, indique ¿cuál de las siguientes alternativas es falsa?

A) $\dfrac{\tan\frac{1}{2}(A-B)}{\cot\frac{1}{2}C}=\dfrac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(a-b)}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(a+b)}$

B) $\cos\frac{1}{2}(A+B)\cos\frac{c}{2}=\cos\frac{1}{2}(a+b)\operatorname{sen}\frac{C}{2}$

C) $\dfrac{\tan\frac{1}{2}(a+b)}{\tan\frac{c}{2}}=\dfrac{\cos(A-B)}{\cos(A+B)}$

D) $\dfrac{\tan\frac{1}{2}(a-b)}{\tan\frac{c}{2}}=\dfrac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(A-B)}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(A+B)}$

E) $\tan\frac{1}{2}(A+C)=\cos\frac{1}{2}(a-c)\sec\frac{1}{2}(a+c)\cot\frac{B}{2}$

25. El rumbo inicial de un velero, a lo largo de una circunferencia máxima, a partir de la ciudad de Lima latitud sur 37°, longitud 232° Oeste, es 315°.
Calcule la distancia en la circunferencia máxima desde dicha ciudad, hasta donde el recorrido corta al Ecuador.
Datos:
- $\arctan(3\sqrt{2}/4)=46°42'$
- radio terrestre 6300 km
- $\pi = 22/7$

A) 5 210 km B) 4 817 km C) 6 476 km
D) 5 137 km E) 6 350 km

26. Dado un triángulo esférico ABC, siendo **S** la semisuma de los ángulos A, B, C de dicho triángulo y a, b, c, son los lados, halle el equivalente de

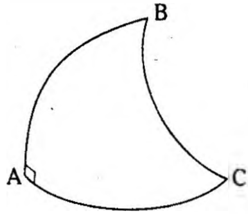
$$M=\frac{\cos\left(\frac{b+c}{2}\right)}{\left(\frac{b-c}{2}\right)}\tan\frac{A}{2}$$

A) $\tan\left(\frac{B}{2}+S\right)$ B) $\tan\left(\frac{A}{2}-S\right)$

C) $\tan\left(\frac{B}{2}-S\right)$

D) $\tan\left(\frac{C}{2}-S\right)$ E) $\cot\left(S-\frac{A}{2}\right)$

27. Del siguiente triángulo esférico, la mediana m_a relativa a la hipotenusa, se calcula con $\cos m_a$ y es igual a



A) $0{,}5\cos\frac{a}{2}(\cos b-\cos c)$

B) $0{,}5\operatorname{sen}\frac{a}{2}(\cos b-\cos c)$

C) $0{,}5\operatorname{sen}\frac{a}{2}(\cos b+\cos c)$

D) $0{,}5\cos\frac{a}{2}(\cos b+\cos c)$

E) $0{,}5\sec\frac{a}{2}(\cos b+\cos c)$

28. Dado un triángulo esférico ABC, siendo **S** la semisuma de los lados a, b y c de dicho triángulo, halle el equivalente de

$$K=\sqrt{\frac{\operatorname{sen}S\operatorname{sen}(S-b)}{\operatorname{sen}(S-A)\operatorname{sen}(S-C)}}$$

A) $\operatorname{sen}\left(\frac{A}{2}\right)$ B) $\cos\left(\frac{B}{2}\right)$ C) $\tan\left(\frac{A}{2}\right)$

D) $\cot\left(\frac{B}{2}\right)$ E) $\tan\left(\frac{C}{2}\right)$

N.°	Clave
1	I. No es posible II. Si es posible
2	I. Si es posible II. No es posible
3	I. Si es posible II. No es posible
4	I. Si es posible II. No es posible
5	I. Si es posible II. No es posible III. Si es posible IV. No es posible
6	I. Si es posible II. No es posible III. Si es posible IV. No es posible
7	I. Si es posible II. No es posible III. Si es posible IV. No es posible
8	I. Si es posible II. No es posible
9	I. No es posible II. Si es posible
10	I. No es posible II. Si es posible III. No es posible IV. Si es posible
11	C
12	A
13	A
14	D
15	B
16	A
17	B
18	B
19	D
20	B
21	A
22	B
23	B
24	C
25	D
26	E
27	E
28	D

Claves

TABLA DE SÍMBOLOS

EL ALFABETO GRIEGO Y LOS SÍMBOLOS MATEMÁTICOS

Alfa	Α	α	*Iota*	Ι	ι	*Ro*	Ρ	ρ
Beta	Β	β	*Kappa*	Κ	κ	*Sigma*	Σ	σ
Gama	Γ	γ	*Lambda*	Λ	λ	*Tau*	Τ	τ
Delta	Δ	δ	*Mu*	Μ	μ	*Upsilon*	Υ	ύ
Épsilon	Ε	ε	*Nu*	Ν	ν	*Phi*	Φ	ϕ
Zeta	Ζ	ζ	*Xi*	Ξ	ξ	*Chi*	Χ	χ
Eta	Η	η	*Ómicron*	Ο	ο	*Psi*	Ψ	ψ
Teta	Θ	θ	*Pi*	Π	π	*Omega*	Ω	ω

SÍMBOLO	*SIGNIFICADO*	*SÍMBOLO*	*SIGNIFICADO*
$=$	*es igual a*	$\subset$	*incluido en*
$\in$	*pertenece a*	$<$	*menor que*
$\notin$	*no pertenece a*	$>$	*mayor que*
$\not\subset$	*no incluido en*	$\nless$	*no es menor que*
$\varnothing$	*conjunto vacío*	$\ngtr$	*no es mayor que*
$\forall x$	*para todo x*	$\leq$	*menor o igual que*
$\exists x$	*existe un x*	$\geq$	*mayor o igual que*
/	*tal que*	$\perp$	*perpendicular a*
$\Rightarrow$	*implica*	//	*paralela a*
$\Leftrightarrow$	*equivale a, si y solo si*	$\therefore$	*en consecuencia, por lo tanto*
$\cup$	*reunión o unión*	$\sim$	*semejante*
$\wedge$	*y*	∞	*infinito*
$\vee$	*o*	Δx	*el cambio en x*
$\cap$	*intersección*	$\Delta x \to 0$	*Δx tiende a cero*
$\langle\ \rangle$	*equivalente*	$\frac{dx}{dt}$	*la derivada de x respecto a t*